

# NOVO 12F

Graça Ventura  
Manuel Fiolhais  
Carlos Fiolhais  
José António Paixão  
Rogério Nogueira  
Carlos Portela

12.º ano  
Física



Metas  
Curriculares

  
Texto

# NOVO 12 F

• Física

**12.º ano**

Graça Ventura • Manuel Fiolhais • Carlos Fiolhais  
José António Paixão • Rogério Nogueira • Carlos Portela



# ÍNDICE

# 1

## MECÂNICA

### 1.1 Cinemática e dinâmica da partícula a duas dimensões

1.1.1	Posição, equações paramétricas do movimento e trajetória	8
1.1.2	Deslocamento, velocidade média, velocidade e aceleração	13
1.1.3	Componentes tangencial e normal da aceleração	19
1.1.4	Segunda Lei de Newton em referenciais fixos e ligados à partícula	25
1.1.5	Movimentos sob a ação de uma força resultante constante	27
1.1.6	Movimentos de corpos sujeitos a ligações	36
1.1.7	Forças de atrito entre sólidos	46
1.1.8	Dinâmica da partícula e considerações energéticas	53
	<b>Resumo</b>	57
	<b>AL 1.1</b> Lançamento horizontal	59
	<b>AL 1.2</b> Atrito estático e atrito cinético	61
	<b>+ Questões</b>	64

### 1.2 Centro de massa e momento linear de sistemas de partículas

1.2.1	Centro de massa de um sistema de partículas	79
1.2.2	Velocidade e aceleração do centro de massa. Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas	82
1.2.3	Momento linear e Segunda Lei de Newton	85

1.2.4	Lei da Conservação do Momento Linear. Colisões	88
	<b>Resumo</b>	95
	<b>AL 1.3</b> Colisões	96
	<b>+ Questões</b>	98

### 1.3 Fluidos

1.3.1	Fluidos, massa volúmica, densidade relativa e pressão	107
1.3.2	Forças de pressão em fluidos	112
1.3.3	Lei Fundamental da Hidrostática	113
1.3.4	Lei de Pascal	118
1.3.5	Impulsão e Lei de Arquimedes; equilíbrio de corpos flutuantes	121
1.3.6	Movimento de corpos em fluidos; viscosidade	124
	<b>Resumo</b>	126
	<b>AL 1.4</b> Coeficiente de viscosidade de um líquido	127
	<b>+ Questões</b>	129

# 2 CAMPOS DE FORÇAS

### 2.1 Campo gravítico

2.1.1	Leis de Kepler	139
2.1.2	Lei de Newton da Gravitação Universal	141
2.1.3	Campo gravítico	145
2.1.4	Energia potencial gravítica; conservação da energia no campo gravítico	148
	<b>Resumo</b>	152
	<b>+ Questões</b>	153

# 3 FÍSICA MODERNA

## 2.2 Campo elétrico

2.2.1	Interações entre cargas elétricas e Lei de Coulomb	159
2.2.2	Campo elétrico	162
2.2.3	Condutor em equilíbrio eletrostático. Campo elétrico à superfície e no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático. Efeito das pontas	167
2.2.4	Energia potencial elétrica. Potencial elétrico e superfícies equipotenciais	171
2.2.5	Condensadores. Descarga de um condensador num circuito $RC$	179
	<b>Resumo</b>	183

<b>AL 2.1</b>	Campo elétrico e superfícies equipotenciais	185
---------------	---	-----

<b>AL 2.2</b>	Construção de um relógio logarítmico	187
---------------	--------------------------------------	-----

<b>+ Questões</b>		189
-------------------	--	-----

## 2.3 Ação de campos magnéticos sobre cargas e correntes elétricas

2.3.1	Ação de campos magnéticos sobre cargas em movimento	199
2.3.2	Ação simultânea de campos magnéticos e elétricos sobre cargas em movimento	206
2.3.3	Ação de campos magnéticos sobre correntes elétricas	212
	<b>Resumo</b>	215
	<b>+ Questões</b>	216

## 3.1 Introdução à física quântica

3.1.1	Emissão e absorção de radiação: Lei de Stefan-Boltzmann e deslocamento de Wien	227
3.1.2	A quantização da energia segundo Planck	231
3.1.3	Efeito fotoelétrico e teoria dos fótons de Einstein	232
3.1.4	Dualidade onda-corpúsculo para a luz	238
	<b>Resumo</b>	239
	<b>+ Questões</b>	240

## 3.2 Núcleos atômicos e radioatividade

3.2.1	Energia de ligação nuclear e estabilidade dos núcleos	247
3.2.2	Processos de estabilização dos núcleos: decaimento radioativo. Propriedades das emissões radioativas $\alpha$ , $\beta$ e $\gamma$	251
3.2.3	Reações de fissão nuclear e de fusão nuclear	256
3.2.4	Lei do Decaimento Radioativo; atividade de uma amostra radioativa; período de semidesintegração	259
3.2.5	Radioatividade: efeitos biológicos, aplicações e detetores	261
	<b>Resumo</b>	263
	<b>+ Questões</b>	264

---

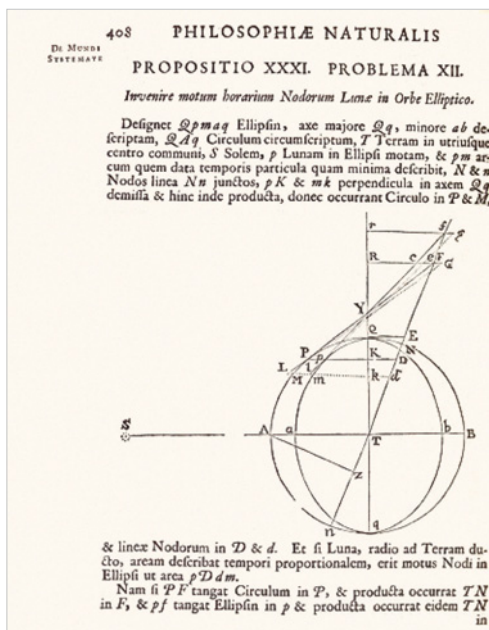
<b>Anexos</b>	268
<b>Respostas</b>	279
<b>Índice remissivo</b>	303

# 1 MECÂNICA





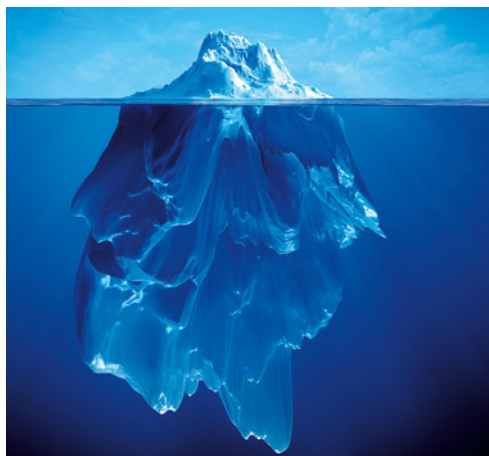




**Fig. 1** Nos *Principia*, Isaac Newton estabeleceu as bases da mecânica.



**Fig. 2** A mecânica é importante na melhoria dos resultados desportivos.



**Fig. 3** O peso de um icebergue é equilibrado pela impulsão que a água exerce sobre ele.

# O FASCINANTE MUNDO DA MECÂNICA



No estudo dos movimentos, que foi feito nos 10.<sup>o</sup> e 11.<sup>o</sup> anos, ficou clara a relevância da mecânica no desenvolvimento da ciência. Foi com o estudo dos movimentos, primeiro por Galileu e depois por Newton, que a física ficou estabelecida como uma disciplina científica no século XVII, sobretudo depois da publicação dos *Principia* de Isaac Newton. As leis da física descreviam numerosos fenómenos naturais, em particular os movimentos de corpos, por equações matemáticas. Este conhecimento da Natureza, que permite efetuar previsões, revelou-se determinante para o progresso das sociedades.

No 12.<sup>o</sup> ano vamos aprofundar o estudo da mecânica, designadamente estudando movimentos de uma partícula num espaço a duas dimensões e também movimentos de sistemas de partículas. Se conhecermos as forças que atuam sobre uma partícula, ou sobre um sistema de partículas, e soubermos a sua posição e a sua velocidade num dado instante, poderemos, aplicando as leis de Newton, conhecer essas grandezas em qualquer outro instante. Um dos exemplos onde esse conhecimento interessa ocorre no desporto de alta competição: no atletismo, na natação, no futebol, no ténis, etc. A melhoria de um recorde ou a vitória num torneio podem ser ajudadas com a análise minuciosa dos movimentos dos atletas e da bola, que se pode fazer a partir de registos vídeo.

Estudaremos, em particular, movimentos realizados em fluidos. No nosso planeta, todos as pessoas e veículos se movem no seio de fluidos. É o caso do atletismo e da natação, pois os atletas correm atravessando o ar e os nadadores competem atravessando a água. E é também o caso de veículos motorizados que se movem na terra, na água ou no ar, como automóveis, comboios, navios, submarinos e aviões. O ar e a água oferecem resistência ao movimento, sendo a diminuição dessa resistência crucial não só para ir mais rápido mas também para poupar no combustível. Nos navios e submarinos é a água que fornece a impulsão, força que contraria o peso. E, nos aviões, é o ar que permite que o veículo permaneça suspenso, fornecendo a chamada força de sustentação, que também contraria o peso.

Em suma, os conhecimentos da mecânica têm permitido e vão de certo continuar a permitir desenvolvimentos tecnológicos que ajudam o ser humano.



# 1.1 CINEMÁTICA E DINÂMICA DA PARTÍCULA A DUAS DIMENSÕES



- 1.1.1 Posição, equações paramétricas do movimento e trajetória
- 1.1.2 Deslocamento, velocidade média, velocidade e aceleração
- 1.1.3 Componentes tangencial e normal da aceleração
- 1.1.4 Segunda Lei de Newton em referenciais fixos e ligados à partícula
- 1.1.5 Movimentos sob a ação de uma força resultante constante
- 1.1.6 Movimentos de corpos sujeitos a ligações
- 1.1.7 Forças de atrito entre sólidos
- 1.1.8 Dinâmica da partícula e considerações energéticas
- AL 1.1** Lançamento horizontal
- AL 1.2** Atrito estático e atrito cinético





No nosso dia a dia vemos movimentos por todo o lado. Por isso é importante analisá-los, sendo a cinemática o domínio da mecânica que os estuda sem se preocupar com as causas que os originam ou que os alteram.

Como já sabemos, são as interações entre os corpos, descritas por forças, que permitem explicar a origem e as alterações dos movimentos. A parte da mecânica que estuda a relação entre as forças que atuam num corpo e as características do seu movimento é a dinâmica.

Tal como no 11.º ano, analisaremos movimentos de corpos que se possam reduzir ao seu centro de massa (ou seja, a uma partícula) usando grandezas cinemáticas como a posição, o deslocamento, a velocidade e a aceleração.

## 1.1.1 Posição, equações paramétricas do movimento e trajetória

A **trajetória** do centro de massa de um corpo pode ser retilínea ou curvilínea. Vimos no 11.º ano que, se a trajetória for retilínea, bastará um único eixo cartesiano para descrever o movimento. Generalizamos agora essa descrição para movimentos curvilíneos no plano (movimentos a duas dimensões, cuja descrição requer dois eixos) e no espaço (movimentos a três dimensões, cuja descrição requer três eixos).

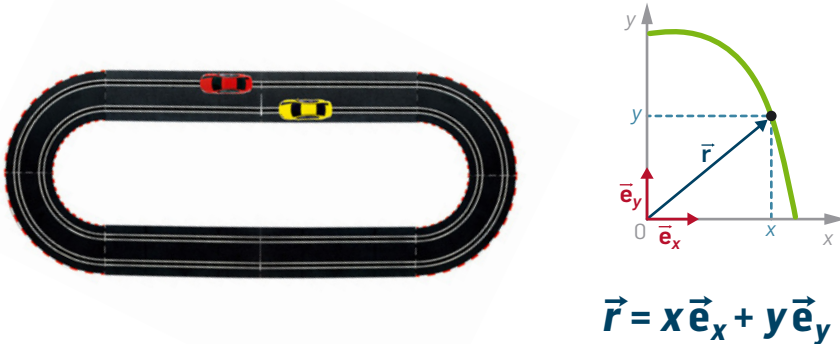
A **posição** de uma partícula depende do referencial no qual o movimento é descrito, e pode ser representada por um vetor, de símbolo  $\vec{r}$ , que tem a sua origem na origem do referencial e a sua extremidade sobre a partícula.

Num movimento retilíneo, como o de um carrinho que desliza numa calha e que, num dado instante, está num ponto **P** de coordenada  $x$  (**Fig. 1**), a posição do centro de massa pode escrever-se como  $\vec{r} = x \vec{e}_x$ , sendo  $\vec{e}_x$  o vetor unitário cuja direção é a do eixo dos  $xx$ , apontando no sentido positivo desse eixo.



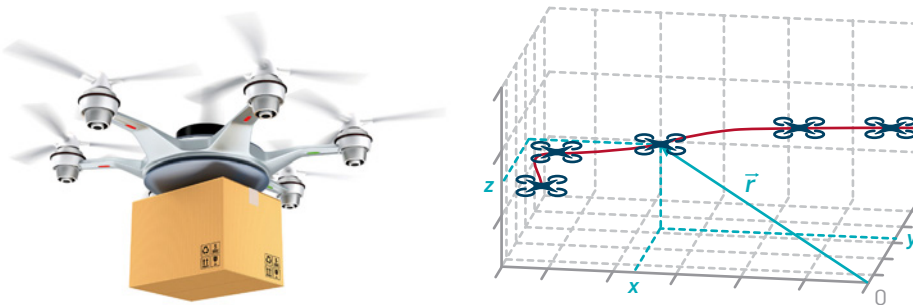
**Fig. 1** Movimento retilíneo de um carrinho e vetor posição do seu centro de massa,  $\vec{r}$ , definido por uma só coordenada cartesiana,  $x$ , e pelo vetor unitário  $\vec{e}_x$ .

Se o movimento for curvilíneo como, por exemplo, o do centro de massa de um carrinho numa pista (**Fig. 2**), para descrever a sua posição serão necessárias duas coordenadas,  $x$  e  $y$ , ou seja, um referencial cartesiano com dois eixos. Definem-se os vetores unitários,  $\vec{e}_x$  e  $\vec{e}_y$ , que apontam nos sentidos positivos dos eixos dos  $xx$  e dos  $yy$ , respetivamente, decompondo-se o vetor  $\vec{r}$  nestes eixos:  $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$ .



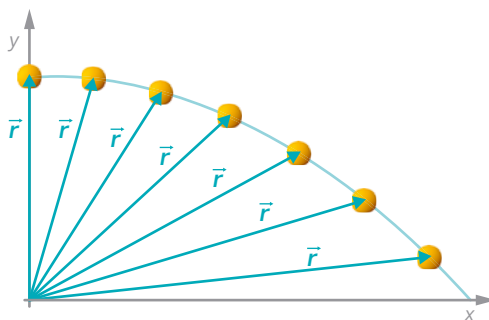
**Fig. 2** Movimento curvilíneo descrito pelo centro de massa de um carrinho numa pista e respetivo vetor posição,  $\vec{r}$ , definido por duas coordenadas cartesianas,  $x$  e  $y$ , e pelos dois vetores unitários  $\vec{e}_x$  e  $\vec{e}_y$ .

Um movimento mais complexo é o movimento curvilíneo a três dimensões, como o do centro de massa de um *drone* como o da **Fig. 3**, em que já são necessárias três coordenadas,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , para o descrever, sendo o vetor posição dado por  $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$ .



**Fig. 3** Movimento curvilíneo descrito pelo centro de massa de um *drone* e vetor posição,  $\vec{r}$ , definido por três coordenadas cartesianas,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e pelos vetores unitários  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  e  $\vec{e}_z$ .

Num movimento, o vetor posição varia ao longo do tempo. A **Fig. 4** mostra a trajetória curvilínea de uma partícula e a sua posição em intervalos de tempo iguais – a chamada **representação estroboscópica** do movimento – assim como os respetivos vetores posição.



**Fig. 4** Representação estroboscópica do movimento de uma partícula com trajetória curvilínea: os vetores posição são representados a intervalos de tempo iguais.

A variação do vetor posição  $\vec{r}$  traduz-se na variação das coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , da posição da partícula. Por isso, o vetor posição é função do tempo,  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , e as suas coordenadas são funções do tempo:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$



Estas três equações, que indicam a variação de cada coordenada com o tempo, são designadas por **equações escalares** ou **paramétricas do movimento** (escalares porque representam componentes escalares das projeções do vetor posição e paramétricas porque as coordenadas dependem do parâmetro tempo,  $t$ ).

A posição da partícula ao longo do tempo, também designada por **lei do movimento**, pode então ser representada por

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z$$

A posição, como qualquer grandeza vetorial, pode ser indicada pela respetiva expressão vetorial,  $\vec{r}(t)$ , ou pelas projeções escalares das componentes do vetor ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ).

O módulo ou norma de um vetor escreve-se  $|\vec{r}|$  ou, simplesmente,  $r$  (em matemática, a norma de um vetor representa-se por  $\|\vec{r}\|$ ).

Podemos resumir as características do vetor posição:

#### Posição, $\vec{r}$

- Vetor com origem na origem do referencial e extremidade na partícula; depende do referencial em que é definido.
- A sua expressão vetorial (designada por lei do movimento) é dada por:  
 $\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x$  num movimento retilíneo;  
 $\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y$  num movimento curvilíneo no plano;  
 $\vec{r} = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z$  num movimento curvilíneo no espaço.
- As suas projeções escalares,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , podem variar ao longo do tempo, tomando valores positivos, negativos ou nulos, sendo as funções

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

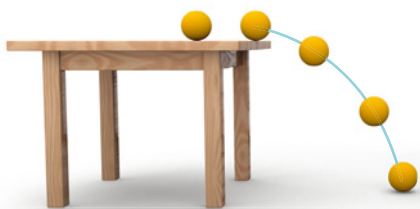
designadas por **equações paramétricas do movimento**.

- O seu módulo (positivo) é dado por

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

e indica a distância da partícula à origem do referencial (este módulo não é suficiente para definir a posição, pois vetores diferentes podem ter o mesmo módulo).

**Movimento curvilíneo:** pode ser descrito como a composição de movimentos retilíneos.

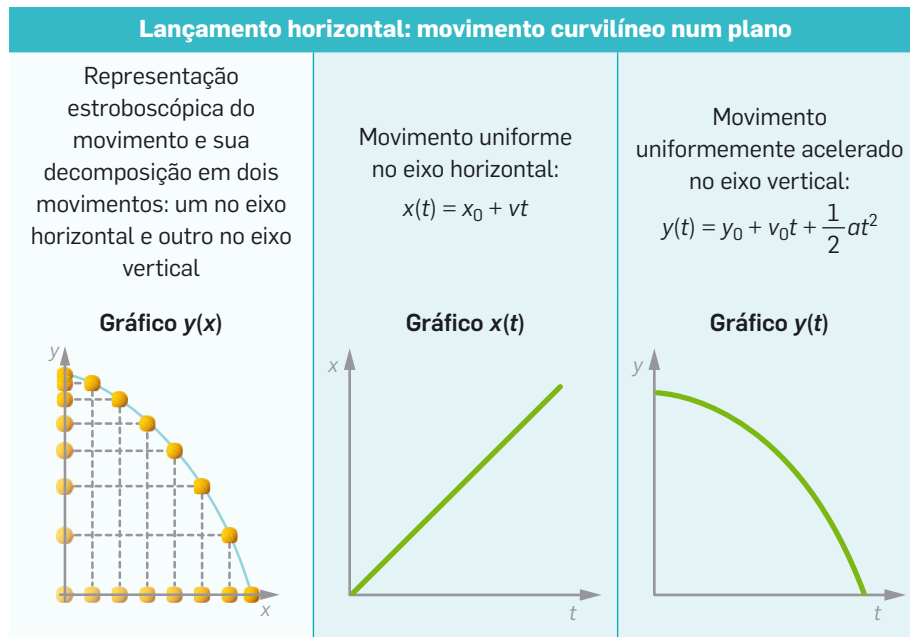


**Fig. 5** Lançamento horizontal de uma bola do cimo de uma mesa.

Qualquer **movimento curvilíneo** pode ser descrito como a **composição de movimentos retilíneos** em dois eixos (movimento num plano) ou em três eixos (movimento no espaço).

Exemplifiquemos com o movimento do centro de massa de uma bola lançada horizontalmente em queda livre, como se representa na **Fig. 5**. Este movimento curvilíneo, que se realiza num plano, pode ser visto como a composição de um movimento segundo um eixo horizontal e um movimento segundo um eixo vertical.

A representação estroboscópica no gráfico  $y(x)$  permite decompor o movimento nos dois eixos e caracterizar o movimento em cada eixo como uniforme, acelerado ou retardado, comparando as distâncias percorridas entre posições sucessivas em intervalos de tempo iguais. Os movimentos em cada eixo são descritos pelas respetivas equações paramétricas, sendo possível representá-los em gráficos posição-tempo (**Fig. 6**).



**Fig. 6** Um lançamento horizontal de um corpo pode ser descrito como a composição de um movimento uniforme na direção horizontal e um movimento uniformemente acelerado na direção vertical.

No exemplo anterior distingue-se o **gráfico da trajetória**,  $y(x)$ , onde se representa a partícula sobre a trajetória, dos **gráficos posição-tempo**,  $x(t)$  e  $y(t)$ , que representam a variação das coordenadas  $x$  e  $y$  no tempo e onde não tem significado representar a partícula.

A forma das equações paramétricas dos movimentos retilíneos em cada eixo permite a sua caracterização, como se exemplifica na **Fig. 7**.

Equações paramétricas: equações do movimento retilíneo ao longo de um eixo	
Movimento uniforme (aceleração nula)	A coordenada de posição é uma função polinomial do 1.º grau em $t$ . Exemplo: $x(t) = 5 - 10t$ .
Movimento uniformemente variado (aceleração constante)	A coordenada de posição é uma função polinomial do 2.º grau em $t$ . Exemplo: $y(t) = -2 + 10t - 5t^2$ .
Movimento variado (aceleração variável)	A coordenada de posição é uma função polinomial de grau superior a 2 em $t$ . Exemplo: $x(t) = 2 - 10t^3$ .

**Fig. 7** Caracterização dos movimentos conforme a forma das equações paramétricas.

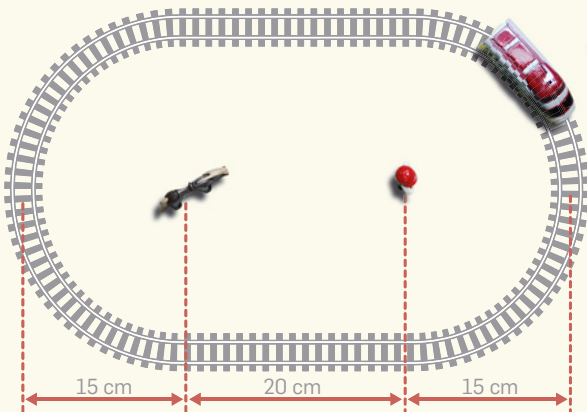
A **equação da trajetória** de uma partícula obtém-se a partir das equações paramétricas do movimento por eliminação do parâmetro  $t$ .

No exemplo da **Fig. 6**, se as equações paramétricas forem  $x(t) = 10t$  e  $y(t) = 5 - 5t^2$ , extraindo o parâmetro  $t$  na equação  $x(t)$  e substituindo-o na equação  $y(t)$  obter-se-á  $y = 5 - 5\left(\frac{x}{10}\right)^2$ , o que indica que a trajetória é uma parábola.

**Equação da trajetória:** obtém-se a partir das equações paramétricas por eliminação da variável tempo,  $t$ .

O resultado anterior é geral: se as equações paramétricas de um movimento forem uma do primeiro grau em  $t$  e outra do segundo grau em  $t$ , a trajetória será uma parábola.

### Questão resolvida 1



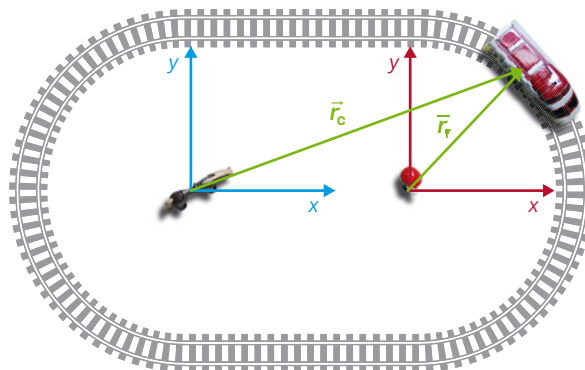
A figura mostra um modelo de uma pista de comboios, uma locomotiva e nos centros dos troços circulares dois bonecos: um cavalo e um rapaz. No instante da fotografia, o centro de massa da locomotiva tinha acabado de descrever um quarto do semicírculo. Considere dois referenciais com origens no cavalo e no rapaz; eixo dos  $xx$  com direção da linha que une o cavalo e o rapaz, com sentidos positivos do cavalo para o rapaz; eixos dos  $yy$  perpendiculares aos eixos dos  $xx$  no plano da pista e com sentido para cima.

a) Para o instante da figura, escreva as expressões cartesianas dos vetores posição do centro de massa da locomotiva em cada um dos referenciais.

b) Considerando o referencial com origem no cavalo, durante um certo intervalo de tempo as equações paramétricas do movimento do centro de massa da locomotiva são:

$$x = 0,20 + 0,15 \sin 2t \quad \text{e} \quad y = 0,15 \cos 2t$$

Encontre a equação da trajetória para este intervalo de tempo.



a) Pela figura, observa-se que o ângulo que o vetor  $\vec{r}_r$  faz com o eixo dos  $xx$  é  $45^\circ$ . Como o raio da trajetória semi-circular é  $0,15$  m, no referencial com origem no rapaz as coordenadas são iguais:

$$y = x = 0,15 \cos 45^\circ + 0,11 \text{ m}$$

As coordenadas nos eixos dos  $yy$  são iguais em ambos os referenciais. Então:

$$\vec{r}_r = 0,11 \vec{e}_x + 0,11 \vec{e}_y$$

e

$$\vec{r}_c = (0,11 + 0,20) \vec{e}_x + 0,11 \vec{e}_y = 0,31 \vec{e}_x + 0,11 \vec{e}_y$$

b) Para obter a equação da trajetória deve extrair-se o tempo,  $t$ , das equações. Como neste caso as equações paramétricas têm cossenos e senos, é conveniente recordar que  $1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ .

Modificando as expressões das coordenadas paramétricas, obtém-se:

$$\frac{y}{0,15} = \cos 2t \quad \text{e} \quad \frac{0,20 - y}{0,15} = \sin 2t$$

$$\text{logo, } \left(\frac{x}{0,15}\right)^2 = \cos^2 2t \quad \text{e} \quad \left(\frac{0,15 - y}{0,15}\right)^2 = \sin^2 2t$$

ou

$$1 = \left(\frac{0,20 - y}{0,15}\right)^2 + \left(\frac{x}{0,15}\right)^2 \Leftrightarrow 0,15^2 = (0,20 - y)^2 + x^2$$

### Questão resolvida 2

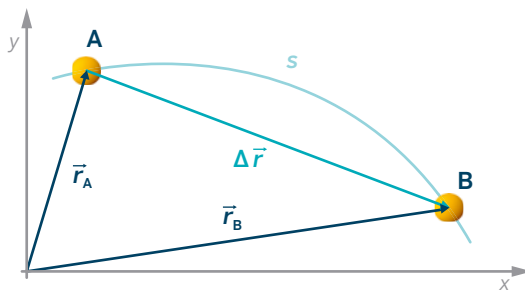
Ver Anexo 1, página 268

## 1.1.2 Deslocamento, velocidade média, velocidade e aceleração

O **deslocamento** de uma partícula, simbolizado por  $\Delta\vec{r}$ , descreve a variação da sua posição num dado intervalo de tempo. Se ela se mover de uma posição **A** para uma posição **B**, o deslocamento será um vetor com origem em **A** e extremidade em **B** (Fig. 8). Se traçarmos os vetores posição de **A**,  $\vec{r}_A$ , e de **B**,  $\vec{r}_B$ , a regra da soma de vetores permitirá escrever  $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \Delta\vec{r}$ , que é equivalente a:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

A Fig. 8 mostra que o módulo deste vetor,  $|\Delta\vec{r}|$ , não é igual à distância percorrida sobre a trajetória,  $s$ , entre **A** e **B**, dada pelo comprimento do arco AB. Só quando a trajetória é retilínea e não há inversão de sentido do movimento é que o módulo do deslocamento coincide com a distância percorrida.



**Deslocamento,  $\Delta\vec{r}$** : vetor com origem na posição inicial e extremidade na posição final da partícula.

Tem-se  $s = |\Delta\vec{r}|$  apenas se o movimento for retilíneo e sem inversão de sentido.

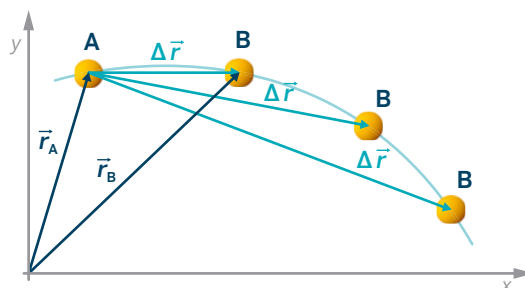
**Fig. 8** Trajetória de uma partícula e vetores posição,  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$ , vetor deslocamento,  $\Delta\vec{r}$ , e distância percorrida sobre a trajetória,  $s$ .

A **velocidade média** de uma partícula,  $\vec{v}_m$ , é o quociente entre o seu deslocamento entre duas posições e o correspondente intervalo de tempo:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Esta grandeza indica se a partícula muda mais ou menos rapidamente de posição num dado intervalo de tempo. Como  $\Delta t$  tem sempre um valor positivo, a direção e o sentido da velocidade média são os do vetor deslocamento.

Como se obtém a **velocidade** num dado instante? Imaginemos o ponto **B** da Fig. 9 cada vez mais próximo do ponto **A**.



**Fig. 9** O deslocamento  $\Delta\vec{r}$  torna-se cada vez menor à medida que **B** se aproxima de **A** e apoia-se numa reta secante à trajetória. Quando **B** se aproxima muito de **A**,  $\Delta\vec{r}$  tende a ficar sobre a reta tangente à trajetória em **A**.

O deslocamento  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$  é cada vez menor, assim como o intervalo de tempo  $\Delta t = t_B - t_A$ . Quando o ponto **B** se aproxima tanto de **A** que praticamente coincide com ele, ou seja, quando o intervalo de tempo,  $\Delta t$ , é praticamente zero (o que se exprime matematicamente por  $\Delta t \rightarrow 0$ ) a velocidade média dá lugar à **velocidade instantânea** ou, simplesmente, **velocidade**.

A **velocidade** exprime-se matematicamente por

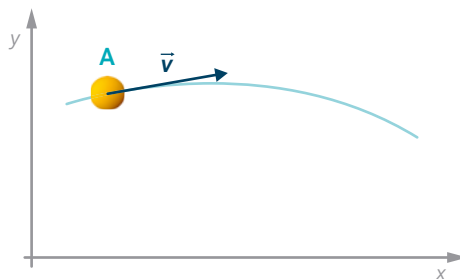
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

que é equivalente a

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ou seja, a velocidade é a **derivada temporal do vetor posição** (a derivada de uma função  $f(t)$ , em ordem à variável  $t$ , representa-se por  $f'(t)$  ou por  $\frac{df}{dt}$ ).

Na **Fig. 9** (página 13) verifica-se que os vetores deslocamento se apoiam em retas secantes à curva. Mas, quando **B** está muito próximo de **A**, essas retas secantes tendem para a reta tangente à curva em **A**. Por isso a velocidade é um vetor tangente à trajetória (**Fig. 10**), que aponta no sentido em que a partícula se move. O **módulo da velocidade**,  $v = |\vec{v}|$ , indica a **rapidez** da partícula.



**Fig. 10** O vetor velocidade é tangente à trajetória, em cada ponto.

Atendendo às regras de derivação da soma e do produto, e uma vez que os vetores unitários  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  e  $\vec{e}_z$  são constantes no tempo, a derivada da posição num referencial cartesiano,  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$ , é dada por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

Por isso, a velocidade é uma função do tempo e escreve-se na forma

$$\vec{v}(t) = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$$

com as componentes escalares da velocidade dadas por

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$f(t) = k \quad \frac{df}{dt} = 0$$

$$f(t) = kt \quad \frac{df}{dt} = k$$

$$f(t) = kt^2 \quad \frac{df}{dt} = 2kt$$

$$f(t) = kt^n \quad \frac{df}{dt} = nkt^{n-1}$$

**Tab.1** Derivadas de funções polinomiais.

A **Tab. 1** indica derivadas de funções polinomiais.



### Questão resolvida 3

O movimento de um inseto é descrito pelas seguintes equações paramétricas:

$$x = 2t^3 - 5t^2 + 1, \quad y = -t^2 + 3t + 2 \quad \text{e} \quad z = 2t \quad (\text{SI})$$

- a) Qual é a velocidade média no terceiro segundo de movimento?
- b) Qual é o módulo da velocidade no instante  $t = 1$  s?
- c) Em que instante o inseto varia de posição mais rapidamente, em  $t = 1$  s ou em  $t = 2$  s? Justifique.



a) A velocidade média é  $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ . O terceiro segundo de movimento corresponde ao intervalo  $[2, 3]$  s e, por isso,  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(3) - \vec{r}(2)$ .

Ora  $\vec{r}(3) = 10\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 6\vec{e}_z$  (m) e  $\vec{r}(2) = -3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$  (m)  
Logo,  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(3) - \vec{r}(2) = 13\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$  (m)

A velocidade média é o quociente deste deslocamento pelo intervalo de tempo, que é 1 s.

Logo,  $\vec{v}_m = 13\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$  ( $\text{m s}^{-1}$ ), sendo o seu módulo igual a  $13,3 \text{ m s}^{-1}$ .

b) Como  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$  e  $v_z = \frac{dz}{dt}$ , aplicando as regras de derivação obtém-se

$$v_x = 6t^2 - 10t \text{ (m s}^{-1}\text{)}, \quad v_y = -2t + 3 \text{ (m s}^{-1}\text{)} \quad \text{e} \quad v_z = 2 \text{ m s}^{-1}$$

No instante  $t = 1$  s, as componentes escalares da velocidade tomam os valores:  $v_x = -4 \text{ m s}^{-1}$ ,  $v_y = 1 \text{ m s}^{-1}$  e  $v_z = 2 \text{ m s}^{-1}$  e o seu módulo é

$$v = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 2^2} = 4,6 \text{ m s}^{-1}$$

c) No instante em que for maior a velocidade instantânea. Em  $t = 2$  s, as suas componentes escalares tomam os valores:

$$v_x = 4 \text{ m s}^{-1}, \quad v_y = -1 \text{ m s}^{-1} \quad \text{e} \quad v_z = 2 \text{ m s}^{-1}$$

O módulo é  $v = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2} = 4,6 \text{ m s}^{-1}$ .

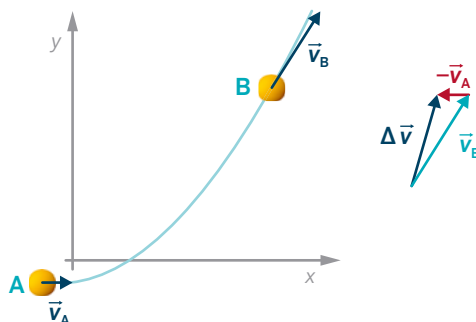
Como o módulo da velocidade neste instante é o mesmo que no instante anterior, a posição do inseto está a variar com igual rapidez nos dois instantes.

A variação da velocidade é descrita pela grandeza aceleração.

A **aceleração média** num dado intervalo de tempo é o quociente entre a variação de velocidade e o respetivo intervalo de tempo:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

O vetor  $\Delta \vec{v}$  entre duas posições **A** e **B** pode ser obtido geometricamente por uma soma de vetores (**Fig. 11**), pois  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_B + (-\vec{v}_A)$ .



**Aceleração média,  $\vec{a}_m$ :** indica a rapidez com que uma partícula muda de velocidade num dado intervalo de tempo.

**Fig. 11** A aceleração média tem a direção e sentido da variação de velocidade  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

**Aceleração,  $\vec{a}$ :** é a derivada temporal do vetor velocidade.

Indica a rapidez com que a partícula muda de velocidade num dado instante.

É um vetor que aponta sempre para o interior da curva descrita.

A direção e o sentido de  $\vec{a}_m$  são os mesmos que os de  $\Delta\vec{v}$ , pois  $\Delta t$  é sempre positivo. Repare-se que  $\Delta\vec{v}$  e, conseqüentemente,  $\vec{a}_m$  apontam para o interior da curva descrita pela partícula.

Para conhecer a aceleração num dado instante, procedemos como fizemos na determinação da velocidade instantânea: partimos da definição de aceleração média e consideramos o ponto **B** tão próximo quanto possível de **A** (Fig. 11, página 15), isto é,  $\Delta t \rightarrow 0$ . A **aceleração instantânea** ou, simplesmente, **aceleração**, é expressa por

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

ou

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

que é a **derivada temporal da velocidade**.

A aceleração, que é uma função do tempo, vem dada por:

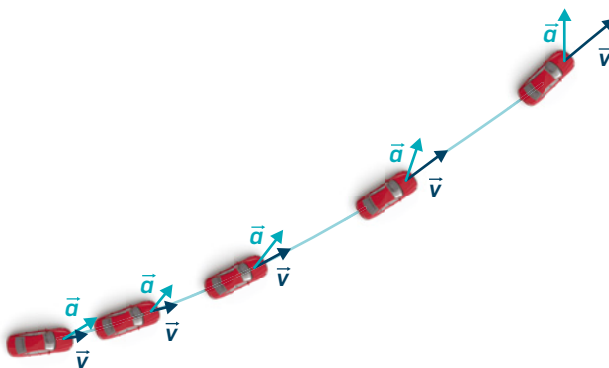
$$\vec{a}(t) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

sendo:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

Como a aceleração média aponta para o interior da trajetória curvilínea, também a aceleração aponta sempre para dentro dessa trajetória. No caso das trajetórias retilíneas, a aceleração tem sempre a direção da velocidade, que é também a direção da trajetória.

Na Fig. 12 mostram-se, numa representação estroboscópica, os vetores aceleração e velocidade do centro de massa de um automóvel que segue uma trajetória curvilínea: o aumento da distância percorrida em intervalos de tempo iguais e o aumento do módulo da velocidade mostram que o movimento é acelerado.



**Fig. 12** Vetores velocidade e aceleração num movimento curvilíneo acelerado.

Podemos caracterizar as trajetórias retilíneas e curvilíneas por meio dos vetores velocidade e aceleração (Fig. 13):

Trajelórias retilíneas	Trajelórias curvilíneas
$\vec{a}$ e $\vec{v}$ têm sempre a mesma direção, que coincide com a direção da trajetória (podem ou não ter o mesmo sentido).	$\vec{a}$ e $\vec{v}$ nunca têm a mesma direção: $\vec{a}$ aponta sempre para o interior da curva e $\vec{v}$ é sempre tangente à curva em cada ponto.

**Fig. 13** Vetores velocidade e aceleração em trajetórias retilíneas e curvilíneas.

## Atividade 1

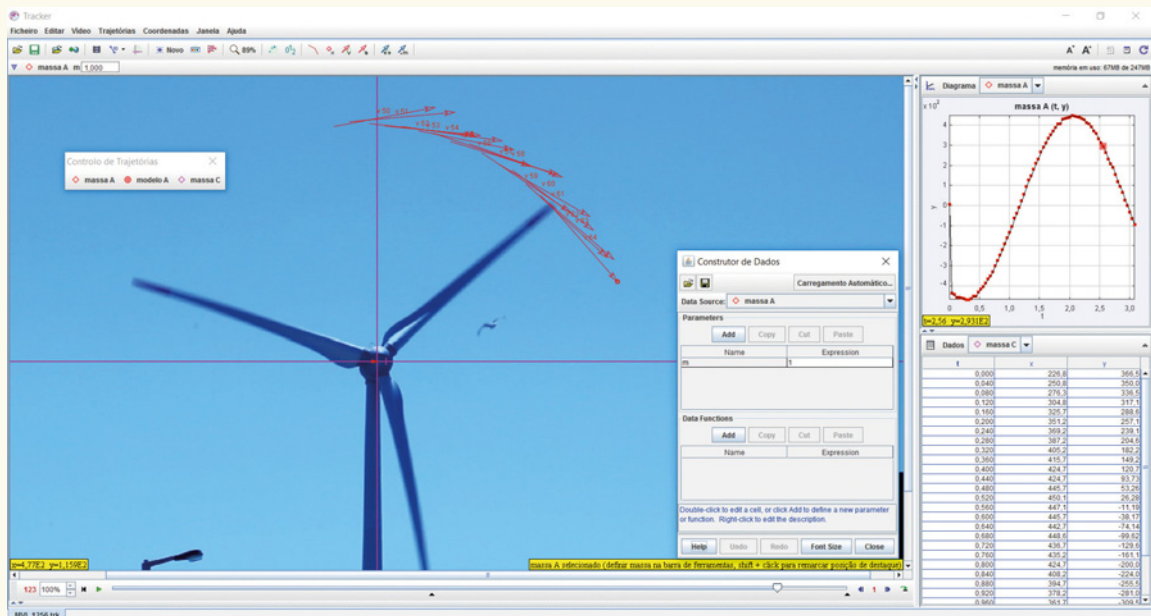
É através da visão que nos apercebemos do movimento e identificamos algumas das suas características. Porém, o nosso sistema visual, que inclui os olhos, o nervo ótico e o cérebro, tem limitações. Por exemplo, não é possível distinguir duas imagens quando o intervalo de tempo que as separa é inferior a 0,1 s. E as imagens ficam-nos na memória, podendo ser recordadas mas não analisadas.

Atualmente, existe uma variedade de dispositivos que podem gravar imagens e vídeos, como câmaras fotográficas, telemóveis, câmaras em computadores, etc. Os vídeos registados por estes dispositivos podem ser analisados repetidamente.

O vídeo é um registo de imagens tomadas a intervalos de tempo regulares e, conhecida a escala das imagens, nelas podem identificar-se posições. Logo, podem obter-se posições em função do tempo.

Existem programas específicos com a finalidade de analisar movimentos em vídeo e criar as correspondentes funções matemáticas como, por exemplo, o Tracker – Video Analysis and Modeling Tool (<http://physlets.org/tracker/>). Registe em vídeo um movimento e faça a sua análise com, por exemplo, o Tracker.

Antes de produzir o vídeo, não se esqueça de que a análise de movimentos em vídeo também é limitada e que a produção do vídeo deve obedecer a alguns cuidados e requisitos. Por exemplo, estará a câmara em movimento? Quantas dimensões do movimento podem ser analisadas? Qual é a melhor perspetiva para filmar? São necessários fundos contrastantes com os objetos? Quais as características das câmaras de filmar (resolução, número de fotogramas por segundo, velocidade de abertura) mais adequadas a cada situação? Partindo de posições e tempos, de que forma o *software* calcula velocidades?





## Questão resolvida 4

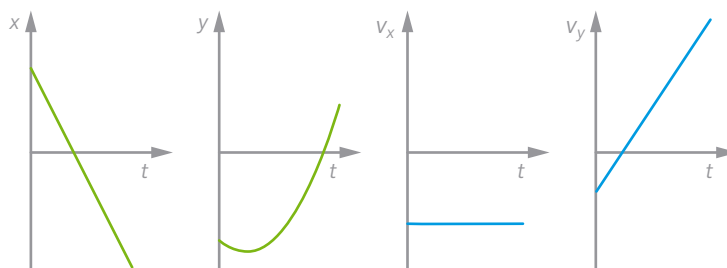


Um carrinho telecomandado move-se sobre o solo. As equações paramétricas do seu movimento são  $x(t) = 5 - 20t$  e  $y(t) = -1 - 2t + 6t^2$  (SI).

- Faça uma previsão para a trajetória da partícula.
- Caracterize o movimento ao longo de cada eixo coordenado e esboce os respectivos gráficos posição-tempo e velocidade-tempo.
- Qual é a aceleração média no primeiro segundo de movimento? E a aceleração em  $t = 1$  s? O que conclui dos resultados?



- Já vimos que um movimento descrito por uma equação do 1.º grau em  $t$  e uma equação do 2.º grau em  $t$  tem uma trajetória parabólica. Se introduzirmos as equações na calculadora no modo paramétrico, poderemos confirmar essa previsão.
- As equações  $x(t) = 5 - 20t$  e  $y(t) = -1 - 2t + 6t^2$  indicam que o movimento é uniforme na direção  $x$  e uniformemente variado na direção  $y$ . Por isso, o gráfico da função  $x(t)$  é uma reta com ordenada na origem igual a 5 e declive negativo igual a  $-20$ ; e o gráfico da função  $y(t)$  é uma parábola cuja ordenada na origem é  $-1$  e cuja concavidade está voltada para cima, pois o coeficiente de  $t^2$  é positivo. Como  $v_x = \frac{dx}{dt}$  e  $v_y = \frac{dy}{dt}$ , obtém-se  $v_x(t) = -20$  m/s e  $v_y(t) = -2 + 12t$  (SI): o gráfico da função  $v_x(t)$  é uma reta horizontal (a velocidade é sempre constante) e o gráfico da função  $v_y(t)$  é uma reta com ordenada na origem igual a  $-2$  e declive igual a  $+12$ , ou seja, a velocidade nesta direção varia linearmente com o tempo.



- A aceleração média é  $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(1) - \vec{v}(0)}{1}$

Mas  $\vec{v}(1) = -20\vec{e}_x + 10\vec{e}_y$  ( $\text{m s}^{-1}$ ) e  $\vec{v}(0) = -20\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$  ( $\text{m s}^{-1}$ ). Por isso,

$$\vec{a}_m = \frac{[-20 - (-20)]\vec{e}_x + [10 - (-2)]\vec{e}_y}{1} = 12\vec{e}_y \text{ (m s}^{-2}\text{)}$$

Por outro lado, as componentes da aceleração são:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 12 \text{ m s}^{-2}, \text{ ou seja, } \vec{a} = 12\vec{e}_y \text{ (m s}^{-2}\text{)}$$

Esta é a aceleração em  $t = 1$  s ou em qualquer outro instante. A aceleração é constante, pelo que coincide com a aceleração média.

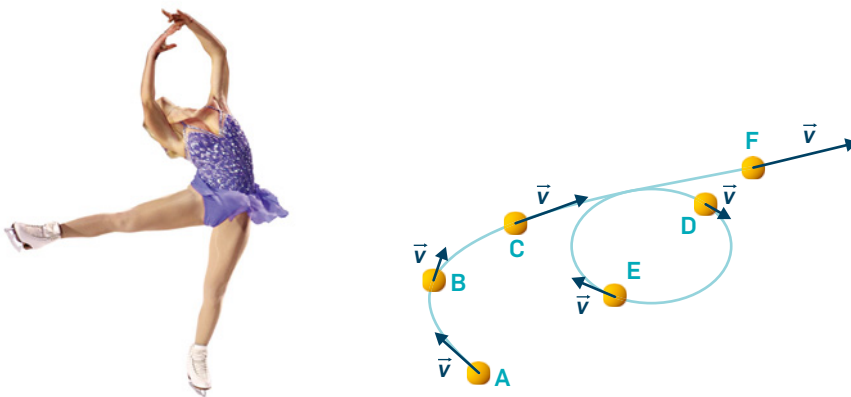
**+** QUESTÕES p. 65



## 1.1.3 Componentes tangencial e normal da aceleração

As variações da velocidade de um corpo são provocadas por forças, que são estudadas na **dinâmica**.

A variação da velocidade pode ocorrer em módulo ou em direção ou, no caso mais geral, como no movimento do centro de massa de uma patinadora (**Fig. 14**), simultaneamente em módulo e direção.



**Fig. 14** Movimento de uma patinadora e trajetória do seu centro de massa entre os pontos A e F, onde se notam variações da velocidade, tanto em módulo como em direção.

Relembremos o efeito da resultante das forças na velocidade (**Fig. 15**).

### Efeito da força resultante na velocidade do centro de massa de um corpo

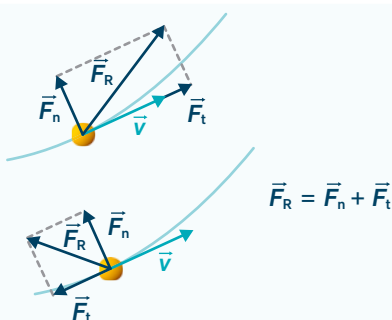
$\vec{F}_R$  tem a direção de  $\vec{v}$ :  
a trajetória é retilínea.  
O movimento será acelerado, se  $\vec{F}_R$  e  $\vec{v}$  tiverem o mesmo sentido, ou retardado se tiverem sentidos opostos.

$\vec{F}_R$  não tem a direção de  $\vec{v}$ :  
a trajetória é curvilínea.  
Se  $\vec{F}_R$  e  $\vec{v}$  forem perpendiculares, o movimento será uniforme; será acelerado se fizerem um ângulo inferior a  $90^\circ$ ; será retardado se esse ângulo for superior a  $90^\circ$ .

**Fig. 15** Efeito da força resultante na velocidade.

Num movimento curvilíneo, como o vetor aceleração está dirigido para o interior da curva, pela Segunda Lei de Newton,  $\vec{F}_R = m\vec{a}$ , concluímos que o mesmo acontece com o vetor força resultante,  $\vec{F}_R$ , pois este tem a direção e o sentido da aceleração. Por vezes, é conveniente decompor a força resultante em duas componentes (**Fig. 16**).

**Fig. 16** Componente tangencial e componente normal da força resultante e respetivos efeitos na variação da velocidade.



**Componente tangencial da força resultante,  $\vec{F}_t$** : tem a direção da velocidade (é tangente à trajetória), o mesmo sentido ou sentido oposto, e provoca uma variação no **módulo da velocidade**.

**Componente normal da força resultante,  $\vec{F}_n$**  (também designada por **força centrípeta,  $\vec{F}_c$** ): é normal (perpendicular) à velocidade, aponta para o centro da curva (é centrípeta), e provoca uma variação da **direção da velocidade**. Apenas existe nos movimentos curvilíneos, pois só nestes a direção da velocidade varia.

Note-se que a **força centrípeta não é uma força nova** que surge nos movimentos curvilíneos, mas simplesmente a componente normal da força resultante!

Como as variações da velocidade são descritas pela aceleração,  $\vec{a}$ , e atendendo à Segunda Lei de Newton, também podemos decompor a aceleração em duas componentes, a **componente tangencial**,  $\vec{a}_t$ , e a **componente normal**,  $\vec{a}_n$  (também designada por aceleração centrípeta,  $\vec{a}_c$ ):

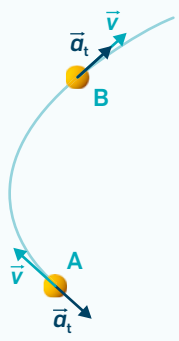
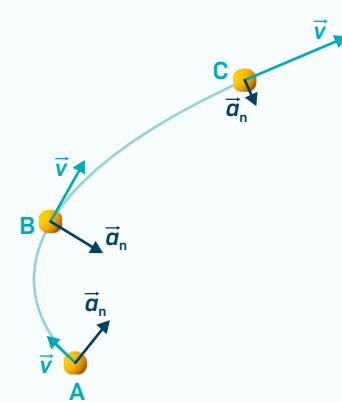
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Estas componentes relacionam-se com as componentes tangencial e normal da força resultante atendendo à Segunda Lei de Newton:

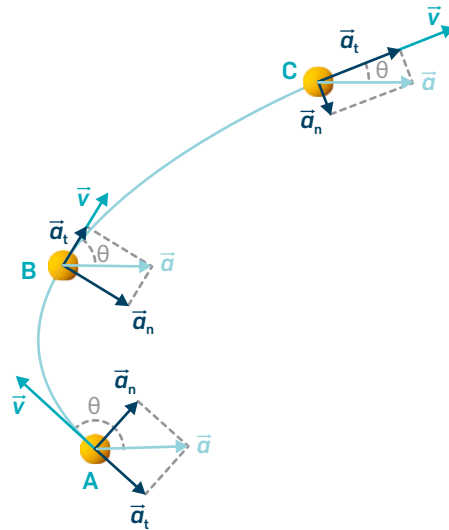
$$\vec{F}_t = m\vec{a}_t \quad \text{e} \quad \vec{F}_n = m\vec{a}_n$$

**Fig. 17** Características das componentes da aceleração e relação com tipos de movimentos.

Vejamos as características das componentes da aceleração e a sua relação com os tipos de movimentos (**Fig. 17**).

Componentes da aceleração	
<p><b>Componente tangencial da aceleração, <math>\vec{a}_t</math>:</b> relaciona-se com a variação do módulo da velocidade.</p> 	<p><b>Componente normal da aceleração, <math>\vec{a}_n</math></b> (ou componente centrípeta, <math>\vec{a}_c</math>): relaciona-se com a variação da direção da velocidade.</p> 
<p>Tem a direção da velocidade. Terá o sentido da velocidade se o movimento for acelerado (<b>B</b>) e sentido oposto se for retardado (<b>A</b>).</p>	<p>É perpendicular à velocidade e aponta para o interior da curva.</p>
<p>É tanto maior quanto mais rapidamente variar o módulo da velocidade.</p>	<p>É tanto maior quanto mais rapidamente variar a direção da velocidade (maior em <b>B</b> do que em <b>C</b>).</p>
<p>É diferente de zero desde que o módulo da velocidade varie, quer o movimento seja retilíneo ou curvilíneo.</p>	<p>É diferente de zero em movimentos curvilíneos, pois há variação da direção da velocidade.</p>
<p>É zero em movimentos uniformes, retilíneos ou curvilíneos, pois o módulo da velocidade é constante.</p>	<p>É zero em movimentos retilíneos, pois a direção da velocidade é constante.</p>
<p>Nos movimentos retilíneos, coincide com a aceleração: <math>\vec{a}_t = \vec{a}</math>.</p>	<p>Nos movimentos curvilíneos uniformes coincide com a aceleração: <math>\vec{a}_n = \vec{a}</math>.</p>

A **Fig. 18** representa, em três pontos da trajetória, o vetor velocidade e o vetor aceleração, assim como as respectivas componentes tangencial e normal.



**Fig. 18** A aceleração,  $\vec{a}$ , é a soma vetorial da componente tangencial,  $\vec{a}_t$ , e da componente normal,  $\vec{a}_n$ , em qualquer ponto da trajetória. A velocidade é sempre tangente à trajetória.

A **Fig. 18** permite concluir que, quando o movimento é retardado, como no ponto **A**, o ângulo  $\theta$  entre os vetores aceleração e velocidade é superior a  $90^\circ$ ; quando o movimento é acelerado, como nos pontos **B** e **C**, o ângulo  $\theta$  entre os vetores velocidade e aceleração é inferior a  $90^\circ$ .

No caso do movimento curvilíneo uniforme, como só há componente normal da aceleração, pois o módulo da velocidade é constante, o ângulo entre a velocidade e a aceleração tem de ser  $90^\circ$ .

Como se podem calcular cada uma destas componentes da aceleração?

A **componente tangencial da aceleração**, como mede a variação do módulo da velocidade num dado instante, é a derivada temporal do módulo da velocidade:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

A **Fig. 18** mostra que pode ainda ser calculada pela expressão:

$$a_t = a \cos \theta$$

Note-se que, se o ângulo  $\theta$  for maior do que  $90^\circ$ , a componente tangencial da aceleração será negativa, o que significa que o movimento será retardado.

A componente tangencial da aceleração permite classificar os movimentos em uniformes, uniformemente variados e variados (**Fig. 19**).

Movimentos uniformes	$a_t = 0$ (o módulo da velocidade não varia)
Movimentos uniformemente variados	$a_t = \text{constante}$ (o módulo da velocidade tem variação uniforme com o tempo)
Movimentos variados	$a_t \neq \text{constante}$ (o módulo da velocidade varia de forma não uniforme com o tempo)

### Componente tangencial da aceleração, $\vec{a}_t$ :

é a derivada temporal do módulo do vetor velocidade.

Não confundir com a aceleração,  $\vec{a}$ , que é a derivada temporal do vetor velocidade:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \neq \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

**Fig. 19** Classificação dos movimentos com base na componente tangencial da aceleração.

A componente normal da aceleração é dada pela expressão

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

em que o símbolo  $r$  representa o raio de curvatura (e não módulo da posição!).

A **Fig. 18** (página 21) mostra que a componente normal da aceleração pode também ser calculada pela expressão:

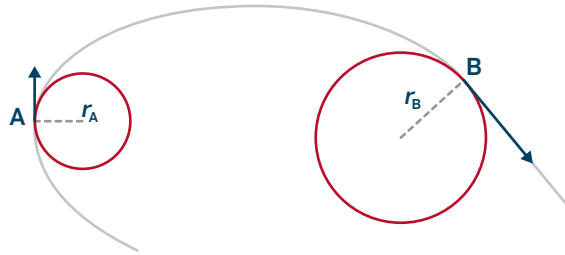
$$a_n = a \sin \theta$$

Mas o que é o raio de curvatura?

Numa trajetória circular, o raio de curvatura,  $r$ , coincide com o raio da circunferência. Nas outras curvas, para cada ponto define-se **raio de curvatura** como o raio do arco circular que mais se aproxima da curva nesse ponto (**Fig. 20**). O raio de curvatura é pequeno para curvas «fechadas» e grande para curvas «abertas», tendendo para infinito se a trajetória se aproximar de uma reta.

**Raio de curvatura:** está sempre a variar em trajetórias curvilíneas não circulares.

**Fig. 20** O raio de curvatura é menor numa curva mais apertada, como na posição **A**.



O raio de curvatura tem de ser considerado no desenho de certas estruturas. Por exemplo, para evitar grandes variações da aceleração, o que seria incómodo para os passageiros, não deve haver mudanças bruscas de curvatura nas linhas férreas (**Fig. 21**). Também os perfis das asas de um avião não devem ter mudanças bruscas de curvatura para que o ar se escoe facilmente ao longo das asas do avião.

A expressão da aceleração normal,  $\frac{v^2}{r}$ , indica que, quanto maior for a velocidade com que um automóvel descreve uma curva, maior será a sua aceleração normal.

Se a curva for apertada (menor raio), a aceleração normal também será maior para o mesmo valor da velocidade. Por isso, terá de ser maior a componente normal da força resultante (força centrípeta), que é a força de atrito, como veremos. Se essa força não for suficientemente intensa, o automóvel não descreverá a curva.

Assim, também no projeto de estradas se tem em conta o raio de curvatura e as velocidades adequadas à segurança rodoviária.



**Fig. 21** As linhas férreas devem ter curvaturas adequadas.

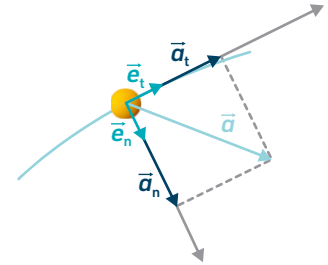
Como as componentes tangencial e normal da aceleração permitem interpretar o tipo de movimento, é conveniente definir dois eixos perpendiculares com origem na partícula, um com a direção da velocidade (eixo tangencial) e outro com a direção perpendicular e dirigido para o centro de curvatura (eixo normal), cujos vetores unitários são, respetivamente,  $\vec{e}_t$  e  $\vec{e}_n$ .

Neste sistema de eixos ligado à partícula, e que a acompanha (Fig. 22), a expressão do vetor aceleração é:

$$\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n$$

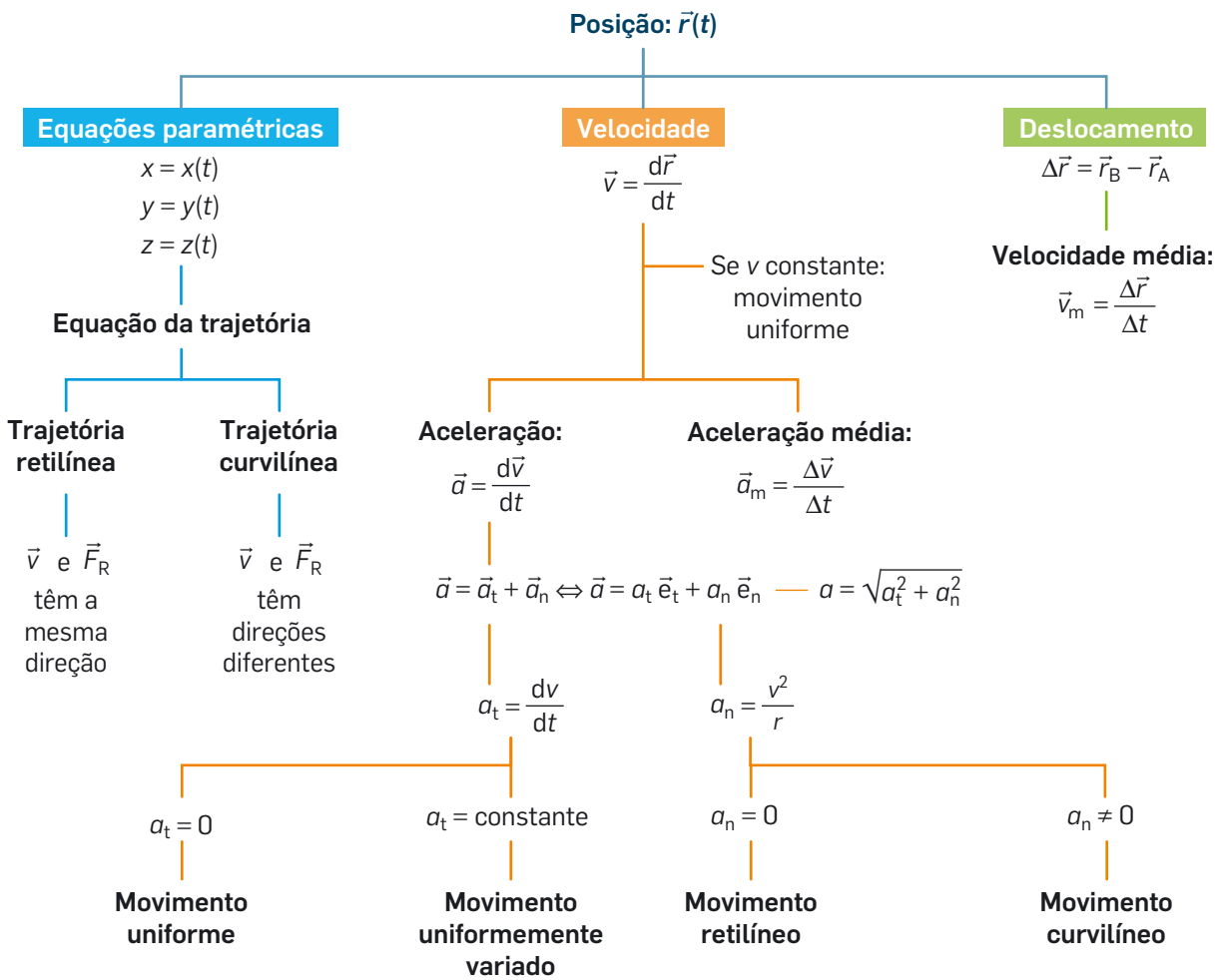
sendo o respetivo módulo dado por:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



**Fig. 22** Eixos tangencial e normal ligados a uma partícula e componentes tangencial e normal da aceleração.

As grandezas estudadas e as suas relações estão esquematizadas na Fig. 23.



**Fig. 23** Grandezas que descrevem um movimento e relações entre elas.

### Questão resolvida 5



Uma bola atirada num plano inclinado moveu-se, relativamente a um sistema de eixos, de acordo com as seguintes equações paramétricas:

$$x = 0,02 + 0,17t - 0,030t^2 \text{ e } y = 0,04 + 0,31t - 0,12t^2 \text{ (SI)}$$

- a) Determine as componentes escalares da velocidade e da aceleração no instante  $t = 0,6$  s.
- b) Apresente um esboço dos vetores velocidade e aceleração no instante  $t = 0,6$  s. Use um sistema de eixos paralelo ao inicial com origem na posição da bola nesse instante. Conclua qual foi o tipo de movimento da bola nesse instante.

- c) Partindo da determinação do ângulo entre a velocidade e a aceleração, calcule as componentes tangencial e normal da aceleração.
- d) Determine o raio de curvatura da trajetória da bola para o instante  $t = 0,6$  s.
- e) Visualize o gráfico do módulo da velocidade na calculadora gráfica. Usando as funções para cálculo da derivada num ponto, determine a componente tangencial da aceleração no instante  $t = 1,2$  s. Calcule ainda a componente normal da aceleração.



- a) As componentes escalares da velocidade calculam-se derivando em ordem ao tempo as respetivas equações paramétricas:

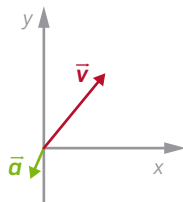
$$v_x = \frac{dx}{dt} = 0,17 - 0,060t \Rightarrow \\ \Rightarrow v_x(0,6) = 0,17 - 0,06 \times 0,6 = 0,134 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 0,31 - 0,24t \Rightarrow \\ \Rightarrow v_y(0,6) = 0,31 - 0,24 \times 0,6 = 0,166 \text{ m s}^{-1}$$

Derivando as expressões das componentes da velocidade obtêm-se as componentes da aceleração:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0,060 \text{ m s}^{-2} \text{ e } a_y = \frac{dv_y}{dt} = -0,24 \text{ m s}^{-2}$$

- b) O ângulo entre a velocidade e a aceleração é superior a  $90^\circ$ , pelo que, neste instante, o movimento da bola é curvilíneo e retardado.



- c) Podem calcular-se os ângulos que a velocidade e aceleração fazem com um dos eixos e depois o ângulo que a aceleração e a velocidade fazem entre si. Assim:

- ângulo que a aceleração faz com o eixo dos yy:

$$\tan \alpha = \frac{a_x}{a_y} = \frac{-0,06}{-0,24} = 0,25 \Rightarrow \alpha = 14^\circ$$

- ângulo que a velocidade faz com o eixo dos xx:

$$\tan \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{0,166}{0,134} = 1,24 \Rightarrow \beta = 51^\circ$$

- ângulo entre a aceleração e a velocidade:

$$\theta = 14 + 51 + 90 = 155^\circ$$

$$a_t = a \cos \theta = \sqrt{0,06^2 + 0,24^2} \times \cos 155^\circ = -0,22 \text{ m s}^{-2}$$

$$a_n = a \sin \theta = \sqrt{0,06^2 + 0,24^2} \times \sin 155^\circ = 0,10 \text{ m s}^{-2}$$

Ou, aplicando o produto escalar aos vetores velocidade e aceleração, vem:

$$\cos \theta = \frac{a_x \times v_x + a_y \times v_y}{a \times v} \\ = \frac{-0,06 \times 0,134 + (-0,24) \times 0,166}{\sqrt{0,06^2 + 0,24^2} \times \sqrt{0,134^2 + 0,166^2}} = -0,91 \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta = 155^\circ$$

$$d) a_n = \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow 0,10 = \frac{0,134^2 + 0,166^2}{r} \Rightarrow r = 0,46 \text{ m}$$

- e) (Com TI 84) Pressionando **Y=**, introduz-se na calculadora a expressão  $v = \sqrt{(0,17 - 0,060t)^2 + (0,31 - 0,24t)^2}$ . Em seguida, pressionando **2nd Calc**, seleciona-se a opção **6:dy/dx** e o instante 1,2 s. O valor da derivada  $\left(\frac{dv}{dt}\right)$  dá a componente tangencial da aceleração:  $-0,11 \text{ m s}^{-2}$ .

Usando a expressão  $a^2 = a_t^2 + a_n^2$ , calcula-se a componente normal da aceleração:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{(0,060^2 + 0,24^2) - (-0,11)^2} = 0,28 \text{ m s}^{-2}$$

### Questão resolvida 6

Ver Anexo 2, página 273





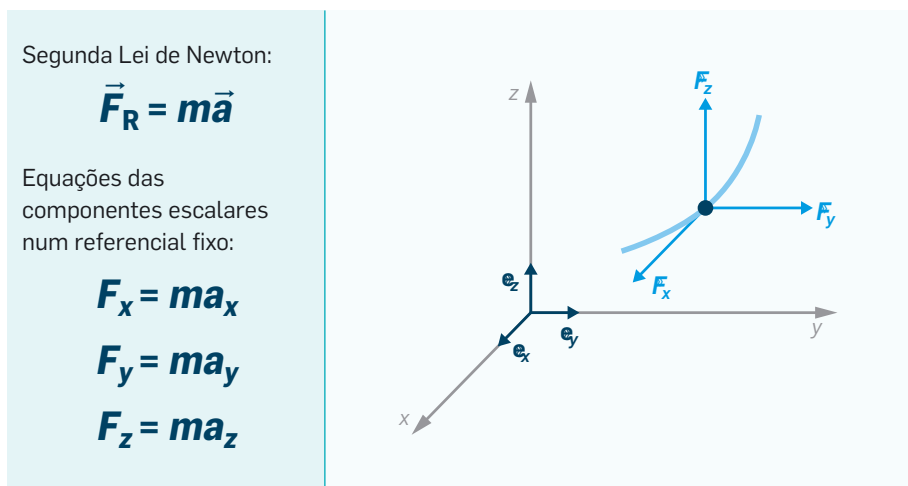
## 1.1.4 Segunda Lei de Newton em referenciais fixos e ligados à partícula

As expressões que envolvem vetores são válidas para diferentes referenciais. Por este motivo, o referencial escolhido deverá ser o que simplifica o estudo de cada sistema físico. Assim, a expressão da Segunda Lei de Newton  $\vec{F}_R = m\vec{a}$  pode ser escrita para um referencial fixo ou para um referencial ligado a uma partícula, conforme a conveniência.

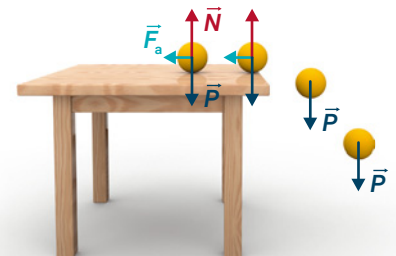
Num referencial cartesiano fixo, cujos vetores unitários são  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  e  $\vec{e}_z$ , a Segunda Lei de Newton pode ser escrita usando as componentes escalares da força resultante,  $\vec{F}_R$ , e da aceleração  $\vec{a}$ . A equação vetorial será

$$F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = ma_x \vec{e}_x + ma_y \vec{e}_y + ma_z \vec{e}_z$$

que é equivalente a um conjunto de equações escalares (Fig. 24).



**Fig. 24** Segunda Lei de Newton e respectivas equações escalares num referencial fixo.



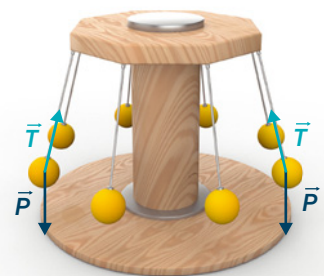
**Fig. 25** Corpo sujeito a forças de direção constante.

Numa situação concreta, as equações escalares serão apenas uma ou duas, se o movimento for a uma ou a duas dimensões, respetivamente.

O uso de um referencial fixo é conveniente quando as forças têm direção constante, como um objeto que rola numa mesa e acaba por cair dela (Fig. 25).

Mas, se as forças variarem em direção, como no caso de um corpo que descreve trajetórias circulares (Fig. 26), as projeções das forças poderão ser dadas por expressões complicadas usando um referencial fixo.

Se a partícula descrever uma trajetória curvilínea será mais simples utilizar um **referencial ligado à partícula**, isto é, um referencial cuja origem está na partícula e que se move com ela. Então, escolhamos o eixo definido pelo vetor unitário  $\vec{e}_t$  (eixo tangencial) e o eixo definido pelo vetor unitário  $\vec{e}_n$  (eixo normal); o eixo perpendicular ao plano definido por aqueles dois vetores será definido pelo vetor unitário  $\vec{e}_z$  (Fig. 27, página 26).



**Fig. 26** Corpo sujeito a uma força de direção variável.



Designemos as componentes escalares da força resultante por  $F_t$ ,  $F_n$  e  $F_z$  neste sistema de eixos. Atendendo à expressão da aceleração,

$$\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n$$

a Segunda Lei de Newton,  $\vec{F}_R = m\vec{a}$ , pode escrever-se

$$F_t \vec{e}_t + F_n \vec{e}_n + F_z \vec{e}_z = ma_t \vec{e}_t + ma_n \vec{e}_n$$

que é equivalente a um conjunto de equações escalares (**Fig. 27**).

**Fig. 27** Segunda Lei de Newton e respetivas equações escalares num referencial ligado à partícula. Na coluna da direita indica-se o sistema de eixos fixo e o sistema de eixos ligado à partícula.

Segunda Lei de Newton:

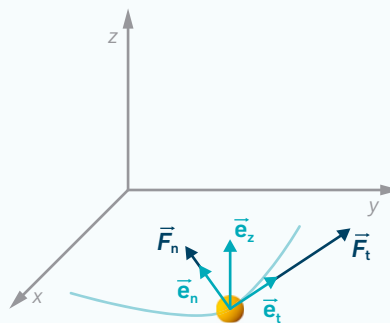
$$\vec{F}_R = m \vec{a}$$

Equações das componentes escalares num referencial ligado à partícula:

$$F_t = m a_t$$

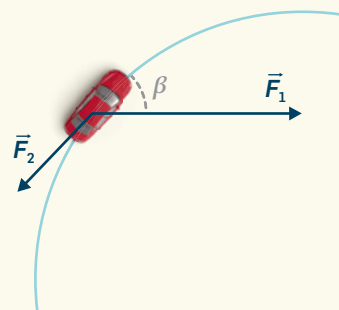
$$F_n = m a_n$$

$$F_z = 0$$



### Questão resolvida 7

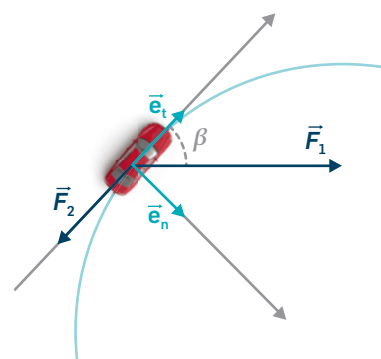
Um automóvel descreve uma curva numa pista circular. A figura mostra as forças aplicadas no seu centro de massa, para além do peso e da força normal que a estrada exerce sobre ele. Escreva a expressão da componente tangencial e da componente normal da força resultante. Nota: Usámos a expressão «normal» com dois significados. Quando falamos em força normal da estrada sobre o automóvel, trata-se da força vertical que a estrada exerce sobre o automóvel. A força normal é também perpendicular à trajetória.



Consideremos as direções tangencial e normal (a primeira tangente à trajetória com o sentido do movimento e a segunda dirigida para o centro da curva) e um eixo perpendicular ao plano da estrada a apontar para cima, com a direção do peso e da força normal. A força resultante pode ser escrita  $\vec{F}_R = F_t \vec{e}_t + F_n \vec{e}_n$ .

Determinando as projeções das forças ao longo dessas três direções, obtemos:

$$F_t = F_1 \cos \beta - F_2, \quad F_n = F_1 \sin \beta \quad \text{e} \quad F_z = P - N = 0$$



## 1.1.5 Movimentos sob a ação de uma força resultante constante

No 11.º ano estudámos movimentos retilíneos de corpos sobre os quais atuavam forças constantes.

Vamos agora estudar movimentos de corpos atuados também por forças constantes, mas cujas trajetórias são curvilíneas. São exemplos movimentos do nosso dia a dia tais como os dos centros de massa de atletas em atividades desportivas (**Fig. 28**) ou de objetos que são lançados.

Um corpo no qual atua uma mesma força resultante pode adquirir movimentos com trajetórias diferentes. A razão está no facto de, apesar de a força resultante ser a mesma, as condições iniciais – ou seja, a posição e a velocidade iniciais – serem diferentes.

Vejamus o exemplo de uma bola que roda, presa a um fio, numa trajetória circular num plano vertical. Suponhamos desprezável a resistência do ar. Se o fio romper, como a bola tem uma certa velocidade no instante da rutura, ela passará a ter um movimento em queda livre pois a única força que nela atua será o seu peso. Contudo, a forma da trajetória que a bola descreverá vai depender da posição no instante de rutura do fio, pois em diferentes posições existirão diferentes velocidades do centro de massa da bola, como se mostra na **Fig. 29**.

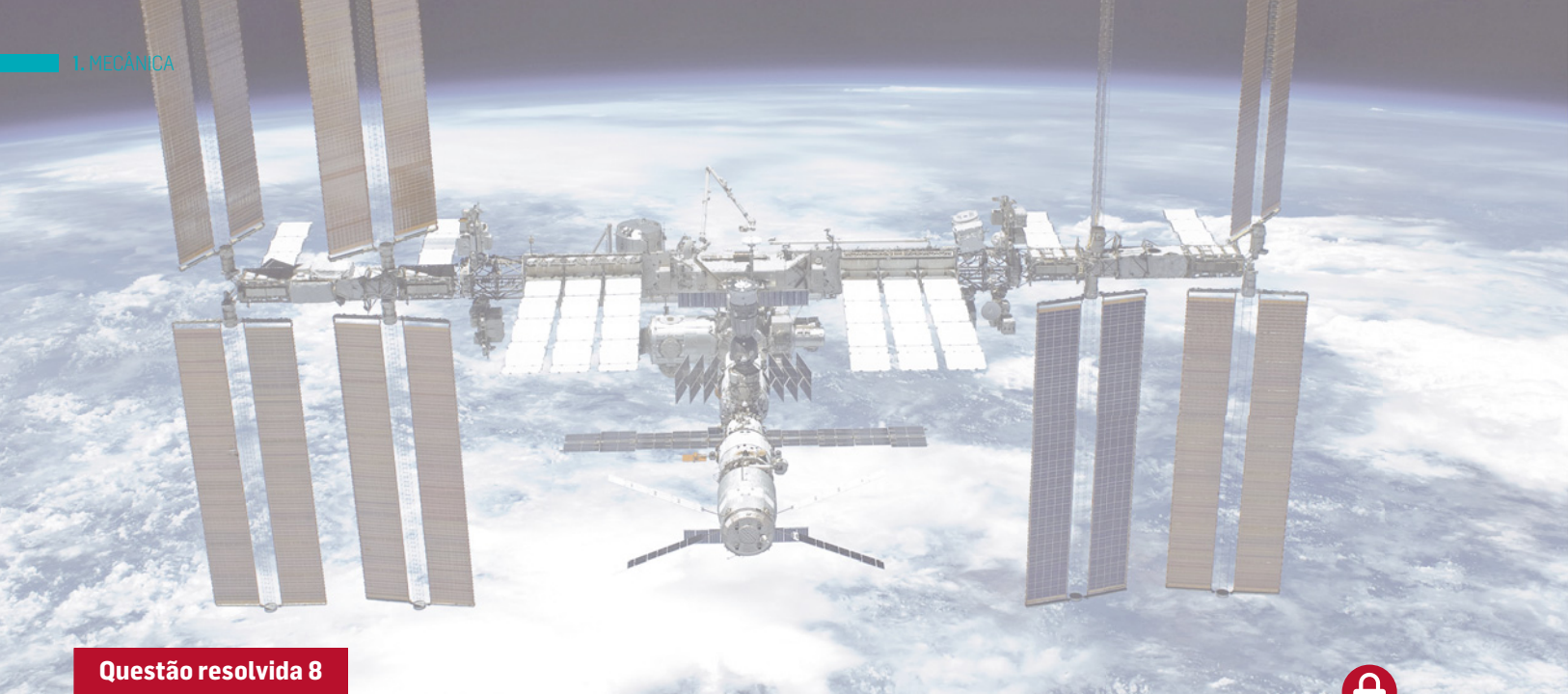
Note-se que corpos com a mesma velocidade inicial mas sujeitos a uma força resultante diferente também descrevem trajetórias diferentes, ou seja, a trajetória depende simultaneamente da força resultante e da posição e velocidade iniciais.



**Fig. 28** Imagem estroboscópica de uma atleta num salto: o centro de massa, sujeito a uma força constante (peso), descreve uma trajetória curvilínea.

As condições iniciais (posição e velocidade) e a força resultante definem a forma da trajetória		
Rutura do fio na posição A:	Rutura do fio na posição B:	Rutura do fio na posição C:
A velocidade inicial da bola tem direção horizontal e o seu peso tem direção vertical: a trajetória em queda livre é curvilínea.	A velocidade inicial da bola tem direção oblíqua e o seu peso tem direção vertical: a trajetória em queda livre é curvilínea.	A velocidade inicial da bola tem direção vertical, tal como o seu peso: a trajetória em queda livre é retilínea.

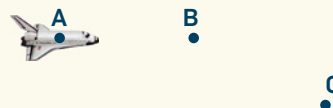
**Fig. 29** Importância das condições iniciais na forma da trajetória.



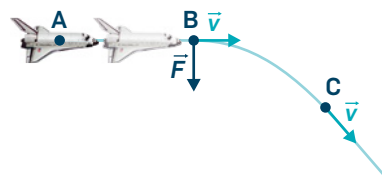
### Questão resolvida 8



Uma nave espacial move-se no espaço, na ausência de interações gravíticas, com movimento retilíneo e uniforme entre duas posições **A** e **B**. Em **B**, ligam-se os motores, sendo a força resultante perpendicular à trajetória inicial, e a nave move-se até uma posição **C** como mostra a figura. A partir de **C**, os motores são novamente desligados. Esboce a trajetória do veículo entre **B** e **C** e a partir de **C**. Fundamente a sua resposta.



O movimento é retilíneo e uniforme entre **A** e **B**, pois a resultante das forças é nula (os motores estão desligados). Em **B** a nave tem a velocidade representada na figura, perpendicular à força propulsora dos motores. Como a trajetória encurva para **C**, a força resultante tem, necessariamente, de ser dirigida para baixo. Como a força não tem a direção da velocidade, a trajetória deve ser curvilínea entre **B** e **C**. A partir de **C** a força resultante passa a ser nula (os motores são desligados) e, pela Primeira Lei de Newton, a nave passa a mover-se com velocidade constante (trajetória retilínea).



Para obter as equações paramétricas do movimento de um corpo sujeito a uma força resultante constante recorreremos à Segunda Lei de Newton e às equações gerais de movimento, conhecidas a posição e a velocidade iniciais.

Como a força resultante é constante, as suas componentes escalares também o são. Se uma componente escalar for nula, o movimento será uniforme na direção correspondente; se não for, o movimento será uniformemente variado nessa direção, uma vez que a aceleração será constante.

Estudaremos apenas movimentos planos (duas dimensões) de corpos sujeitos a forças resultantes constantes. Num referencial fixo  $xOy$ , sejam  $F_x$  e  $F_y$  as componentes escalares da força resultante,  $v_{0x}$  e  $v_{0y}$  as componentes escalares da velocidade inicial, e  $x_0$  e  $y_0$  as componentes escalares da posição inicial. As componentes escalares da aceleração são  $a_x$  e  $a_y$ . A Fig. 30 mostra como se obtêm as equações paramétricas desses movimentos planos.

## Equações paramétricas de movimentos se a força resultante for constante

Grandezas	Movimento no eixo dos xx	Movimento no eixo dos yy
Aceleração	$a_x = \frac{F_x}{m} = \text{constante}$	$a_y = \frac{F_y}{m} = \text{constante}$
Velocidade	$v_x = v_{0x} + a_x t$	$v_y = v_{0y} + a_y t$
Posição	$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$

**Fig. 30** Equações paramétricas de movimentos de corpos sob a ação de uma força resultante constante.

Uma boa escolha do sistema de eixos facilita a escrita destas equações. Por regra, o mais simples é escolher um eixo com a direção da velocidade ou com a direção da força resultante.

A resolução do sistema de equações paramétricas permite concluir que um movimento plano de uma partícula sob a ação de uma força resultante constante faz-se ao longo de uma **trajetória parabólica**.

**Trajétória parabólica:** trajetória descrita pelo centro de massa de um corpo sob a ação de uma força resultante constante.

## Questão resolvida 9



Um objeto de 500 g desliza sobre o tampo de uma mesa horizontal onde o atrito é desprezável. Quando se encontra na posição  $\vec{r} = 2,0 \vec{e}_x + 3,0 \vec{e}_y$  (SI), num referencial ligado ao tampo da mesa, e a velocidade é  $2,0 \text{ m s}^{-1}$  dirigida no sentido positivo do eixo dos xx, fica sujeita a uma força

constante de 10 N que faz  $30^\circ$  com a velocidade. Indique as equações paramétricas do movimento após a força começar a atuar e determine o módulo da velocidade ao fim de 1,0 s da atuação da força.



Antes de a força começar a atuar, como o peso e a força normal se anulam, a trajetória era retilínea e o movimento uniforme, com o módulo da velocidade  $2,0 \text{ m s}^{-1}$ . Depois, a força passou a ser a força resultante; a trajetória passou a ser parabólica, pois a força resultante é constante e não tem a direção da velocidade inicial. E, como a força tem de apontar para o interior da trajetória, o corpo descreve a trajetória da figura.

Componentes escalares da força resultante:

$$F_x = F \cos 30^\circ \text{ e } F_y = F \sin 30^\circ$$

Componentes escalares da aceleração:

$$a_x = \frac{F \cos 30^\circ}{m} = 17 \text{ m s}^{-2} \text{ e } a_y = \frac{F \sin 30^\circ}{m} = 10 \text{ m s}^{-2}$$

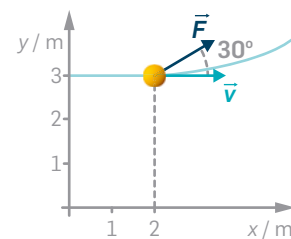
(movimentos uniformemente variados nas direções x e y).

Componentes escalares da posição inicial:

$$x_0 = 2,0 \text{ m e } y_0 = 3,0 \text{ m}$$

Componentes escalares da velocidade inicial:

$$v_{0x} = 2,0 \text{ m s}^{-1} \text{ e } v_{0y} = 0 \text{ m s}^{-1}$$



Substituindo nas equações

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \text{ e } y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

e derivando em ordem ao tempo, obtém-se, no SI:

$$x = 2,0 + 2,0t + 8,5t^2 \text{ e } y = 3,0 + 5,0t^2$$

$$v_x = 2,0 + 17t \text{ e } v_y = 10t$$

Para  $t = 1,0 \text{ s}$ :

$$v_x = 19 \text{ m s}^{-1}, v_y = 10 \text{ m s}^{-1} \text{ e } v = \sqrt{19^2 + 10^2} = 21 \text{ m s}^{-1}$$





**Fig. 31** Exemplos de projéteis.



**Fig. 32** Movimento curvilíneo de um projétil: composição de um movimento horizontal uniforme e de um movimento vertical uniformemente variado.

Um caso particular de um corpo sujeito a uma força constante é um corpo apenas sujeito ao seu peso, a que chamamos vulgarmente **projétil**.

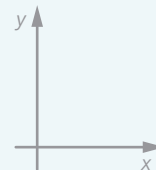
Um projétil também está sujeito à resistência do ar, mas analisaremos apenas exemplos em que essa resistência é desprezável, ou seja, movimentos de queda livre. É o caso de movimentos de pequenos corpos que são lançados, como uma bola ou chispas numa soldadura, ou os movimentos do centro de massa de corpos maiores, como os saltos de pessoas e animais (**Fig. 31**).

Consideremos os casos em que a velocidade inicial não tem a direção do peso (não é vertical), ou seja, em que a trajetória é curvilínea.

Como só existe força resultante na direção vertical – o peso –, a aceleração vai ter essa direção. Neste caso, é mais simples descrever o movimento segundo as direções horizontal e vertical e obter as respetivas equações paramétricas num dado referencial fixo (**Fig. 32**).

**Movimento de um projétil em queda livre com trajetória curvilínea**

- Direção horizontal:  $F_x = ma_x \Rightarrow a_x = 0$   
movimento uniforme:  $x = x_0 + v_{0x}t$
- Direção vertical:  $F_y = ma_y \Rightarrow a_y = \frac{-P}{m} = -g$   
movimento uniformemente variado:  $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

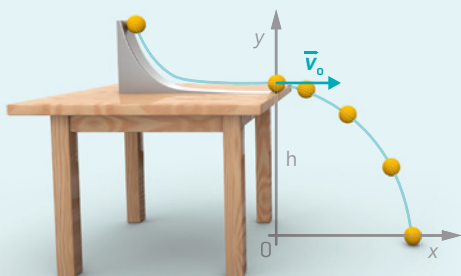


Concretizemos para dois movimentos comuns: o lançamento horizontal e o lançamento oblíquo.

Num **lançamento horizontal** o projétil tem velocidade inicial horizontal. É o caso de uma bola que cai quando lançada do tampo de uma mesa.

Na **Fig. 33** escrevem-se as equações paramétricas do movimento no referencial indicado e as componentes escalares da velocidade, e representam-se imagens estroboscópicas do movimento.

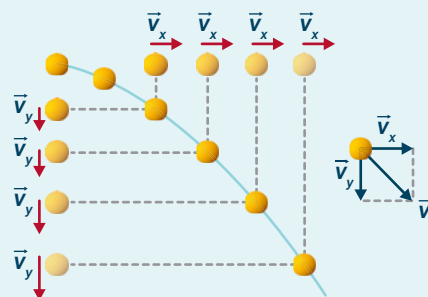
**Lançamento horizontal:** projétil com velocidade inicial horizontal.



$a_x = 0$  e  $a_y = -g$

**Condições iniciais:**  
 $x_0 = 0$  e  $y_0 = h$   
 $v_{0x} = v_0$  e  $v_{0y} = 0$

**Equações:**  
 $x(t) = v_0t$  e  $y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$   
 $v_x = v_0$  e  $v_y(t) = -gt$   
 sendo  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$



Direção horizontal: movimento uniforme.  
 Direção vertical: movimento uniformemente acelerado.

**Fig. 33** Lançamento horizontal.

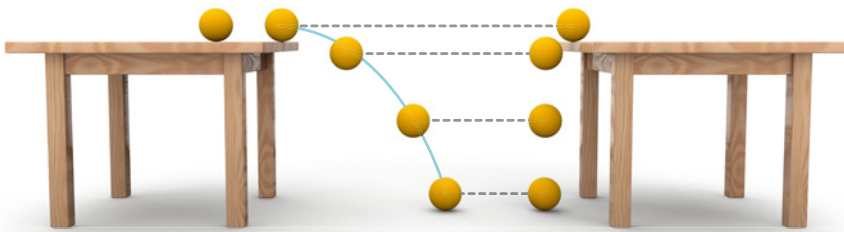
Note-se que a componente escalar vertical aumenta pois o movimento é uniformemente acelerado nesta direção, enquanto a componente escalar horizontal se mantém pois o movimento é uniforme na direção horizontal.

Se eliminarmos a variável  $t$  nas equações paramétricas, obteremos a equação da trajetória,  $y = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$ , que é a equação de uma parábola.

O **tempo de queda** obtém-se da equação  $y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$  fazendo  $y = 0$ :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Esta expressão mostra que o tempo de queda depende da altura de queda,  $h$ , mas não da velocidade inicial,  $v_0$ . Por isso, uma bola lançada horizontalmente ou deixada cair da mesma altura demora o mesmo tempo a atingir o solo, pois os movimentos na direção vertical são iguais (**Fig. 34**): a componente escalar vertical da posição, em cada instante, é a mesma.



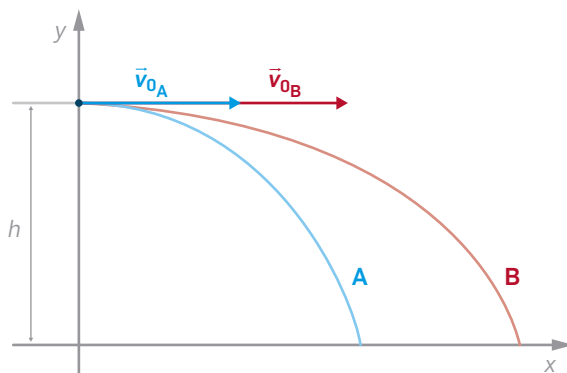
**Tempo de queda no lançamento horizontal:** só depende da altura de onde o corpo é lançado; não depende da velocidade inicial.

**Fig. 34** O tempo de queda de uma bola lançada ou deixada cair da mesma altura é igual (sem resistência do ar).

O **alcance do projétil**, que é a distância máxima percorrida horizontalmente, obtém-se substituindo o tempo de queda na equação  $x(t) = v_0t$ , obtendo-se:

$$x_{\text{máx}} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Esta expressão permite concluir que, para a mesma altura de queda, quanto maior for a velocidade inicial maior será o alcance (**Fig. 35**).



**Alcance do projétil:** distância máxima percorrida horizontalmente.

**Fig. 35** Num lançamento horizontal, o alcance será tanto maior quanto maior for a velocidade inicial para a mesma altura de queda.

Note-se que as equações apresentadas só são válidas no referencial indicado! Mudando o referencial, mudam os valores numéricos das equações. Por isso, é sempre necessário indicar o referencial usado na resolução de um problema.

### Questão resolvida 10



Uma carrinha de caixa aberta transporta um caixote quando trava bruscamente. O caixote cai do estrado da carrinha, que está a 1,0 m do solo, com uma velocidade horizontal cujo módulo é  $8,0 \text{ m s}^{-1}$ .

Determine, para o movimento do centro de massa do caixote:

- a) a equação da trajetória;                      c) o módulo da velocidade ao atingir o solo.  
b) o alcance;



a) Consideremos um referencial ligado ao solo e com origem neste, com o eixo dos  $xx$  dirigido no sentido do movimento do caixote e o eixo dos  $yy$  dirigido para cima. Neste caso tem-se, no SI:

$$a_x = 0 \text{ e } a_y = -g; \quad x_0 = 0 \text{ e } y_0 = 1,0 \text{ m}; \quad v_{0x} = 8,0 \text{ m s}^{-1} \text{ e } v_{0y} = 0$$

As equações paramétricas são  $x = 8,0t$  e  $y = 1,0 - 5t^2$ . Extraíndo o valor de  $t$  da primeira equação e substituindo na segunda obtém-se  $y = 1,0 - 5\left(\frac{x}{8,0}\right)^2$  (parábola).

b) Quando chega ao solo,  $y = 0$ , ou seja,  $0 = 1,0 - 5t^2 \Leftrightarrow t = 0,45 \text{ s}$ . O alcance é  $x = 8,0 \times 0,45 = 3,6 \text{ m}$ .

c) Derivando as equações paramétricas, obtém-se  $v_x = \frac{dx}{dt} = 8,0 \text{ m s}^{-1}$  e  $v_y = \frac{dy}{dt} = -10t$ . Quando atinge o solo:  $v_x = 8,0 \text{ m s}^{-1}$ ,  $v_y(0,45) = -10 \times 0,45 = -4,5 \text{ m s}^{-1}$ , sendo o módulo da velocidade  $9,2 \text{ m s}^{-1}$ .



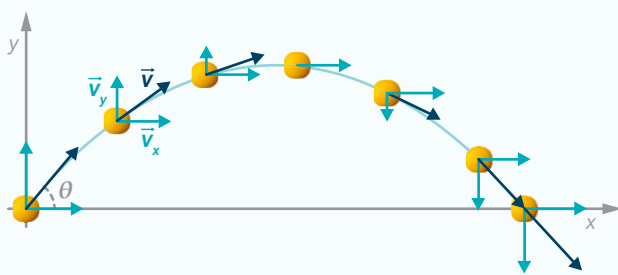
Fig. 36 Imagem estroboscópica de uma bola lançada obliquamente.

Consideremos agora o **lançamento oblíquo** de um projétil, ou seja, aquele em que a velocidade inicial é oblíqua, fazendo um certo ângulo,  $\theta$ , com a direção horizontal. É o caso do movimento da bola da Fig. 36.

Ao contrário do lançamento horizontal, neste lançamento a velocidade inicial tem duas componentes, uma horizontal e outra vertical.

A Fig. 37 mostra o esquema do movimento e respetiva imagem estroboscópica, e escrevem-se as equações paramétricas do movimento no referencial indicado, assim como as componentes escalares da velocidade.

Fig. 37 Lançamento oblíquo.



Direção horizontal: movimento uniforme.  
Direção vertical: movimento uniformemente retardado na subida e movimento uniformemente acelerado na descida.

$$a_x = 0 \text{ e } a_y = -g$$

**Condições iniciais:**

$$x_0 = 0 \text{ e } y_0 = 0$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \text{ e } v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

**Equações**

$$x(t) = v_0 \cos \theta t \text{ e } y(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_x = v_0 \cos \theta \text{ e } v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

$$\text{sendo } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Como mostra a **Fig. 37**, o módulo da componente escalar vertical da velocidade,  $v_y$ , diminui na subida e aumenta na descida, anulando-se no ponto de altura máxima. Fazendo  $v_y = 0$  na equação  $v_y = v_0 \sin \theta - gt$  obtém-se o tempo de subida do projétil:

$$t_{\text{subida}} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

Consideremos o caso particular de um projétil que regressa ao plano horizontal de onde foi lançado. O tempo de subida é igual ao tempo de descida, por isso o **tempo de voo** – tempo que o projétil permanece no ar – é o dobro do tempo de subida:

$$t_{\text{voo}} = 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

Podemos determinar uma expressão para a altura máxima: substitui-se o tempo de subida,  $t_{\text{subida}} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$ , na equação  $y(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} gt^2$  e obtém-se:

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Também se determina uma expressão para o alcance do projétil substituindo o tempo de voo,  $t_{\text{voo}} = 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g}$ , na equação  $x(t) = v_0 \cos \theta t$ , obtendo-se

$$A = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

As expressões anteriores permitem-nos tirar algumas conclusões para este tipo de projétil (**Fig. 38**).

**Tempo de voo:** tempo em que o projétil permanece em queda livre.

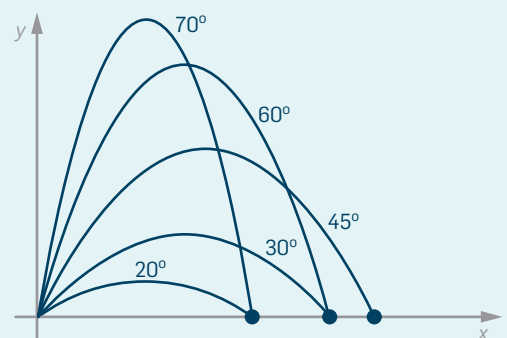
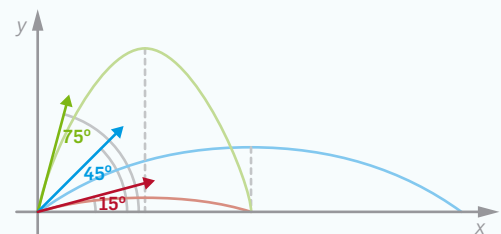
### Projétil lançado obliquamente que sai e regressa ao mesmo plano horizontal

Para a mesma velocidade inicial,  $v_0$ :

- a altura máxima,  $y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$ , aumenta com o ângulo de lançamento  $\theta$ ;
- o tempo de voo,  $t_{\text{voo}} = 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g}$ , aumenta com o ângulo de lançamento  $\theta$ .

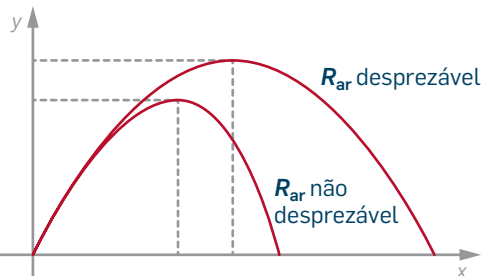
O alcance,  $A = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ :

- tem o valor máximo quando  $\sin 2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$ , ou seja, para o ângulo de lançamento de  $45^\circ$ ;
- é igual para ângulos de lançamento complementares (isto é, cuja soma é  $90^\circ$ ): por exemplo,  $20^\circ$  e  $70^\circ$ , ou  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , pois o seno toma o mesmo valor.



**Fig. 38** Alcance, altura máxima e tempo de voo num lançamento oblíquo em que a partícula sai e regressa ao mesmo plano horizontal.





**Fig. 39** Lançamento oblíquo quando a resistência do ar não é desprezável: a trajetória não é parabólica.

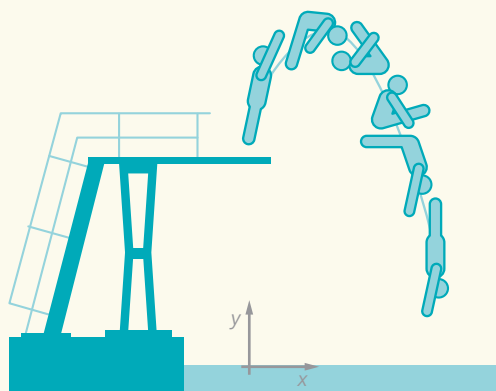
Quando os efeitos da resistência do ar não são desprezáveis, as trajetórias deixam de ser parabólicas e tanto o alcance como a altura máxima são inferiores aos correspondentes valores sem resistência do ar (**Fig. 39**).

Também o ângulo para o alcance máximo deixa de ser  $45^\circ$ : por exemplo, no caso de uma bola de golfe, onde o efeito da resistência do ar não é desprezável, o alcance máximo ocorre para o ângulo de lançamento de  $38^\circ$ .

### Questão resolvida 11



Uma nadadora salta de uma prancha, situada a 3,0 m do nível da água, com uma velocidade de módulo  $5,0 \text{ m s}^{-1}$  e segundo um ângulo de  $14^\circ$  com a direção vertical.



Para o movimento do centro de massa da nadadora, que se situa inicialmente a 1,2 m acima da prancha, determine:

- o tempo que demora a atingir a altura máxima e o valor dessa altura relativamente ao nível da água da piscina;
- o tempo de descida e o alcance;
- o módulo da velocidade ao chegar à água;
- em qual dos instantes,  $t = 0,40 \text{ s}$  ou  $t = 1,0 \text{ s}$ , a velocidade varia mais rapidamente em direção e em módulo;
- o raio de curvatura da trajetória para  $t = 1,0 \text{ s}$ .



a) No referencial da figura e em unidades SI temos:

$$a_x = 0 \text{ e } a_y = -10 \text{ m s}^{-2};$$

$$x_0 = 0 \text{ e } y_0 = 4,2 \text{ m}; v_{0x} = 5,0 \sin 14^\circ = 1,21 \text{ m s}^{-1} \text{ e } v_{0y} = 5,0 \cos 14^\circ = 4,85 \text{ m s}^{-1}.$$

$$\text{Equações paramétricas: } x = 1,21t \text{ e } y = 4,2 + 4,85t - 5,0t^2.$$

Derivando cada uma delas em ordem ao tempo, obtém-se  $v_x = 1,21 \text{ m s}^{-1}$  e  $v_y = 4,85 - 10t$ .

Na altura máxima  $v_y = 0 \Rightarrow t = 0,485 \text{ s}$  e  $y(0,485) = 5,4 \text{ m}$ .

(continua)

(continuação)

**b)** Tempo de descida = tempo de voo – tempo de subida. O tempo de voo calcula-se a partir da condição  $y = 0$ , ou seja, quando a nadadora chega à água:  $0 = 4,2 + 4,85t - 5,0t^2 \Leftrightarrow t = 1,52$  s. Por isso, o tempo de descida foi 1,04 s. O alcance é a coordenada  $x$  no instante em que a nadadora atinge a água:  $x(1,52) = 1,8$  m.

**c)** Ao chegar à água, como  $t = 1,52$  s, vem  $v_x = 1,21$  m s<sup>-1</sup> e  $v_y(1,52) = -10,4$  m s<sup>-1</sup>, pelo que o módulo da velocidade é  $v(1,52) = \sqrt{1,21^2 + (-10,4)^2} = 10,5$  m s<sup>-1</sup>.

**d)** A velocidade varia mais rapidamente em módulo no instante em que a componente tangencial da aceleração é maior. O módulo da velocidade é  $v(t) = \sqrt{1,21^2 + (4,85 - 10t)^2}$  e como  $a_t = \frac{dv}{dt}$ , traçando o gráfico de  $v(t)$  e calculando a derivada nos referidos instantes, obtém-se  $a_t(0,40) = -5,7$  m s<sup>-2</sup> e  $a_t(1,0) = 9,7$  m s<sup>-2</sup> (processo que pode ser feito na calculadora gráfica). Conclui-se que a velocidade varia mais rapidamente em módulo no instante  $t = 1,0$  s.

A componente normal da aceleração calcula-se a partir da expressão  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ , donde  $10 = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ , obtendo-se para os instantes referidos  $a_n(0,40) = 8,2$  m s<sup>-2</sup> e  $a_n(1,0) = 2,3$  m s<sup>-2</sup>. Ou seja, a velocidade varia mais rapidamente em direção no instante  $t = 0,40$  s.

**e)** Como  $a_n = \frac{v^2}{r}$ , vem  $r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{5,29^2}{2,27} = 12$  m.

**+** QUESTÕES p. 68

## Atividade 2

Os computadores e os programas informáticos permitem criar e testar modelos físicos que se ajustem a situações reais. Até é possível criar modelos com leis diferentes das do nosso mundo, prevendo o comportamento dos sistemas físicos de acordo com essas leis.

Usando as leis dos movimentos de corpos sujeitos a uma força constante, em particular dos projéteis,

existem diversas aplicações disponíveis na internet. Há também *software* disponível para testar e criar modelos próprios.

Recorrendo ao *software* Modellus (<http://modellus.co/index.php?lang=pt>), elabore um modelo onde possa analisar os efeitos da mudança de parâmetros nas leis dos projéteis.



Na Atividade Laboratorial 1.1, «Lançamento horizontal», investigar-se-á a relação entre o alcance de um projétil lançado horizontalmente, de uma certa altura, e a sua velocidade inicial.

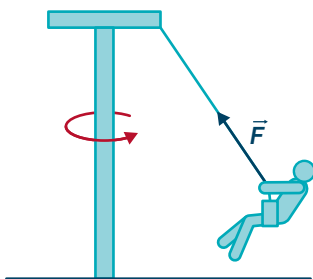
**AL 1.1** p. 59

## 1.1.6 Movimentos de corpos sujeitos a ligações

Estudámos movimentos de corpos sujeitos a uma força resultante constante e, em particular, movimentos de projéteis que apenas estão sujeitos ao seu peso.

Mas há corpos que estão ligados a outros, havendo forças que estabelecem essas ligações. Estas forças chamam-se mesmo **forças de ligação**.

É o caso, por exemplo, de corpos suspensos de correntes, como num baloiço gigante (**Fig. 40**). Considerando que o conjunto de correntes é equivalente a um só fio, a força que esse fio exerce sobre a cadeira, cuja direção coincide com a do fio, é a tensão,  $\vec{T}$ . Esta força assegura a ligação entre a cadeira e o fio: diz-se que a **tensão** é uma **força de ligação**. A sua intensidade depende do peso do conjunto que roda (*peessoa + cadeira*): quanto maior for o peso, maior será a tensão.



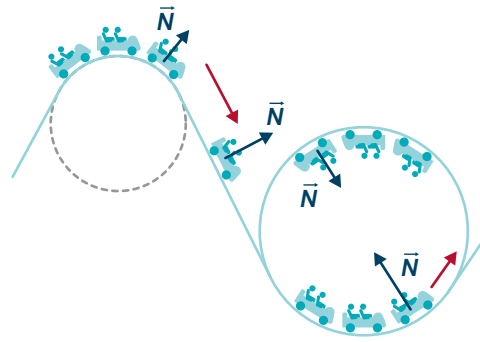
**Fig. 40** Baloioço gigante num parque de diversões: a força exercida pelo fio sobre a cadeira (a tensão) restringe a trajetória desta.



Usa-se, muitas vezes, a designação de «tensão de um fio», que não é muito adequada pois sugere que a tensão pertence ao fio. Ora, uma força resulta da interação entre corpos, pelo que deve dizer-se **tensão exercida pelo fio sobre o corpo ou tensão exercida pelo corpo sobre o fio** (formam um par ação-reação).

Outro exemplo de força de ligação é a força exercida sobre um corpo por um plano (horizontal, inclinado, etc), perpendicularmente a este: a **força normal**,  $\vec{N}$ . Esta força condiciona a trajetória do corpo, impedindo o movimento do corpo na direção perpendicular ao plano de apoio. É o caso da força normal exercida num carrinho de uma montanha-russa (**Fig. 41**). A intensidade da força normal depende, tal como a da tensão, do peso do corpo.





**Fig. 41** Montanha-russa de um parque de diversões: a força normal exercida pela superfície de apoio no carrinho restringe a trajetória deste.

Estas **forças de ligação** – tensão e força normal – não têm necessariamente intensidades constantes durante o movimento. As suas intensidades dependem das intensidades das forças aplicadas e, em situações de movimento, dependem também de características do movimento, como a velocidade, como veremos.

Devemos distinguir as forças aplicadas, como o peso, cuja intensidade é bem definida, das forças de ligação, como a tensão, a força normal e a força de atrito, cujas intensidades dependem das circunstâncias em que o movimento se realiza.

Vamos analisar alguns movimentos retilíneos e circulares sujeitos a ligações, na ausência de forças de atrito, de modo a calcular, entre outras grandezas, as intensidades da tensão,  $\vec{T}$ , e da força normal,  $\vec{N}$ .

A abordagem destes movimentos faz-se no quadro das leis de Newton. Recomenda-se o seguinte procedimento geral:

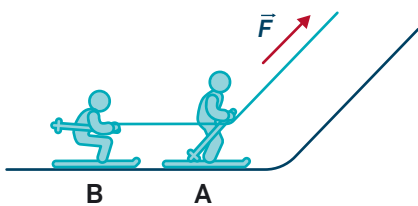
**Forças de ligação:** restringem a trajetória de um corpo. As suas intensidades dependem das forças aplicadas e das características do movimento. Exemplos: tensão, força normal, força de atrito.

- Desenhar uma figura que represente a situação descrita no enunciado, identificando claramente o corpo (ou corpos) cujo movimento se pretende analisar.
- Traçar, no centro de massa do corpo (ou de cada corpo, que deve ser analisado em separado dos restantes), as forças que **atuam sobre o corpo**. Chamamos a este desenho o **diagrama de forças**. Quando se estuda a dinâmica de um corpo, só interessam as forças sobre ele e, por isso, não se devem traçar as forças que ele exerce sobre outros corpos! Se não se conseguir identificar o corpo que exerce uma dada força (como a Terra, fio, pessoa, etc.), a força traçada provavelmente não existe... uma vez que as forças resultam sempre de interações entre corpos!
- Selecionar um referencial onde as equações escalares sejam as mais simples: se o movimento for retilíneo, utilizar um referencial fixo em que um dos eixos tenha

a direção do movimento; se o movimento for circular, utilizar um referencial ligado à partícula.

- Aplicar a Segunda Lei de Newton (nomeadamente nas suas componentes escalares), de acordo com o tipo de referencial escolhido (fixo ou ligado à partícula), tendo em atenção os sinais atribuídos às componentes escalares das forças: positivo se a projeção da força apontar no sentido positivo do eixo ou negativo no caso contrário.
- Resolver as equações, sem substituir valores, de modo a determinar expressões para as grandezas físicas pedidas no enunciado do problema. Substituir depois os valores nestas expressões para calcular os valores das grandezas pedidas.
- Avaliar os resultados obtidos, verificando se são razoáveis; por exemplo, um sinal negativo terá significado físico?

Vejamos alguns exemplos, na página seguinte.

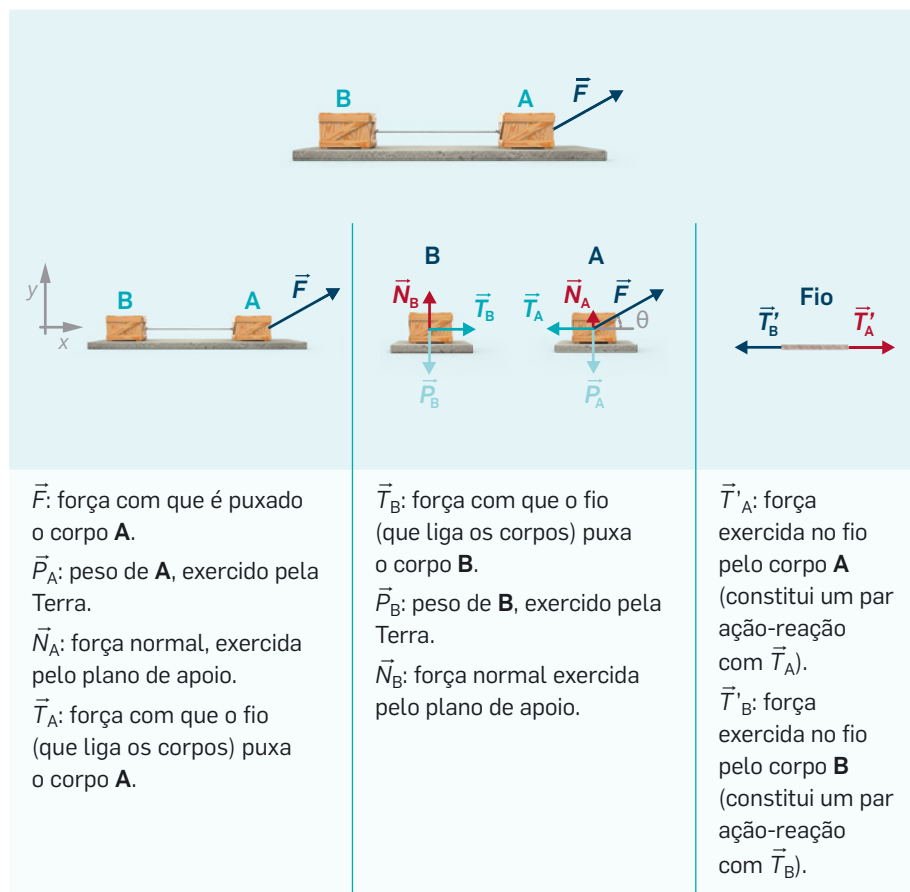


**Fig. 42** Dois esquiadores **A** e **B**, ligados por um fio, movem-se sob a ação de uma força constante exercida no esquiador **A**.

**Exemplo 1 – Movimento retilíneo de um sistema de corpos**

Analise o movimento de dois esquiadores, ligados por uma corda (ou fio), sendo um puxado por uma corda com uma força constante  $\vec{F}$  sobre uma superfície onde é desprezável a força de atrito (**Fig. 42**).

A **Fig. 43** mostra a situação anterior em esquema. Há três corpos em movimento: o corpo **A**, o corpo **B** e o fio que os une. Se a massa do fio for desprezável, isto é, muito menor do que a massa dos restantes corpos, poderemos ignorar o peso do fio. Na **Fig. 43** mostram-se os diagramas das forças que atuam em cada corpo e a respetiva identificação.



**Fig. 43** Diagrama das forças que atuam nos corpos **A** e **B** e na corda.

Vamos estabelecer uma relação entre as intensidades de  $\vec{T}_A$  e  $\vec{T}_B$ .

Se o peso do fio for desprezável, as únicas forças que atuam sobre ele serão  $\vec{T}'_A$  e  $\vec{T}'_B$  (**Fig. 44**), que são simétricas, respetivamente, de  $\vec{T}_A$  e  $\vec{T}_B$ .



**Fig. 44** Diagrama das forças que atuam num fio de massa desprezável.

Só existe aceleração na direção do movimento, ou seja, na do eixo dos  $xx$ , e a aceleração de **A** tem de ser igual à aceleração de **B**. De facto, se **A** se movesse mais depressa do que **B**, a corda poderia romper, e, se **A** se movesse mais devagar do que **B**, a corda deixaria de estar esticada.

Aplicando a Segunda Lei de Newton vem,  $F_x = m_a$  e  $F_y = 0$ . Como não há forças segundo o eixo dos  $yy$  e  $m_{\text{fio}} \approx 0$ , obtém-se:

$$F_x = m_{\text{corda}} a_x \Rightarrow T'_A - T'_B = 0 \Leftrightarrow T'_A = T'_B \text{ (com } m_{\text{fio}} \approx 0\text{)}$$

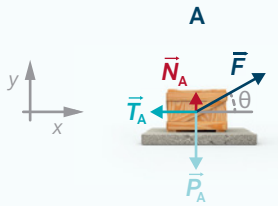
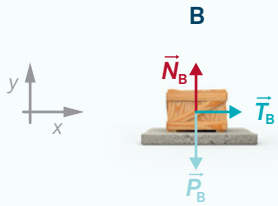
Concluimos que, sempre que a massa de um fio (ou corda) for desprezável, a **tensão** ao longo do fio tem a mesma intensidade. Essa conclusão pode ser verificada experimentalmente: cortando a corda e unindo as duas extremidades por um dinamómetro, este marcará sempre o mesmo valor independentemente do sítio do corte.

Assim, num problema em que a massa dos fios (ou cordas) seja desprezável, podemos ignorá-los, analisando apenas os restantes corpos.

Podemos então escrever  $T'_B = T'_A = T$ . Mas, como  $\vec{T}'_B$  e  $\vec{T}'_A$  formam pares ação-reação com, respetivamente,  $\vec{T}_A$  e  $\vec{T}_B$ , também podemos escrever

$$T_B = T_A = T \text{ (com } m_{\text{fio}} \approx 0\text{)}$$

Como só existe aceleração na direção  $xx$ , tem-se  $a = a_x$ . Na **Fig. 45** escreve-se a expressão da Segunda Lei de Newton para os corpos **A** e **B**:

<p>Corpo A:</p> $\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F \cos \theta - T = m_A a \\ F \sin \theta + N_A - P_A = 0 \end{cases}$	
<p>Corpo B:</p> $\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = m_B a \\ N_B - P_B = 0 \end{cases}$	

**Tensão ao longo de um fio:** num fio de massa desprezável, a intensidade da tensão é sempre a mesma ao longo do fio.

**Fig. 45** Aplicação da Segunda Lei de Newton aos corpos **A** e **B**.

As segundas equações de cada sistema permitem calcular a intensidade das respetivas forças normais:  $N_A = P_A - F \sin \theta$  e  $N_B = P_B$ .

As equações restantes formam o sistema:

$$\begin{cases} F \cos \theta - T = m_A a \\ T = m_B a \end{cases}$$

o qual permite obter a aceleração,  $a$ , com que se move o conjunto e o valor da tensão,  $T$ , a partir da intensidade da força,  $F$ , que puxa o corpo **A** e do ângulo  $\theta$  (cujos valores são conhecidos):

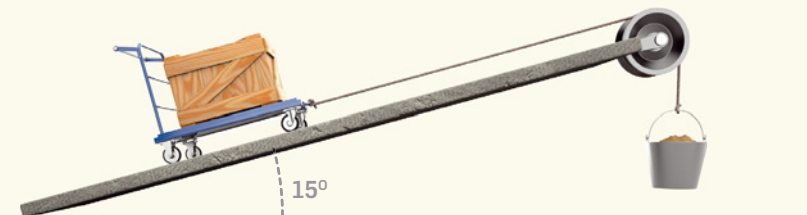
$$a = \frac{F \cos \theta}{m_A + m_B} \text{ e } T = \frac{m_B}{m_A + m_B} F \cos \theta$$

### Questão resolvida 12

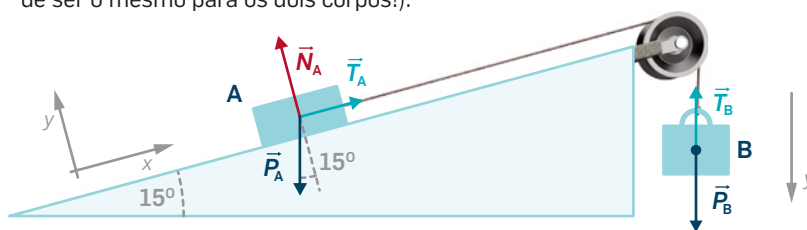


Para elevar um bloco de 50,0 kg para o estrado de uma camioneta coloca-se o bloco num carrinho de 2,00 kg que subirá uma rampa de inclinação  $15^\circ$ . Enche-se um balde com areia, como mostra a figura, até o carrinho começar a mover-se. A massa do balde é 1,00 kg.

Qual é o valor mínimo da massa de areia despejada no balde? Despreze o atrito entre as superfícies assim como as massas do fio e da roldana. Esta é uma maneira engraçada de elevar um bloco pesado: enchendo um balde com areia!



- P** O sistema é equivalente a dois corpos em movimento: o corpo **A**, que representa o conjunto *carrinho + bloco*, e o corpo **B**, que representa o conjunto *balde + areia*. Esquematizam-se a seguir os diagramas das forças que atuam em **A** e **B**. Estão traçados referenciais, para cada corpo, em que um eixo coincide com a direção e sentido do movimento (o referencial escolhido não tem de ser o mesmo para os dois corpos!).



Como a tensão ao longo do fio tem sempre o mesmo módulo,  $T_A = T_B = T$ . Aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos:

$$\text{Corpo A: } F_x = ma_x \Leftrightarrow T - P_A \sin \theta = m_A a \text{ e } F_y = 0 \Leftrightarrow N_A - P_A \cos \theta = 0$$

A segunda equação permite calcular a intensidade da força normal exercida pela rampa sobre **A**:  $N_A = P_A \cos \theta = 52 \times 9,8 \times \cos 15^\circ = 492 \text{ N}$ .

$$\text{Corpo B: } F_x = 0 \text{ e } F_y = m_B a \Leftrightarrow P_B - T = m_B a$$

Ficamos com o sistema de duas equações,

$$\begin{cases} T - P_A \sin \theta = m_A a \\ P_B - T = m_B a \end{cases}$$

com três incógnitas:  $T$ ,  $a$  e  $P_B$ . Ora, como se pretende saber o valor mínimo da massa de areia, basta impor o valor mínimo para a aceleração, que é zero, ou seja, o sistema inicia o movimento mantendo depois constante essa velocidade arbitrariamente pequena. As equações anteriores reduzem-se a:

$$\begin{cases} T - P_A \sin \theta = 0 \\ P_B - T = 0 \end{cases}$$

$$\text{Eliminando } T, \text{ obtemos: } P_B = P_A \sin \theta \Leftrightarrow m_B = 52 \times \sin 15^\circ = 13,5 \text{ kg.}$$

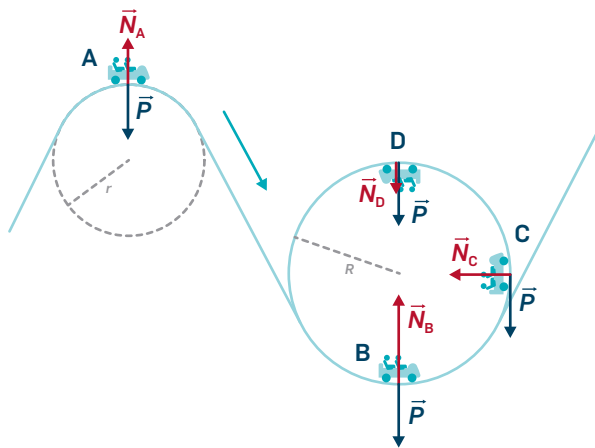
Como a massa do balde é 1,00 kg, a massa mínima de areia é 12,5 kg.

### Exemplo 2 – Movimento circular num plano vertical: a montanha-russa

Estudemos o movimento de um carrinho numa montanha-russa, supondo que não existe um mecanismo de segurança que impeça a projeção do carrinho.

**Quais são as condições exigidas para a segurança dos passageiros? Por que razão o carrinho não cai quando passa no cimo do *looping*? Será que pode ter qualquer velocidade?**

Analisemos o movimento nas posições **A**, **B**, **C** e **D** (Fig. 46), supondo que as últimas três posições estão sobre o mesmo arco de circunferência. As forças que se exercem sobre o carrinho são sempre as mesmas: o peso, que é uma força de intensidade constante, e a força normal, que é variável em direção e intensidade (por isso as forças normais serão representadas por símbolos diferentes).



**Fig. 46** Movimento de um carrinho numa montanha-russa quando se desloca por **A**, **B**, **C** e **D** sucessivamente.

Mas como sabemos que a intensidade da força normal varia ao longo do movimento?

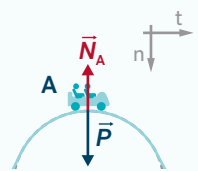
Como a trajetória é circular, devemos utilizar um referencial ligado à partícula. Para cada posição, temos de considerar três eixos: o tangencial, designado por  $t$ , o normal, designado por  $n$  (que aponta sempre para o centro de curvatura!), e outro perpendicular a estes dois, designado por  $z$ . Como não há nenhuma força na direção do eixo dos  $zz$ , ou seja, perpendicular à folha de papel, das três equações escalares da Segunda Lei de Newton,  $F_t = ma_t$ ,  $F_n = ma_n$  e  $F_z = 0$ , só precisamos das duas primeiras.

Vamos escrever estas equações para cada posição do carrinho atendendo ao raio de curvatura, que é  $r$  para a posição **A** e  $R$  para as posições **B**, **C** e **D**.

Para a posição **A**, vem (Fig. 47):

**Posição A:**

$$\begin{cases} F_t = ma_t \\ F_n = ma_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = ma_t \\ P - N_A = m \frac{v_A^2}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_t = 0 \\ N_A = P - m \frac{v_A^2}{r} \end{cases}$$



**Fig. 47** Aplicação da Segunda Lei de Newton na posição **A** do carrinho.

Da primeira equação, concluímos que a aceleração tangencial é nula em **A**.





**Fig. 48** Um veículo entra em movimento de projétil numa lomba se a força normal se anular.

A segunda equação permite:

- calcular a intensidade da força normal,  $\vec{N}$ , conhecida a velocidade em **A**;
- verificar que tem de existir a condição  $N_A < P$ , pois o segundo membro da equação,  $m \frac{v_A^2}{r}$ , é sempre positivo.

Uma curva só é descrita quando há uma componente centrípeta da resultante das forças a apontar para o centro de curvatura. Por isso, **a intensidade da força que aponta para o centro de curvatura tem de ser maior do que a intensidade da força que aponta para fora!**

Como as equações evidenciam, a intensidade da força normal depende não só da força aplicada, o peso, mas também da velocidade naquela posição.

Como a intensidade (ou módulo) da força normal é sempre positiva,  $N_A > 0$ , o caso limite ocorre para  $N_A = 0$ , ou seja, quando o plano não exerce força sobre o corpo. Neste caso, o corpo fica prestes a entrar em voo de projétil, porque apenas atua o seu peso. Por isso, e a fim de garantir a segurança em **A**, tem de se verificar:

$$N_A > 0 \Rightarrow P - m \frac{v_A^2}{r} > 0 \Leftrightarrow mg > m \frac{v_A^2}{r} \Leftrightarrow v_A < \sqrt{rg}$$

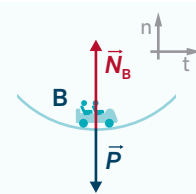
Ou seja, a **condição de segurança em A** é que o módulo da velocidade seja inferior a  $\sqrt{rg}$ , ou seja, o raio de curvatura é determinante.

Se deixar de atuar a força normal,  $\vec{N}$ , o carrinho passará a mover-se como um projétil, o que ocorre quando um veículo salta numa lomba de estrada (**Fig. 48**).

Para a posição **B**, as equações são (**Fig. 49**):

**Posição B:**

$$\begin{cases} F_t = ma_t \\ F_n = ma_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = ma_t \\ N_B - P = m \frac{v_B^2}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_t = 0 \\ N_B = P + m \frac{v_B^2}{R} \end{cases}$$



**Fig. 49** Aplicação da Segunda Lei de Newton na posição **B** do carrinho.



**Fig. 50** Na posição mais baixa da montanha-russa, a segurança dos carrinhos está garantida porque existe sempre força normal.

Da primeira equação concluímos que a aceleração tangencial é nula em **B**. A segunda equação permite:

- calcular a intensidade da força normal,  $\vec{N}$ , conhecida a velocidade em **B**;
- verificar que a força normal nesta posição é sempre maior do que o peso, pois  $P + m \frac{v_B^2}{R}$  é sempre positivo. Então, a segurança está garantida na posição **B** (**Fig. 50**). Contudo, se a velocidade for demasiado elevada, a força normal poderá ter uma intensidade tão grande que incomoda os passageiros.

Para a posição **C**, as equações são (Fig. 51):

Posição **C**:

$$\begin{cases} F_t = ma_t \\ F_n = ma_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -P = ma_t \\ N_C = m \frac{v_C^2}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_t = -g \\ N_C = m \frac{v_C^2}{R} \end{cases}$$

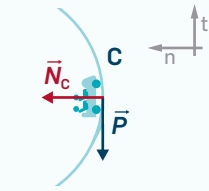


Fig. 51 Aplicação da Segunda Lei de Newton à posição **C** do carrinho.

Na posição **D**, as equações são (Fig. 52):

Posição **D**:

$$\begin{cases} F_t = ma_t \\ F_n = ma_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = ma_t \\ N_D + P = m \frac{v_D^2}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_t = 0 \\ N_D = m \frac{v_D^2}{R} - P \end{cases}$$

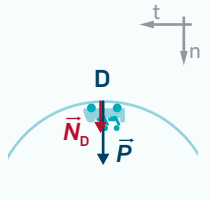


Fig. 52 Aplicação da Segunda Lei de Newton à posição **D** do carrinho.

A segunda equação permite obter a **condição de segurança em D**, pois tem de se verificar:

$$N_D > 0 \Leftrightarrow m \frac{v_D^2}{R} - P > 0 \Leftrightarrow m \frac{v_D^2}{R} > mg \Leftrightarrow v_D > \sqrt{Rg}$$

Ou seja, na posição de altura máxima do arco, o carrinho tem de ter uma velocidade mínima para não cair, que depende do raio de curvatura.

Repare-se que a posição **D** pode parecer igual à posição **A**, mas não é! Em **A**, o carrinho move-se por cima de um arco (é como se fosse uma lomba), enquanto em **D** fá-lo no interior de um arco (Fig. 53). Por isso, as forças normais têm sentidos contrários.

Embora a análise anterior contenha aproximações (desprezou-se o atrito), ela permite concluir que a construção dos arcos de uma montanha-russa tem de obedecer a apertados critérios de segurança: os passageiros são sempre presos às cadeiras para maior segurança (pode ocorrer uma situação que leve a uma imprevista travagem!) e os carrinhos têm rodas por cima e por baixo do carril (Fig. 54).

A Fig. 55 resume as condições de segurança anteriores.



Fig. 53 Na altura máxima, o carrinho deve ter uma velocidade mínima para não cair.

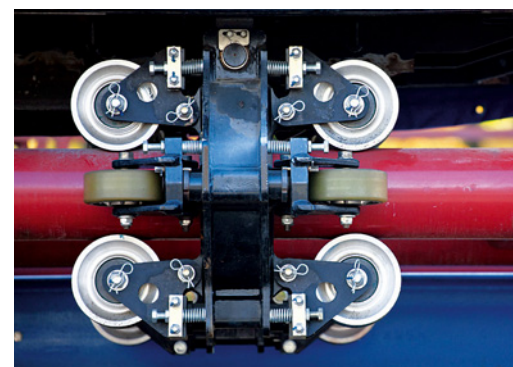


Fig. 54 Rodas de segurança de um carrinho numa montanha-russa.

Movimento numa superfície curva no plano vertical	
Posição	Condição de segurança
	$v < \sqrt{rg}$
	$v > \sqrt{rg}$

Fig. 55 Condições de segurança no movimento sobre uma superfície curva.



**Fig. 56** Bobsled: corrida em pistas geladas, a grandes velocidades, cuja segurança é facilitada pela inclinação do plano das curvas.

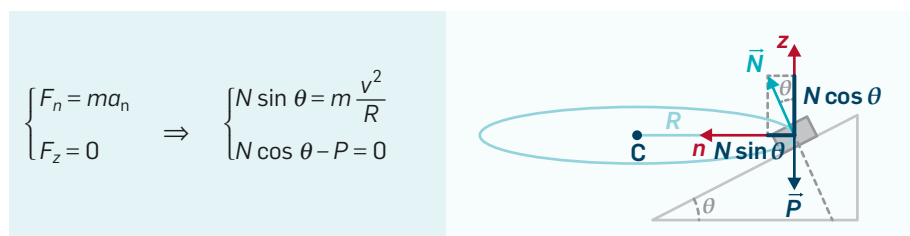
### Exemplo 3 – Movimento circular num plano horizontal: o bobsled

No *bobsled*, corrida de trenós em pistas geladas (**Fig. 56**) em que equipas de duas ou quatro pessoas viajam nos veículos, podem atingir-se velocidades de 140 km/h. Quando há curvas, o condutor orienta o trenó de modo a que ele suba uma rampa gelada, o que permite descrever a curva com grande velocidade. Mas como é a curva descrita em segurança?

Quando um corpo está numa curva num plano horizontal onde o atrito é desprezável (como numa superfície gelada), o peso e a força normal anulam-se. Não há, assim, nenhuma força a puxar o corpo para o centro da curva (a força resultante não tem componente centrípeta), e o corpo não faz a curva! No *bobsled* a curva faz-se sobre uma rampa e, como veremos, existe componente centrípeta da força resultante, o que permite ao corpo descrever a curva.

A **Fig. 57** (à direita) mostra as forças que atuam no trenó (desprezam-se as forças de atrito) e um sistema de eixos ligado ao corpo. A força normal  $\vec{N}$  faz um certo ângulo com a direção vertical, ou seja, tem uma componente na direção do raio da curva, que é descrita num plano horizontal. Esta componente é a componente centrípeta da força resultante. A outra componente da força normal  $\vec{N}$  é anulada pelo peso.

Como não há forças na direção tangencial à trajetória, bastam as equações escalares  $F_n = ma_n$  e  $F_z = 0$  para caracterizar esta situação (**Fig. 57**):



$$\begin{cases} F_n = ma_n \\ F_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \\ N \cos \theta - P = 0 \end{cases}$$

**Fig. 57** Diagrama das forças que atuam sobre um corpo que descreve uma curva numa rampa e equações da Segunda Lei de Newton.

**Velocidade permitida numa curva num plano com inclinação: será tanto maior quanto maior for o raio e a inclinação da curva.**



**Fig. 58** Uma curva com *relevé* aumenta a componente centrípeta da força resultante.

A segunda equação permite calcular o módulo da força normal:  $N = \frac{mg}{\cos \theta}$ .

A primeira equação permite concluir que, quanto maior for  $N \sin \theta$ , que é a componente centrípeta da força resultante, maior será a aceleração centrípeta e, para o mesmo raio, maior poderá ser a velocidade na curva.

Podemos calcular a **velocidade** permitida numa curva circular de raio  $R$  e inclinação  $\theta$ : resolvendo o sistema de equações em ordem a  $v$ , obtemos

$$v = \sqrt{R g \tan \theta}$$

Ou seja, maior raio de curvatura e maior inclinação da rampa permitem maiores velocidades.

As estradas devem ter curvas com uma inclinação correta, chamadas curvas com *relevé* (**Fig. 58**), que asseguram maior segurança rodoviária. Veremos adiante que o atrito também contribui para que haja componente centrípeta, aumentando a segurança.

Os corredores de motos procuram uma inclinação adequada (**Fig. 59**) para que a força exercida pela estrada, em vez de ficar perpendicular à estrada, fique inclinada e, deste modo, aumente a componente centrípeta da força resultante.

Ou seja, o movimento numa curva será tanto mais seguro quanto maior for a componente centrípeta da força resultante, a qual pode ser originada, por exemplo, por forças de atrito, pela força normal ou por tensões.

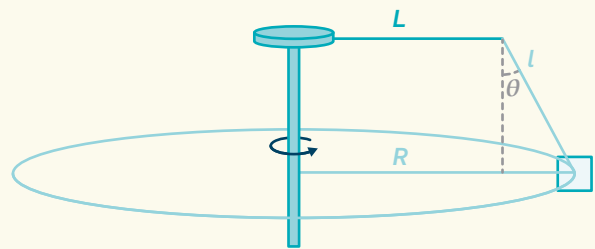


**Fig. 59** O condutor inclina-se para que a força normal contribua para aumentar a componente centrípeta da força resultante.

### Questão resolvida 13

Numa feira, um baloiço gigante, com um braço de suspensão de 3,0 m de comprimento, tem movimento circular uniforme. Uma corda de 2,0 m faz um ângulo de  $30^\circ$  com a vertical, quando a massa do conjunto é 55 kg.

- O ângulo que a corda faz com a vertical dependerá do peso da pessoa? Justifique.
- Qual é o módulo da tensão exercida pela corda sobre a cadeira?
- Quantas voltas completas dá o baloiço num minuto?



- a)** O esquema representa as forças aplicadas ao sistema. Como o movimento é uniforme, não há componente tangencial da força. Assim, bastam as equações  $F_n = ma_n$  e  $F_z = 0$  para analisar o movimento. Tem-se
- $$F_n = ma_n \Leftrightarrow T \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \text{ e } F_z = 0 \Leftrightarrow T \cos \theta - P = 0$$
- Resolvendo este sistema de equações e eliminando a variável  $T$ , obtemos  $\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}$ , ou seja, o ângulo só depende do raio de curvatura e da velocidade.

- b)** A equação  $T \cos \theta - P = 0$  permite concluir que

$$T = \frac{mg}{\cos \theta} = \frac{55 \times 10}{\cos 30^\circ} = 6,4 \times 10^2 \text{ N}$$

- c)** O raio de curvatura é

$$R = L + l \sin \theta = 3,0 + 2,0 \sin 30^\circ = 4,0 \text{ m}$$

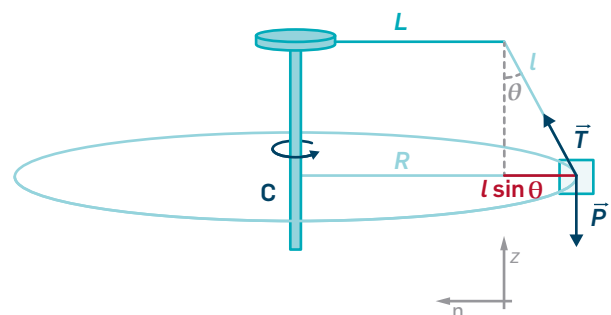
Recordando do 11.º ano que o módulo da velocidade num movimento circular uniforme é igual ao produto da velocidade angular pelo raio,  $v = \omega R$ , e substituindo na

equação  $\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}$ , obtemos  $\tan \theta = \frac{\omega^2 R}{g}$ ; mas, como

$\omega = 2\pi f$ , a expressão anterior fica  $\tan \theta = \frac{4\pi^2 f^2 R}{g}$ , donde

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g \tan \theta}{R}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10 \tan 30^\circ}{4,0}} = 0,19 \text{ s}^{-1} = 11 \text{ min}^{-1}$$

Por isso, o baloiço dá 11 voltas completas num minuto.





**Fig. 60** O atrito atua como resistência aos movimentos, como nas engrenagens das máquinas ou nas articulações dos ossos, mas é ele que nos permite caminhar.



**Fig. 61** Leonardo da Vinci (1452-1519), o artista e inventor italiano que estudou o atrito, ainda antes de Newton chegar ao conceito de força.

**Forças de atrito:** atuam quando um corpo se desloca sobre outro ou é solicitado a mover-se mas permanece em repouso.

**Fig. 62** A intensidade da força de atrito varia à medida que se empurra um corpo.

## 1.1.7 Forças de atrito entre sólidos

As forças de atrito estão presentes por todo o lado, sendo muito importantes no nosso dia a dia. Algumas vezes queremos minimizá-las, mas noutras elas são indispensáveis.

Por exemplo, o atrito no motor de um automóvel fá-lo perder cerca de 20% da sua potência, razão por que se lubrificam as peças para minimizar o atrito. Nas nossas articulações existe um líquido viscoso lubrificador – o líquido sinovial – que também serve para diminuir o atrito.

Mas o atrito, que em geral atua como uma resistência ao movimento, é, por vezes, o responsável pelo próprio movimento: é ele que possibilita a aceleração de um automóvel e nos permite caminhar, correr e trepar (**Fig. 60**).

Foi o artista e inventor italiano Leonardo da Vinci (**Fig. 61**) quem primeiro estudou o atrito nas máquinas que criou, no século XVI, tendo as suas ideias sido aprofundadas mais tarde.

As **forças de atrito** manifestam-se quando um corpo se move, ou quando tem tendência a mover-se em relação a outro apesar de continuar em repouso, por exemplo, entre dois sólidos em contacto.

Iremos analisar as forças de atrito entre sólidos.

Vejamus o que se observa quando empurramos um corpo, por exemplo um armário. Analisemos as forças que atuam sobre ele e apliquemos as leis de Newton de modo a determinar a intensidade da força de atrito (**Fig. 62**).

<p>Repouso</p>	<p>Repouso</p>	<p>Movimento</p>
<p>Empurra-se o armário mas ele permanece em repouso: a força resultante é nula.</p> <p>Como o peso é anulado pela força normal, então a força de atrito é anulada pela força aplicada, pelo que têm a mesma intensidade:</p> $F_a = F$	<p>Aumenta-se progressivamente a intensidade da força sobre o armário mas ele continua em repouso.</p> <p>A intensidade da força de atrito também vai aumentando, mas continua a verificar-se a seguinte condição:</p> $F_a = F$	<p>Aumentando mais a força exercida no armário, este começa a mover-se.</p> <p>A intensidade da força de atrito é então inferior à intensidade da força aplicada:</p> $F_a < F$



As observações anteriores mostram que a intensidade da força de atrito vai aumentando quando aumenta a intensidade da força aplicada até atingir uma intensidade máxima. Curiosamente, após entrar em movimento, até é mais fácil empurrar o corpo, o que indica que a intensidade da força de atrito diminui quando se passa a um estado de movimento.

Quando a força de atrito impede que o corpo deslize, permanecendo em **repouso** apesar de solicitado a mover-se, designa-se por **força de atrito estático**. Quando o corpo está em movimento chama-se **força de atrito cinético**.

Como interpretar as observações anteriores?

Sabemos que é mais fácil empurrar o armário quando ele está vazio, assim como empurrá-lo sobre um chão encerado do que sobre alcatifa. Isso deve-se às características da força de atrito verificadas experimentalmente:

### Forças de atrito entre sólidos deslizantes ou na iminência de deslizar

As forças de atrito dependem do material e do polimento das superfícies em contacto, mas não dependem da área das superfícies em contacto.

#### Forças de atrito estático

- São paralelas às superfícies em contacto, com sentido oposto ao da velocidade se o corpo se mover, ou sentido oposto ao da força que solicita o corpo a mover-se se ele permanecer em repouso.
- A força de atrito estático,  $\vec{F}_{ae}$ , que só existe quando o corpo é solicitado a mover-se, varia de zero a um valor máximo, tendo intensidade igual à da força aplicada,  $\vec{F}$ , que o solicita a mover-se:  $F_{ae} = F$ .
- A intensidade máxima da força de atrito estático é proporcional à intensidade da força normal

$$F_{ae}^{\text{máx}} = \mu_e N$$

sendo a constante de proporcionalidade,  $\mu_e$ , designada por **coeficiente de atrito estático**.

#### Forças de atrito cinético

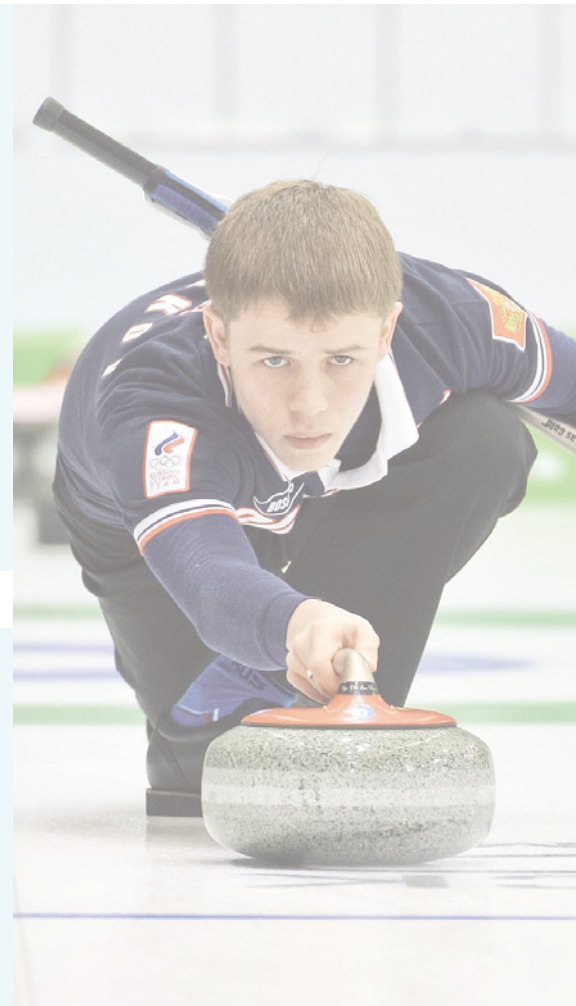
- A força de atrito cinético,  $\vec{F}_{ac}$ , é independente da velocidade (se esta não for muito elevada) e a sua intensidade é proporcional à intensidade da força normal:

$$F_{ac} = \mu_c N$$

- Para o mesmo par de materiais, a força de atrito cinético é geralmente inferior à força de atrito estático máxima, pois  $\mu_c < \mu_e$ .

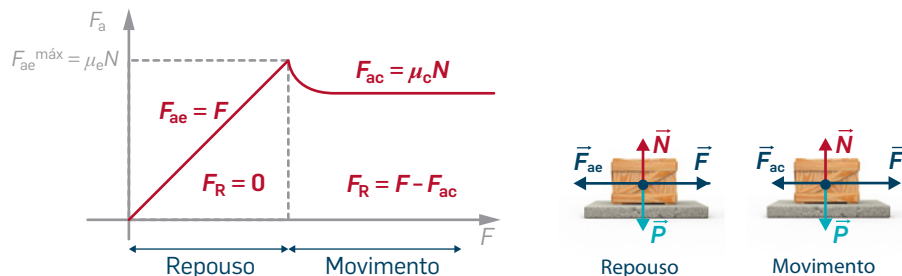
**Força de atrito estático:** existe quando as superfícies em contacto não deslizam uma em relação à outra (repouso).

**Força de atrito cinético:** existe quando há movimento de uma superfície em relação à outra.



Interpretemos, então, o que observamos na **Fig. 62** (página 46). Quando um corpo está assente numa superfície horizontal e é solicitado a mover-se por uma força horizontal  $\vec{F}$ , paralela ao plano, e continua em repouso, tem-se  $N = P$  e  $F_{ae} = F$ . Aumentando a força aplicada, aumenta a força de atrito estático até atingir a máxima intensidade dada por  $F_{ae}^{m\acute{a}x} = \mu_e N$ . Um novo aumento da força aplicada faz o corpo mover-se: a intensidade da força de atrito, agora cinético, diminui e passa a ser praticamente constante (**Fig. 63**).

**Fig. 63** Variação da intensidade da força de atrito com a intensidade da força aplicada.



A **Fig. 64** resume as conclusões anteriores.

Forças de atrito entre sólidos em deslizamento ou na iminência de deslizar		
Repouso: atrito estático		Movimento: atrito cinético
$F_{ae} = 0$	$F_{ae} = F$ e $F_{ae}^{m\acute{a}x} = \mu_e N$	$F_{ac} = \mu_c N$

**Fig. 64** Características das forças de atrito entre sólidos em deslizamento ou na iminência de deslizar.

**Questão resolvida 14**



Sobre um bloco de madeira de 3,4 kg, assente numa mesa também de madeira, exerce-se uma força  $\vec{F}$  horizontal. Os coeficientes de atrito estático e cinético do par de materiais em contacto são, respetivamente, 0,60 e 0,40.

Interprete o que ocorre com o bloco, calculando a intensidade da força de atrito se a intensidade da força aplicada sobre ele for sucessivamente igual a:

- a)  $F = 0$  N    b)  $F = 10$  N    c)  $F = 21$  N    d)  $F = 16$  N

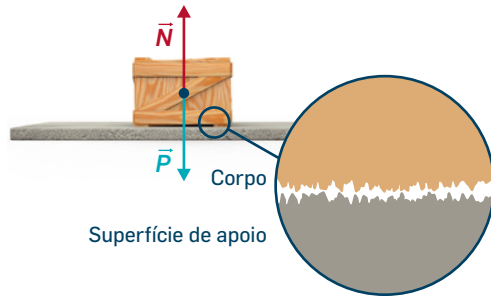
- a)** O bloco está em repouso e não há atrito, pois não há força a puxá-lo.
- b)** Temos de saber se a intensidade da força que solicita o bloco a mover-se é ou não superior à intensidade máxima da força de atrito estático. Como  $F_{ae}^{m\acute{a}x} = \mu_e N = \mu_e mg = 0,60 \times 3,4 \times 10 = 20$  N, o bloco estará em repouso para intensidades da força aplicada inferiores a 20 N e  $F = F_a$ . Logo, neste caso,  $F_a = 10$  N.

- c)** O bloco começa a mover-se, pois a intensidade da força é superior à máxima intensidade da força de atrito estático.
- d)** Como o bloco já se move, temos de ver se a força aplicada é suficiente para igualar ou superar a força de atrito cinético e manter o movimento, isto é, se  $F \geq F_{ac}$  (se a força fosse inferior à força de atrito cinético, o corpo abrandaria até parar). Como  $F_{ac} = \mu_c N = \mu_c mg = 0,40 \times 3,4 \times 10 = 13,6$  N e  $F = 16$  N, o bloco move-se com aceleração:  $F - F_{ac} = ma \Rightarrow 16 - 13,6 = 3,4a$  ou  $a = 0,7$  m s<sup>-2</sup>.

As características indicadas referem-se apenas a sólidos que deslizam uns sobre os outros. Mas há exceções, pois o fenómeno do atrito é complexo. As características referidas baseiam-se na experiência, não havendo uma teoria completa que as justifique.

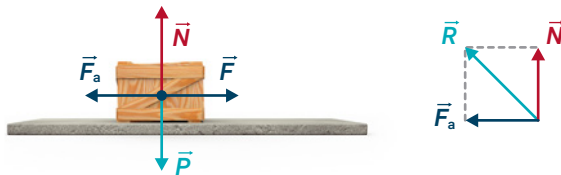
Mas qual é a origem do atrito?

Uma superfície que nos parece polida à vista desarmada é sempre mais ou menos rugosa quando vista microscopicamente (**Fig. 65**). No contacto de duas superfícies formam-se uma espécie de pequenas «soldas» devido às interações eletromagnéticas entre os respetivos átomos ou moléculas. Quando se aplica uma força, as saliências e as reentrâncias das superfícies em contacto adquirem novas configurações, o que origina a força macroscópica de atrito.



**Fig. 65** As superfícies em contacto, à escala microscópica, apresentam muitas saliências, havendo forças atrativas entre elas de natureza eletromagnética.

Na realidade, a **superfície de apoio** exerce apenas uma única força sobre o corpo,  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_a$  (**Fig. 66**), cuja componente vertical é a força normal,  $\vec{N}$ , e cuja componente horizontal é a força de atrito,  $\vec{F}_a$ .



**Superfície de apoio:** exerce sobre um corpo uma força que é a soma da força normal e da força de atrito.

**Fig. 66** Um corpo é empurrado sobre uma superfície. Esta exerce sobre ele uma força  $\vec{R}$  que se decompõe em duas componentes: a força normal  $\vec{N}$  e a força de atrito  $\vec{F}_a$ .

Se as superfícies forem lubrificadas ou menos rugosas haverá uma menor força de atrito, uma vez que os coeficientes de atrito são menores.

Os **coeficientes de atrito** são grandezas expressas como números (adimensionais), uma vez que se obtêm dividindo as intensidades de duas forças:  $\mu = F_a / N$ . A **Tab. 2** indica alguns valores para pares de materiais.

Materiais em contacto	Coeficiente de atrito estático		Coeficiente de atrito cinético	
	Secos	Lubrificados	Secos	Lubrificados
borracha – asfalto	0,8 – 1,1	0,4 – 0,7	0,7 – 0,9	0,2 – 0,5
madeira – madeira	0,6		0,4	
vidro – vidro	0,94	0,35	0,40	0,04 – 0,09
aço duro – aço duro	0,74		0,57	
gelo – gelo (0 °C)	0,05 – 0,15		0,02	
gelo – gelo (-20 °C)	0,2		0,05	
alumínio – aço	0,61		0,47	
teflon – teflon	0,04		0,02 – 0,04	
articulações dos ossos	0,01		0,003	

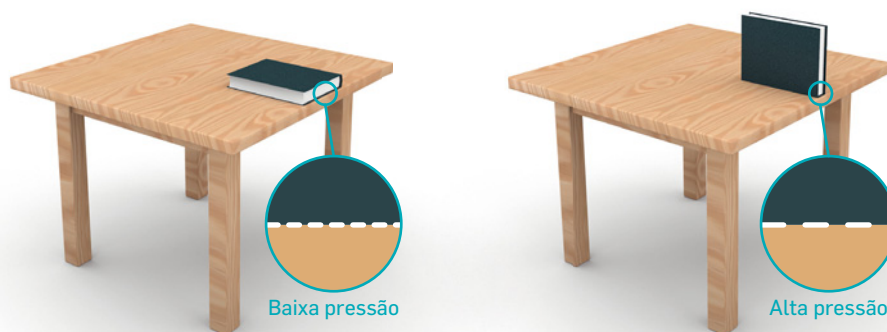
**Coeficientes de atrito:** em geral são menores do que um, sendo o coeficiente de atrito estático maior do que o coeficiente de atrito cinético. Superfícies lubrificadas têm menores coeficientes de atrito.

**Tab. 2** Valores experimentais de coeficientes de atrito para pares de materiais.



Mas por que razão a força de atrito não depende da área de contacto?

Temos de distinguir a área de contacto aparente – a que vemos macroscopicamente – da área real de contacto, ou seja, à escala microscópica. A área real de contacto é sempre inferior à observada macroscopicamente porque os corpos apenas se tocam em alguns pontos. Se colocarmos um livro sobre uma mesa apoiado em faces diferentes, as áreas aparentes de contacto serão diferentes. Mas o peso é sempre o mesmo. Assentando o livro numa superfície maior, há muitas zonas de contacto, mas cada uma com pequena área (**Fig. 67**, à esquerda). Se o livro estiver apoiado na face menor, existirão menos zonas de contacto, mas cada uma com área grande (**Fig. 67**, à direita). A área real de contacto é aproximadamente a mesma nos dois casos.

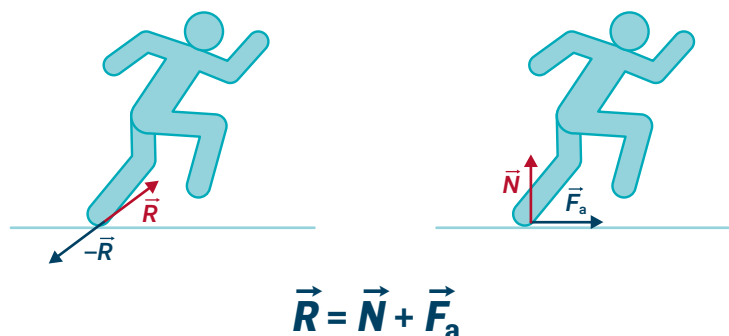


**Fig. 67** A área aparente de contacto do livro com a mesa é diferente nas duas situações, mas a área real de contacto é aproximadamente a mesma.

**Terá a força de atrito sempre sentido contrário ao do movimento do centro de massa do corpo?** Nem sempre!

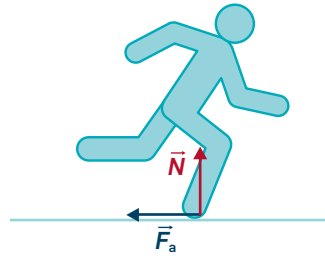
Sabemos que, se caminharmos sobre uma superfície muito polida, por exemplo, um chão encerado, os pés tendem a escorregar, o que não acontece se o fizermos sobre um tapete.

Quando caminhamos ou corremos, empurramos o chão para trás e o chão empurra-nos com uma força simétrica (Terceira Lei de Newton),  $\vec{R}$ , que se decompõe na força normal,  $\vec{N}$ , e na força de atrito,  $\vec{F}_a$  (**Fig. 68**). A força normal equilibra o nosso peso. Numa fase da passada, empurramos o chão para trás, mas a força de atrito impede os nossos pés de deslizarem, empurrando-nos para a frente. Ela continua a opor-se à tendência de deslizamento entre as superfícies, embora, neste caso, tenha o **sentido do movimento do centro de massa do corpo**. É ela, afinal, a responsável pelo movimento!



**Fig. 68** Numa fase da passada empurramos o chão para trás e este empurra-nos para a frente ( $\vec{R}$  e  $-\vec{R}$  são um par ação-reação). A força de atrito é a componente horizontal de  $\vec{R}$ , que nos empurra para a frente.

Numa outra fase da passada ou da corrida, quando o pé toca o solo, este tende a deslizar para a frente e, por isso, a força de atrito aponta para trás (Fig. 69). Mas, em seguida, e sobre o mesmo pé, a situação volta a ser a da Fig. 68.



**Fig. 69** Numa outra fase da passada, a força de atrito aponta para trás.

Se a intensidade da força de atrito for suficiente, quando andamos ou corremos assentamos os pés no chão sem eles deslizarem, sendo a força de atrito alternadamente para a frente num certo intervalo de tempo, e para trás noutra intervalo de tempo. Como o pé não desliza, o **atrito é estático**. Mas, se empurrarmos o chão com uma força que exceda a intensidade máxima da força de atrito estático, o pé deslizará a ponto de haver desequilíbrio. Por isso, a sola do calçado deve ser adequada para não se escorregar (Fig. 70)!

Se deslizarmos, o atrito será cinético e a força de atrito cinético terá sempre sentido oposto ao do movimento do centro de massa do corpo.

Também o que faz acelerar um automóvel são as forças de atrito exercidas pelo chão nas rodas com tração, que têm o sentido do movimento do centro de massa do automóvel (Fig. 71). As rodas com tração empurram o solo para trás enquanto este as empurra para a frente. Um automóvel, por muito potente que seja, só consegue acelerar se houver atrito. Caso contrário, as rodas patinam e o automóvel não avança. O problema pode ser resolvido colocando um objeto por baixo das rodas com tração cuja superfície assegure o atrito.



**Fig. 70** Se a intensidade da força de atrito for suficiente, andaremos sem deslizar e a força de atrito é estática.

**Fig. 71** As forças de atrito que atuam sobre as rodas de tração de um automóvel são responsáveis pela aceleração do veículo.

Normalmente, as rodas do automóvel rolam em vez de deslizar, pelo que o atrito é estático, uma vez que as superfícies em contacto não deslizam uma sobre a outra. No entanto, se houver deslizamento, o atrito passará a ser cinético.

Quando há uma travagem, as forças de atrito nas rodas apontam em sentido oposto ao do movimento do centro de massa do automóvel. Mas, como as rodas continuam a rolar, embora mais lentamente, o atrito continua a ser estático. Contudo, numa travagem brusca, as rodas bloqueiam e passa a haver uma força de atrito cinético, cuja intensidade é menor. As travagens serão mais longas e o condutor poderá então perder o controlo do automóvel. O ABS (*Anti-lock Breaking System*) é um sistema que impede que as rodas bloqueiem e deslizem, permitindo um melhor controlo do automóvel.

Concluindo: a força de atrito cinético tem sempre sentido oposto ao do movimento do centro de massa do corpo. A força de atrito estático pode ter sentido oposto ou o mesmo sentido desse movimento, mas, em qualquer caso, opõe-se à tendência de deslizamento entre as superfícies.

**AL 1.2** p. 61

Na Atividade Laboratorial 1.2, «Atrito estático e atrito cinético», verificar-se-ão experimentalmente certas características das forças de atrito.

**Atividade 3**

O calçado usado em cada modalidade de desporto tem materiais e formas adequadas a essa modalidade.

Faça uma pesquisa sobre diferenças no calçado usado e justifique-as.



**Questão resolvida 15**

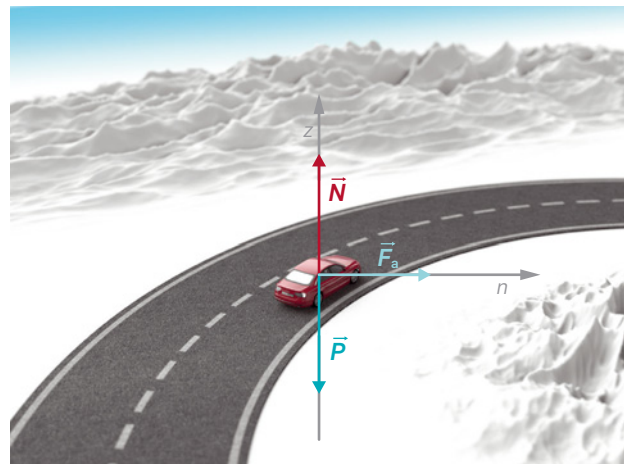
Um automóvel descreve uma curva circular de raio  $R$ , num plano horizontal, mantendo o valor da velocidade lido no velocímetro. Analise a situação do ponto de

vista dinâmico, indicando se há ou não atrito (estático ou cinético) e identificando as grandezas que condicionam a velocidade do automóvel.

Se o automóvel descreve uma curva com velocidade de módulo constante tem necessariamente aceleração centrípeta e aceleração tangencial nula. Logo, a força resultante apenas tem componente centrípeta. Como o peso anula a força normal, terá de haver uma força, que é a força de atrito, a puxar o automóvel para o centro da curva. Como o automóvel não desliza na direção desta força, o atrito é estático. Traçando o diagrama de forças e aplicando a Segunda Lei de Newton vem:

$$F_n = ma_n \Leftrightarrow F_a = m \frac{v^2}{R} \text{ e } F_z = 0 \Leftrightarrow N = P$$

Como a força de atrito máxima é  $F_a^{\text{máx}} = \mu_e N$ , resolvendo o sistema, obtemos  $\mu_e mg = m \frac{v_{\text{máx}}^2}{R}$ , o que permite determinar a velocidade máxima permitida ao automóvel para descrever a curva, ou seja,  $v_{\text{máx}} = \sqrt{\mu_e Rg}$ .

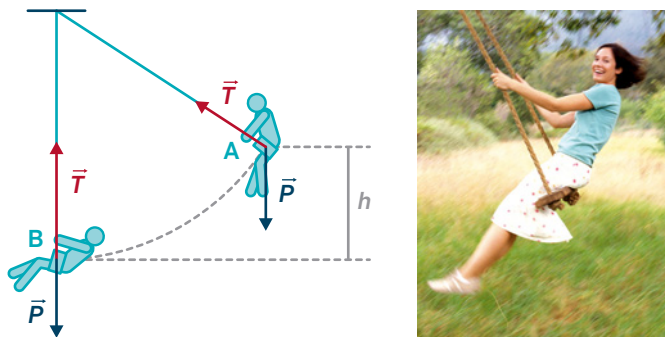


**+** QUESTÕES p. 72

## 1.1.8 Dinâmica da partícula e considerações energéticas

Como vimos, para os movimentos curvilíneos no plano vertical as forças de ligação podem depender da velocidade do corpo. Porém, em geral, esses movimentos são variados, não uniformemente, e o cálculo da velocidade num ponto da trajetória a partir das leis do movimento é complexo. Assim, nestas situações, em conjunto com a descrição dinâmica, é conveniente ter em conta considerações energéticas.

Vejam os o exemplo do movimento de uma pessoa num balanço (Fig. 72). Por razões de segurança, é necessário conhecer a intensidade máxima da tensão sobre as cordas nos balanços. Como determiná-la?



**Fig. 72** Forças sobre um balanço. A intensidade máxima da tensão ocorre no ponto mais baixo.

Num balanço, a intensidade máxima da **tensão** exercida pela corda sobre o corpo (tomemos uma só corda por simplicidade), e que é igual à intensidade da tensão exercida pelo corpo sobre a corda, ocorre no ponto mais baixo da trajetória.

Seja  $\ell$  o comprimento da corda. Na posição mais baixa (ponto **B** da Fig. 72) só há forças a atuarem na direção do raio do arco de circunferência descrita, pelo que, aplicando a Segunda Lei de Newton, obtém-se:

$$F_n = ma_n \Rightarrow T_B - P = m \frac{v_B^2}{\ell} \Leftrightarrow T_B = P + m \frac{v_B^2}{\ell}$$

Tomando em conta considerações energéticas, e supondo que no movimento entre os pontos **A** e **B** há conservação de energia mecânica, tem-se:

$$E_{c(A)} + E_{p(A)} = E_{c(B)} + E_{p(B)}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 + mg(h_A - h_B) = \frac{1}{2}mv_B^2$$

ou

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Conhecidas a velocidade em **A** e altura,  $h$ , de **A** relativamente a **B**, pode calcular-se a velocidade em **B**. Por exemplo, se o ponto **A** for o de altura máxima, a velocidade será nula nesse ponto e o módulo da velocidade em **B** será  $v_B = \sqrt{2gh}$ .

**Tensão** máxima exercida pela corda no balanço: ocorre na posição mais baixa da trajetória.

Pode assim determinar-se o valor da tensão máxima:

$$T_{\text{máx}} = mg + m \frac{2gh}{\ell}$$

Não só em movimento curvilíneos, mas também em movimento retilíneos, mesmo sendo uniformes ou uniformemente variados, a descrição dinâmica, em conjunto com as considerações energéticas, é muito útil, como já vimos no 11.º ano.

### Questão resolvida 16

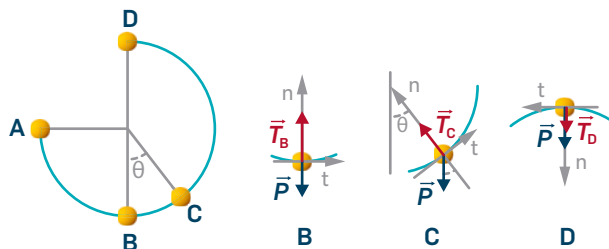


Uma pedra de 100 g, suspensa por um fio de massa desprezável, roda num plano vertical, descrevendo um movimento circular. Este sistema é o chamado pêndulo gravítico ou pêndulo simples. A pedra é largada com o fio esticado na posição horizontal.

- a) Qual é o módulo da tensão exercida pelo fio quando a pedra está na posição mais baixa e na posição em que o fio faz 30° com a direção vertical?
- b) A pedra conseguirá descrever uma circunferência completa? Em caso negativo, em que condições o faria? Justifique.



- a) Observemos o esquema que representa a situação descrita: **A** é a posição em que o pêndulo é largado e a velocidade é nula. Em **B**, a pedra passa na posição mais baixa. Na posição **C**, o fio faz 30° com a direção vertical. **D** é a posição mais alta: se a pedra passar por lá, descreve uma circunferência completa. Em cada posição traçam-se os eixos tangencial e normal.



O movimento é circular, de raio igual ao comprimento do fio,  $\ell$ , e a trajetória está contida num plano vertical. Em qualquer posição, as únicas forças que atuam sobre a pedra são o peso e a tensão. Utilizando os eixos tangencial e normal, a Segunda Lei de Newton escreve-se:

Em **B**:  $F_t = ma_t \Leftrightarrow 0 = ma_t \Leftrightarrow a_t = 0$

e

$$F_n = ma_n \Leftrightarrow T_B - P = m \frac{v_B^2}{\ell} \Leftrightarrow T_B = P + m \frac{v_B^2}{\ell}$$

Em **C**:  $F_t = ma_t \Leftrightarrow -P \sin 30^\circ = ma_t \Leftrightarrow a_t = -g \sin 30^\circ$

e

$$F_n = ma_n \Leftrightarrow T_C - P \cos 30^\circ = m \frac{v_C^2}{\ell} \Leftrightarrow T_C = P \cos 30^\circ + m \frac{v_C^2}{\ell}$$

O movimento da pedra é acelerado na descida e retardado na subida. O módulo da tensão diminui à medida que a pedra sobe.

(continua)

(continuação)

Da primeira equação calculamos o valor da aceleração tangencial. Da segunda podemos calcular o módulo da tensão se conhecermos a velocidade. Mas, neste caso, a energia mecânica conserva-se, uma vez que a tensão não realiza trabalho (é sempre perpendicular à trajetória) e o peso é uma força conservativa. Por isso, podemos escrever:

$$E_{mA} = E_{mB}, \text{ ou } mgh_A + \frac{1}{2} mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2} mv_B^2$$

Supondo o nível de referência, para a energia potencial, na posição **B**, tem-se  $h_A = l$ ,  $h_B = 0$ ,  $v_A = 0$ . A expressão anterior fica:

$$mgl = \frac{1}{2} mv_B^2$$

$$\text{donde } v_B^2 = 2gl$$

Substituindo em  $T_B = P + m \frac{v_B^2}{l}$ , obtém-se:

$$T_B = 3mg = 3P = 3 \times 0,100 \times 10 = 3,0 \text{ N}$$

Também  $E_{mA} = E_{mC}$ , ou  $mgh_A + \frac{1}{2} mv_A^2 = mgh_C + \frac{1}{2} mv_C^2$

Supondo o mesmo nível de referência para a energia potencial, vem:

$$h_A = l, h_C = l - l \cos 30^\circ = l \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} l \text{ e } v_A = 0$$

Logo,  $v_C^2 = \sqrt{3} gl$

Substituindo em  $T_C = P \cos 30^\circ + m \frac{v_C^2}{l}$ , obtém-se:

$$T_C = mg \cos 30^\circ + \sqrt{3} mg = 0,100 \times 10 \times (\cos 30^\circ + \sqrt{3}) = 2,6 \text{ N}$$

- b)** Se a pedra sair da posição **A** com velocidade nula, atendendo à conservação da energia mecânica só poderá atingir uma posição à mesma altura da inicial, ou seja, com o fio novamente na posição horizontal. Para descrever a circunferência teria de passar por **D**. Neste ponto, as equações de Newton são:

$$F_t = ma_t \Leftrightarrow 0 = ma_t \Leftrightarrow a_t = 0$$

$$\text{e } F_n = ma_n \Leftrightarrow T_D + P = m \frac{v_D^2}{l} \Leftrightarrow T_D = -P + m \frac{v_D^2}{l}$$

Como o módulo da tensão tem de ser positivo, vem:

$$-P + m \frac{v_D^2}{l} > 0 \Leftrightarrow v_D > \sqrt{gl}$$

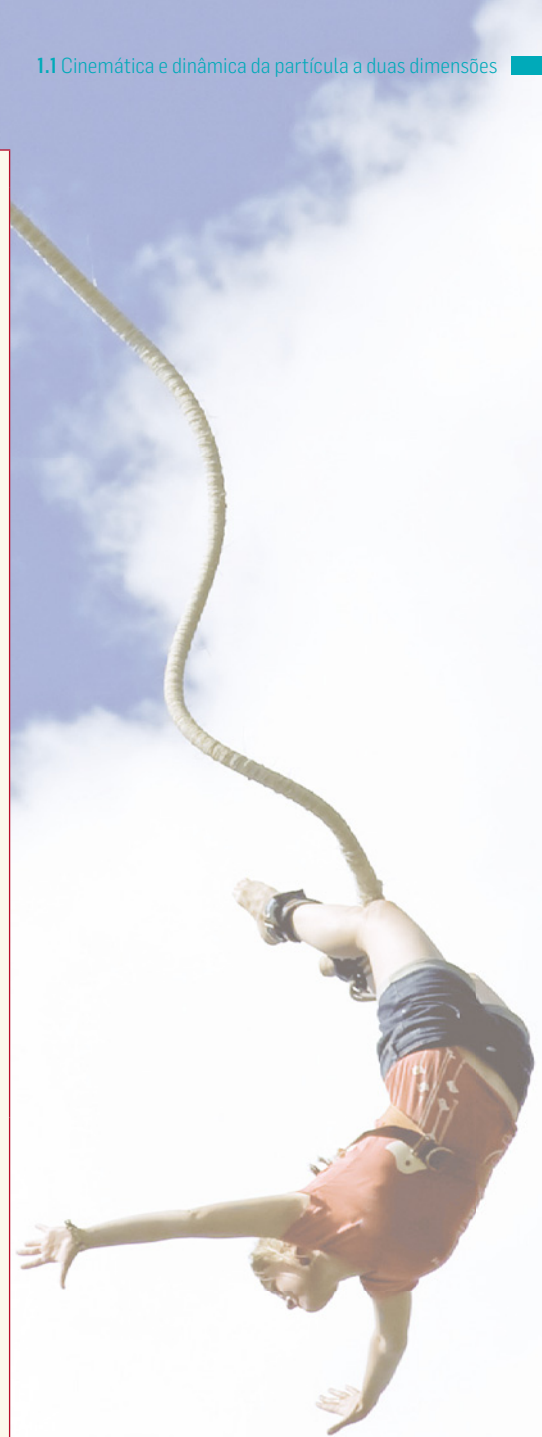
Consideremos  $v_D = \sqrt{gl}$  a velocidade mínima no ponto **D**. Aplicando a conservação da energia mecânica entre **A** e **D**, podemos obter a velocidade mínima que a pedra deveria ter em **A**:

$$E_{mA} = E_{mD} \text{ ou } mgh_A + \frac{1}{2} mv_A^2 = mgh_D + \frac{1}{2} mv_D^2$$

Supondo o nível de referência para a energia potencial em **A**, vem:

$$h_A = 0, h_D = l, v_{D\min} = \sqrt{gl}$$

Obtém-se, então:  $\frac{1}{2} mv_A^2 = mgl + \frac{1}{2} mgl \Leftrightarrow v_{A\min} = \sqrt{3gl}$

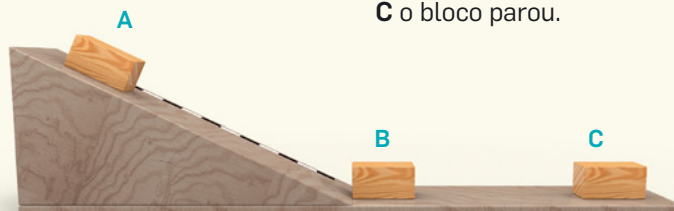




## Questão resolvida 17



De uma rampa, com  $25^\circ$  de inclinação, largou-se do ponto **A**, a uma altura de 17 cm em relação à base, um bloco de 87 g. O módulo da velocidade do bloco no ponto **B** foi  $0,46 \text{ m s}^{-1}$ .



- Determine o coeficiente de atrito cinético entre as superfícies em contacto.
- Se a massa do bloco fosse maior também o seria a velocidade com que chegaria a **B**? Justifique.
- Qual foi a distância entre **B** e **C**, considerando que em **C** o bloco parou.

- P** a) Como a força de atrito é não conservativa, o trabalho por ela realizado é igual à variação de energia mecânica. Como  $W_{\vec{F}_a} = [(E_{c(B)} + E_{p(B)}) - (E_{c(A)} + E_{p(A)})] = E_{c(B)} - E_{p(A)}$ , dado que a velocidade em **A** é nula e se toma com referência para as energias potenciais a base da rampa,

$$W_{\vec{F}_a} = \frac{1}{2} m v_B^2 - m g h_A =$$

$$= 0,5 \times 0,087 \times 0,46^2 - 0,087 \times 10 \times 0,17 = -0,139 \text{ J}$$

O trabalho da força de atrito pode calcular-se por  $W_{\vec{F}_a} = -s F_a$ , sendo  $s$  a distância percorrida pelo bloco sobre a rampa.

De acordo com o diagrama das forças do esquema, para o plano inclinado tem-se:

$$N = P \cos 25^\circ = 0,087 \times 10 \times \cos 25^\circ = 0,789 \text{ N}$$

$$\text{e } P \sin 25^\circ - F_a = m a$$

Como  $F_a = \mu_c N$  e  $s = \frac{h}{\sin 25^\circ} = 0,402 \text{ m}$ , resulta que:

$$W_{\vec{F}_a} = -s F_a \Leftrightarrow -0,139 = -0,402 \mu_c \times 0,789 \Rightarrow \mu_c = 0,44$$

- b) A dedução seguinte mostra que a velocidade com que o bloco chega a **B** não depende da sua massa. Assim, a velocidade em **B** seria sempre a mesma.

$$W_{\vec{F}_a} = \frac{1}{2} m v_B^2 - m g h_A \Leftrightarrow -s \mu_c N = \frac{1}{2} m v_B^2 - m g h_A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -m s \mu_c g \cos 25^\circ = m \left( \frac{1}{2} v_B^2 - g h_A \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -s \mu_c g \cos 25^\circ = \frac{1}{2} v_B^2 - g h_A$$

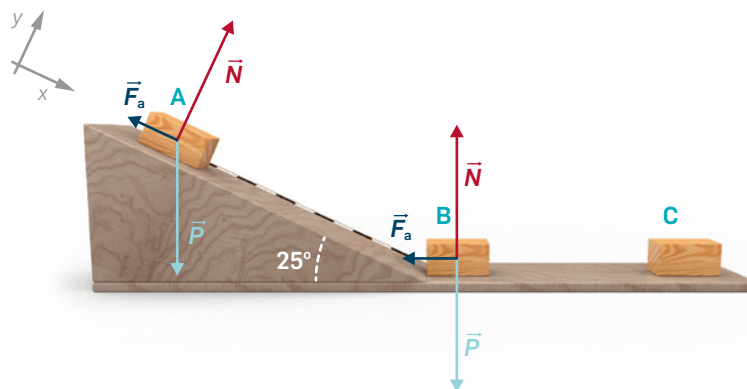
- c) Mantendo-se o tipo de superfícies, mantém-se o coeficiente de atrito.

Tem-se  $F_a = \mu_c N = \mu_c m g$

$$W_{\vec{F}_a} = \frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 \Leftrightarrow -s F_a = -\frac{1}{2} m v_B^2$$

e

$$s \mu_c g = \frac{1}{2} v_B^2, \text{ logo, } s = \frac{0,5 \times 0,46^2}{0,44 \times 10} = 0,024 \text{ m}$$

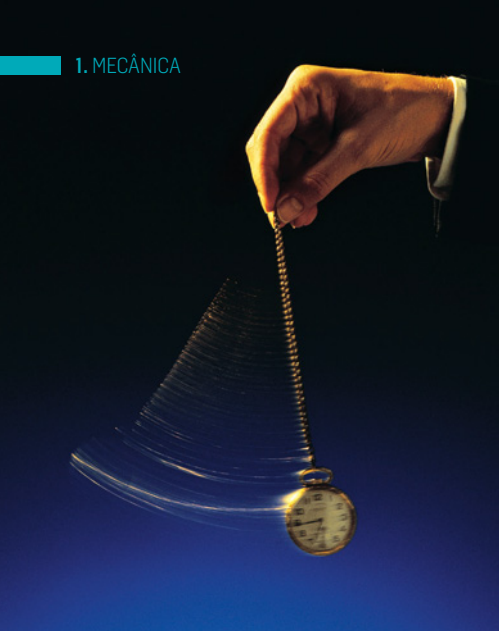




## RESUMO

- **Posição,  $\vec{r}$ :** vetor que parte da origem do referencial e tem a extremidade na partícula. Num movimento a três dimensões é dado por  $\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$ , sendo  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  as equações paramétricas do movimento. Se estas forem do 1.º grau, do 2.º grau ou grau superior a 2, em  $t$ , o movimento é, respetivamente, uniforme, uniformemente variado ou variado na direção do eixo considerado.
- **Equação da trajetória:** obtém-se a partir das equações paramétricas por eliminação da variável tempo,  $t$ .
- **Deslocamento,  $\Delta\vec{r}$ :** vetor com origem na posição inicial e extremidade na posição final da partícula. O seu módulo é igual ou menor do que a distância percorrida sobre a trajetória.
- **Velocidade média:**  $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ ; define-se num intervalo de tempo e tem a direção e o sentido do deslocamento.
- **Velocidade:**  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ; define-se num instante e o seu módulo indica a rapidez com que a partícula se desloca nesse instante; é tangente à trajetória, em cada ponto, e tem o sentido do movimento.
- **Aceleração média:**  $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ ; define-se num intervalo de tempo; tem a direção e o sentido da variação da velocidade.
- **Aceleração:**  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ; define-se num instante; numa trajetória retilínea tem a direção da velocidade e o mesmo sentido (no movimento acelerado) ou sentido oposto (no movimento retardado); numa trajetória curvilínea existe sempre, pois há mudança de direção da velocidade, apontando sempre para dentro da curva.
- **Componente tangencial da força resultante,  $\vec{F}_t$ :** tem a direção da velocidade e o mesmo sentido ou sentido oposto; provoca variação do módulo da velocidade.
- **Componente normal da força resultante,  $\vec{F}_n$  (ou força centrípeta,  $\vec{F}_c$ ):** é perpendicular à velocidade, apontando para o centro da curva; provoca variação na direção da velocidade; existe em todos os movimentos curvilíneos.
- **Aceleração,  $\vec{a}$ , num sistema de eixos ligados à partícula:**  $\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n$ .
- **Componente tangencial da aceleração:**  $a_t = \frac{dv}{dt}$ ; está associada à variação do módulo da velocidade; tem a direção da velocidade e o mesmo sentido ou sentido oposto; é nula em movimentos uniformes (retilíneos e curvilíneos); é constante em movimentos uniformemente variados; e é variável em movimentos variados.





- **Componente normal da aceleração,  $\vec{a}_n$  (ou componente centrípeta,  $\vec{a}_c$ ):**  
 $a_n = \frac{v^2}{r}$ , sendo  $r$  o raio de curvatura; está associada à variação da direção da velocidade; é perpendicular à velocidade, apontando para o centro da curva; existe em todos os movimentos curvilíneos.
- **Equações escalares da Segunda Lei de Newton,  $\vec{F}_R = m\vec{a}$ , num referencial fixo:**  $F_x = ma_x, F_y = ma_y, F_z = ma_z$ .
- **Equações escalares da Segunda Lei de Newton,  $\vec{F}_R = m\vec{a}$ , num referencial de eixos ligados à partícula:**  $F_t = ma_t, F_n = ma_n, F_z = 0$ ; usam-se, por exemplo, para descrever movimentos circulares.
- **Trajétória parabólica:** é descrita pelo centro de massa de um corpo sob a ação de uma força resultante constante cuja direção é diferente da velocidade inicial.
- **Movimentos curvilíneos de queda livre:** são descritos como a composição de um movimento retilíneo uniforme na direção horizontal (com velocidade inicial igual à velocidade inicial naquela direção) e um movimento retilíneo uniformemente variado na direção vertical (com velocidade igual à velocidade inicial naquela direção e aceleração igual à aceleração gravítica). A trajetória é parabólica.
- **Lançamento horizontal:** resulta em movimento curvilíneo de queda livre cuja velocidade inicial tem direção horizontal (perpendicular à força gravítica). A velocidade inicial influencia o alcance do projétil, mas não o seu tempo de queda.
- **Lançamento oblíquo:** movimento curvilíneo de queda livre cuja velocidade inicial não é perpendicular à força gravítica.
- **Forças de ligação:** tensão, força normal, força de atrito; restringem a trajetória de um corpo; dependem das forças aplicadas e das características do movimento.
- **Forças de atrito entre sólidos em deslizamento:** dependem do material e do polimento das superfícies em contacto mas não dependem da área das superfícies em contacto. Diminuem de intensidade em superfícies lubrificadas.
- **Força de atrito estático entre sólidos com tendência a deslizarem um sobre o outro:** existe quando as superfícies em contacto não deslizam uma em relação à outra mas são solicitadas a moverem-se. Tem a direção da força que solicita um dos corpos a mover-se, mas sentido oposto.
- **Força de atrito cinético entre sólidos que deslizam um sobre o outro:** existe quando há movimento de uma superfície em relação à outra. Tem a direção da velocidade do corpo que desliza, mas sentido oposto.
- **Intensidade máxima da força de atrito estático entre sólidos:**  $F_{ae}^{m\acute{a}x} = \mu_e N$ ;  $\mu_e$ : coeficiente de atrito estático (depende dos materiais em contacto).
- **Intensidade da força de atrito cinético entre sólidos em deslizamento:**  $F_{ac} = \mu_c N$ ; é proporcional à intensidade da força normal;  $\mu_c$ : coeficiente de atrito cinético (depende dos materiais em contacto); em geral, para o mesmo par de materiais,  $F_c < F_{ae}^{m\acute{a}x}$ , pois  $\mu_c < \mu_e$ .





## ATIVIDADE LABORATORIAL 1.1

### Lançamento horizontal

Um atirador olímpico dispara a sua pistola horizontalmente (**Fig. 73**).

A que altura acima do nível do alvo deve colocar a saída da bala para, a uma dada distância, acertar no alvo?



**Fig. 73** Adelino Rocha, do Clube de Tiro de Fervença, nos Jogos Paralímpicos do Rio de Janeiro, 2016 (Federação Portuguesa de Tiro).

#### Questões pré-laboratoriais



- O que significa dizer que um projétil é disparado horizontalmente?
- Um movimento deste tipo é a composição de dois movimentos: um segundo a horizontal e outro segundo a vertical. Caracterize o movimento, indicando como varia a componente escalar da velocidade com o tempo, e apresente a expressão da coordenada de posição em função do tempo:
  - para a direção horizontal.
  - para a direção vertical.
- No estudo do lançamento horizontal de um projétil pode usar-se uma rampa, apoiada sobre uma mesa. Uma esfera, após ser abandonada de uma certa altura na rampa, atinge a sua base e sai horizontalmente desta como mostra a **Fig. 74**.
  - Indique duas vantagens deste dispositivo para o estudo do lançamento horizontal de um projétil.
  - Esboce a trajetória de queda livre da esfera após ela sair da base da rampa.
  - A esfera é abandonada sucessivamente de duas posições, uma mais acima na rampa, e outra mais abaixo. Relacione, qualitativamente:
    - as velocidades de saída da base da rampa;
    - as distâncias, medidas na horizontal (alcance), a que atinge o solo;
    - os tempos que demora a chegar ao solo.
- Considere que a esfera é lançada com uma velocidade horizontal  $v_0$  de uma altura  $h$  em relação ao solo. Deduza a expressão que relaciona o alcance,  $A$ , a velocidade de saída,  $v_0$ , e a altura de lançamento em relação ao solo,  $h$ .
- Pretende determinar-se experimentalmente a velocidade de uma esfera. Um equipamento que pode ser usado para este fim é uma célula fotoelétrica. Que outro equipamento é necessário utilizar? Como se deverá proceder?



**Fig. 74** Lançamento horizontal de projétil após movimento numa rampa.



## ATIVIDADE LABORATORIAL 1.1 (cont.)

### Trabalho laboratorial



**Fig. 75** Montagem experimental para o estudo do lançamento horizontal.

Nesta atividade pretende obter-se, para um lançamento horizontal de uma certa altura, a relação entre o alcance de um projétil e a sua velocidade inicial.

**Material:** rampa apoiada sobre uma mesa, esfera ou berlinde com diâmetro superior a 1,5 cm, célula fotoelétrica com ligação a um cronómetro digital, uma craveira, uma fita métrica e um alvo (caixa com areia ou papel químico e folha de papel branco).

Faça a montagem da **Fig. 75** e ligue a célula fotoelétrica. Utilize um fio-de-prumo (ou massa marcada suspensa de um fio) para registar no solo a posição da vertical de saída da esfera da base da rampa.

- 1.** Meça o diâmetro da esfera com uma craveira. Registe o resultado da medida tendo em conta a incerteza absoluta de leitura do instrumento.
- 2.** Meça a altura de lançamento horizontal da esfera. Registe o resultado da medida, tendo em conta a incerteza absoluta de leitura do instrumento.
- 3.** Abandone a esfera de uma certa altura na rampa (de modo a prever a posição onde vai cair é conveniente experimentar uma vez, sem recolha de dados). Execute este procedimento para, pelo menos, cinco alturas diferentes na rampa e, para cada altura, repita-o três vezes. Em todos os procedimentos registe o tempo de passagem da esfera pelo feixe de luz,  $\Delta t$ , e o alcance,  $A$ , construindo uma tabela com os dados.

### Questões pós-laboratoriais



- 1.** Complete a tabela de dados determinando, para cada altura inicial da esfera:
  - o tempo mais provável da passagem da esfera pela célula e a velocidade;
  - o alcance mais provável.
- 2.** Identifique eventuais erros experimentais.
- 3.** Elabore o gráfico de pontos do alcance,  $A$ , em função do módulo da velocidade com que a esfera sai da base da rampa,  $v_0$ . Determine a reta que melhor se ajusta ao conjunto de pontos experimentais e a respetiva equação.
  - a)** Que relação pode estabelecer entre as variáveis? Qual é o significado do declive da reta?
  - b)** Estarão os resultados obtidos de acordo com o previsto?
- 4.** Noutra experiência, obteve-se a reta de regressão  $y = 0,314x - 0,017$  para o gráfico de  $A = f(v_0)$ .
  - a)** Qual seria o alcance da esfera se o módulo da velocidade de lançamento fosse  $2,0 \text{ m s}^{-1}$ ?
  - b)** Qual seria o módulo da velocidade inicial se o alcance fosse  $1,2 \text{ m}$ ?
- 5.** Uma pistola de tiro olímpico dispara uma bala a  $1600 \text{ km/h}$ . Suponha desprezável a resistência do ar.
  - a)** Qual será o alcance se o disparo for feito a  $1,6 \text{ m}$  do solo?
  - b)** Um alvo encontra-se a  $50 \text{ m}$ . De que altura, acima do nível do alvo, se deve disparar para acertar no alvo?



## ATIVIDADE LABORATORIAL 1.2

### Atrito estático e atrito cinético

Por que razão pode, na mesma rampa, um corpo ficar em repouso e outro deslizar? E se a inclinação da rampa aumentar, pode o corpo em repouso entrar em movimento?

Por que razão é mais fácil manter um corpo em movimento do que retirá-lo do repouso?



#### Questões pré-laboratoriais

- Um automóvel, de massa  $m$ , está estacionado numa rampa de inclinação  $\theta_0$  e fica na iminência de deslizar para um ângulo  $\theta_{\text{máx}}$ .
  - Que forças atuam sobre o automóvel quando a inclinação é  $\theta_0$ ? Obtenha uma expressão para as respetivas intensidades tendo em conta a massa do automóvel,  $m$ , o ângulo da rampa,  $\theta_0$ , e o coeficiente de atrito estático,  $\mu_e$ .
  - A inclinação da rampa aumenta desde  $\theta_0$  até  $\theta_{\text{máx}}$ .
    - Indique, justificando, como variam as intensidades da força normal e da força de atrito estático.
    - Mostre que o coeficiente de atrito estático,  $\mu_e$ , é igual a  $\tan \theta_{\text{máx}}$ .
- Observe a **Fig. 76**: os corpos **A** e **B**, de massas  $m_A$  e  $m_B$ , respetivamente, estão ligados por um fio inextensível que passa numa roldana. O atrito no eixo da roldana e a massa da roldana são desprezáveis.
  - Represente as forças que atuam sobre **A** e sobre **B**.
  - Enquanto o corpo **A** não deslizar, qual é a intensidade da força de atrito que atua sobre ele?
  - O corpo **A** fica na iminência de deslizar quando se aumenta a massa de **B** até um valor máximo,  $m_{B,\text{máx}}$ .
    - Obtenha a expressão para o coeficiente de atrito estático,  $\mu_e$ , em função de  $m_A$  e  $m_{B,\text{máx}}$ .
    - Se a massa de **A** aumentar,  $m_{B,\text{máx}}$  varia. Que gráfico traduz essa variação?

- Suponha que tem disponíveis blocos paralelepípedicos, com faces revestidas de materiais diferentes e faces com áreas diferentes, e diversas massas marcadas. Na montagem da **Fig. 76**, **A** é um desses blocos e **B** uma ou mais massas marcadas.



**Fig. 76** Os dois corpos, ligados por um fio, estão em repouso devido à força de atrito.

Indicando as variáveis que deverá manter constantes, planeie uma experiência de modo a concluir se a força de atrito estático máximo depende:

- da massa do bloco **A**;
  - da área de contacto entre o bloco **A** e a superfície de apoio;
  - do tipo de materiais em contacto.
- Para uma massa do bloco **B** superior a  $m_{B,\text{máx}}$ , os blocos **A** e **B** entram em movimento. Classifique esse movimento e obtenha uma expressão para o coeficiente de atrito cinético,  $\mu_c$ , em função da aceleração do sistema e da massa dos blocos.





## ATIVIDADE LABORATORIAL 1.2 (cont.)

### Trabalho laboratorial



Nesta atividade investiga-se a dependência da força de atrito com as restantes forças que atuam sobre um corpo assente num plano, com o tipo de materiais em contacto e com a área de contacto, e determinam-se coeficientes de atrito estático e de atrito cinético.

**Material:** plano inclinado, calha, blocos paralelepípedicos com faces de áreas diferentes e revestidas de materiais diferentes, sensor de força, sensor de movimento, fio, massas marcadas, roldana com atrito reduzido, fita métrica e balança.

Cada grupo poderá estudar a dependência da força de atrito estático ou cinético com uma dada variável: **força normal**, **área de contacto** ou **tipo de materiais em contacto**. Cada medida deverá repetir-se pelo menos três vezes. As superfícies de apoio dos blocos devem ser do mesmo tipo. Após interpretar o procedimento, deve ser elaborada uma tabela para registar os dados experimentais.



**Fig. 77** Medição de forças com um sensor de força.

### 1. Dependência da força de atrito com a força normal

Procedimento usando um sensor de força e um sistema de aquisição de dados (Fig. 77):

- a) Meça a massa de um bloco paralelepípedo.
- b) Com o bloco em repouso sobre uma superfície horizontal, exerça uma força de intensidade crescente até o bloco entrar em movimento, mantendo depois a sua velocidade. A partir dos dados obtidos (gráfico e tabelas), registre a intensidade da força de atrito estático máxima e determine a intensidade média da força de atrito cinético.
- c) Mantendo a mesma face apoiada na superfície, coloque sucessivamente massas marcadas sobre o bloco, utilizando pelo menos cinco conjuntos *bloco + sobrecargas*, e, para cada um, repita o procedimento da alínea b).
  - i) por uma face de igual área, mas revestida com material diferente;
  - ii) por uma face com o mesmo material de revestimento, mas com área diferente.

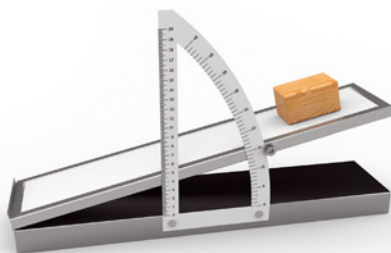
### 2. Dependência da força de atrito com o tipo de materiais das superfícies em contacto e com a área da superfície de contacto

Procedimento usando um sensor de força e um sistema de aquisição de dados (Fig. 77):

- a) Meça a massa de um bloco paralelepípedo.
- b) Procedimento usando a montagem da Fig. 76:

### 3. Determinação do coeficiente de atrito estático

- a) Procedimento usando um plano inclinado (Fig. 78):  
Coloque o bloco na mesma superfície horizontal e apoiado na mesma face que em 1. Incline a superfície progressivamente até o bloco ficar na iminência de deslizar. Repita o procedimento mais duas vezes registando as medidas.
- b) Procedimento usando a montagem da Fig. 76:



**Fig. 78** Medição do coeficiente de atrito estático utilizando um plano inclinado.

Coloque o bloco na mesma superfície horizontal e apoiado na mesma face que em **1**. Registe a sua massa. Suspenda massas marcadas até o bloco ficar na iminência de deslizar e registe a respectiva massa (se não tiver massas marcadas adequadas pode usar um recipiente ao qual vai juntando areia). Adicione sucessivamente massas marcadas sobre o bloco, utilizando pelo menos cinco conjuntos *bloco + sobrecargas*, e, para cada um, repita o procedimento. Registe as massas do conjunto e do corpo suspenso.

#### 4. Determinação do coeficiente de atrito cinético

Procedimento usando um sensor de movimento e um sistema de aquisição de dados (**Fig. 79**).

Após medir a massa do bloco, coloque-o na mesma superfície horizontal e apoiado pela mesma face que em **1**. Suspenda massas marcadas que ponham o sistema em movimento. Segure no bloco e, após acionar o sensor, largue-o. A partir do gráfico velocidade-tempo obtenha as acelerações do bloco no movimento acelerado e retardado.



**Fig. 79** Medição da velocidade e determinação da aceleração usando um sensor de movimento.

### Questões pós-laboratoriais

Os grupos devem apresentar os seus resultados à turma e discuti-los. Para cada variável em estudo devem analisar os resultados experimentais: Adequam-se ao modelo teórico? Que situações, ou alteração das condições experimentais, podem ter conduzido a erros experimentais?

1. Dependência da força de atrito com a força normal:
  - a) Complete a tabela com os valores das massas, das intensidades das forças de atrito estático máximas, das forças de atrito cinético e da força normal.
  - b) Para a situação do plano horizontal, relacione graficamente: **i**) a intensidade da força de atrito estático máxima com a da força normal; e **ii**) a intensidade da força de atrito cinético com a da força normal. A partir das linhas de ajuste aos pontos experimentais, determine os coeficientes de atrito estático e cinético para os pares de materiais usados.
2. Dependência da força de atrito com o tipo de materiais das superfícies em contacto e com a área de contacto:
 

Complete a tabela com os registos das forças de atrito estático máximas e das forças de atrito cinético para as faces de igual área e diferente revestimento, e para as faces com diferentes áreas e o mesmo revestimento. Calcule os coeficientes de

atrito estático e cinético para os pares de materiais em contacto.

3. Determinação do coeficiente de atrito estático:
  - a) Determine o valor médio do ângulo do plano inclinado para o qual o bloco ficou na iminência de deslizar e obtenha o coeficiente de atrito estático. Compare este valor com o obtido pelos outros grupos.
  - b) Usando os dados do procedimento da montagem da **Fig. 76**, elabore o gráfico que relaciona as massas do corpo suspenso e do conjunto *bloco + sobrecarga*. A partir dele, determine o coeficiente de atrito estático. Compare este valor com o anteriormente obtido.
4. Determinação do coeficiente de atrito cinético:
 

Complete a tabela com as massas do bloco e do corpo suspenso, e com as acelerações. Determine o coeficiente de atrito cinético e compare-o com o coeficiente de atrito estático determinado pelos outros grupos.

  - a) Será mais fácil empurrar um objeto em movimento ou tirá-lo do repouso? Justifique.
  - b) Conclua qual de dois corpos do mesmo material, mas de massas diferentes, largados de um mesmo nível de um plano inclinado, chegará primeiro à base do plano.

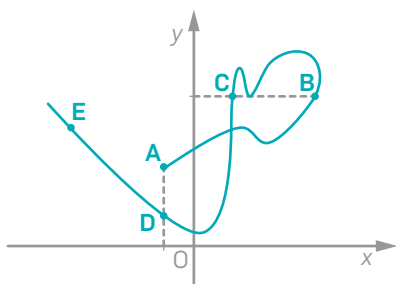
# QUESTÕES

## Nota

Na resolução das questões, considere  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

### 1.1.1 Posição, equações paramétricas do movimento e trajetória

1. Uma folha descreve a trajetória representada na figura, passando pelos pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E**.



No referencial representado, faça corresponder cada um dos pontos a um dos seguintes vetores posição, em unidades arbitrárias.

- I.  $\vec{r} = 2,3\vec{e}_x + 2,8\vec{e}_y$   
 II.  $\vec{r} = -0,5\vec{e}_x + 1,5\vec{e}_y$   
 III.  $\vec{r} = 0,75\vec{e}_x + 2,8\vec{e}_y$   
 IV.  $\vec{r} = -2,3\vec{e}_x + 2,3\vec{e}_y$   
 V.  $\vec{r} = -0,5\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_y$
2. Num referencial com origem num canto de uma sala, um inseto voa, ocupando, em instantes diferentes, as posições  $\vec{r}_1 = 5\vec{e}_x$ ,  $\vec{r}_2 = -2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$  e  $\vec{r}_3 = 2\vec{e}_x - \vec{e}_y + 2\vec{e}_z$ , em unidades SI. Em que posição está o inseto mais distanciado desse canto da sala?
3. Um ciclista percorreu 300 m para norte, em seguida 400 m para nordeste e, finalmente, 500 m para este. A distância a que se encontra do ponto de partida no final do percurso, em metros, é:

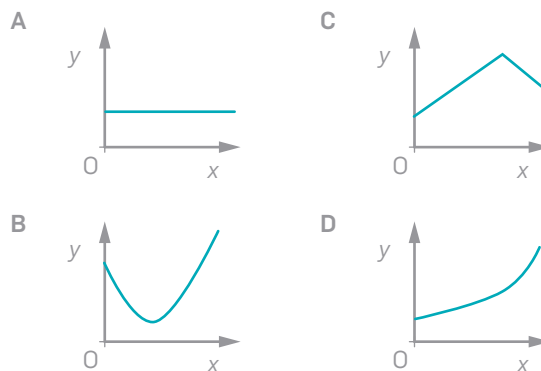
- (A)  $\sqrt{(300)^2 + (400)^2 + (500)^2}$   
 (B)  $300 + 400 + 500$   
 (C)  $\sqrt{(500 + 400 \cos 45^\circ)^2 + (300 + 400 \sin 45^\circ)^2}$   
 (D)  $\sqrt{500^2 + (400 \cos 45^\circ)^2 + 300^2 + (400 \sin 45^\circ)^2}$

4. Uma pessoa percorre 5,0 m numa direção que faz  $37^\circ$  com a linha oeste-este, para o lado do norte. Desloca-se depois 10,0 m numa direção que faz  $60^\circ$  com a linha sul-norte para o lado poente.

Determine a distância percorrida e a que distância ficou da posição de partida no final do percurso.

5. Um automóvel move-se numa porção retilínea de uma autoestrada, sendo o movimento do seu centro de massa descrito por  $x(t) = 90 + 72t + 1,8t^2$  (SI).

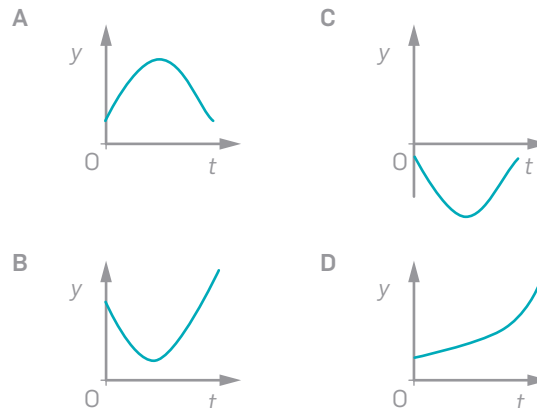
Qual dos gráficos pode representar a sua trajetória?



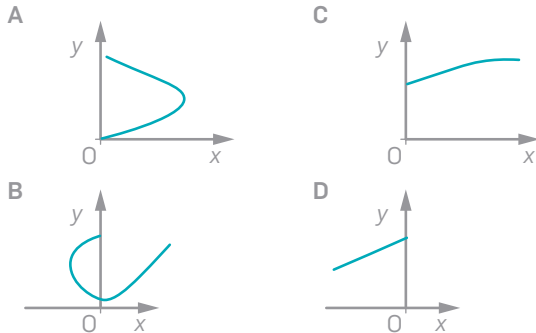
6. A posição de um corpo pode variar ao longo do tempo de modo diverso, descrevendo o corpo diferentes trajetórias. Considere os movimentos I, II e III descritos pelas seguintes equações:

I.  $x_I = 8t - 2t^2$        $y_I = 4t$   
 II.  $x_{II} = -2,0t + 0,5t^2$        $y_{II} = 6,0 - 4,0t + t^2$   
 III.  $x_{III} = 0,2t + 0,01t^3$        $y_{III} = 7 + 0,1t^2$

- a) Classifique o movimento em cada eixo.  
 b) Para o movimento II, qual dos gráficos representa  $y_{II}(t)$  nos primeiros 4 s de movimento?



c) Qual dos gráficos seguintes pode representar a trajetória nos primeiros 4 s do movimento II?



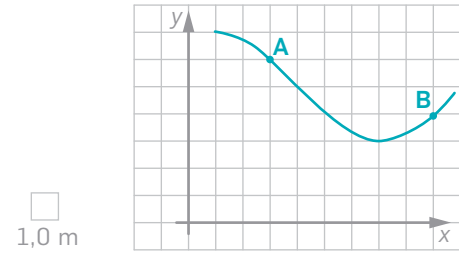
7. A figura mostra uma imagem de uma parte de Coimbra obtida no *Google Earth*. Nessa imagem assinalou-se o edifício do Departamento de Física da Universidade, ponto **A**, e colocou-se um sistema de eixos com origem no Largo da Portagem.



- Na escala e sistema de eixos indicados, determine o vetor posição do Departamento de Física e a sua distância à origem do referencial.
- Durante 10 s, um automóvel desloca-se ao longo de uma avenida que sai do Largo da Portagem, sendo o movimento do seu centro de massa descrito por  $x = 50 + 8,0t + 0,2t^2$  e  $y = 50 - 4,0t - 0,1t^2$ 
  - Indique o tipo de movimento em cada eixo.
  - Indique, justificando, a trajetória do automóvel.

### 1.1.2 Deslocamento, velocidade média, velocidade e aceleração

8. A figura mostra uma parte da trajetória do centro de massa de um pequeno barco. O ponto **B** foi alcançado 4,0 s depois do ponto **A**.



- Represente os vetores posição para os pontos **A** e **B** e o vetor deslocamento entre esses dois pontos.
  - Apresente as expressões dos vetores posição para os pontos **A** e **B**, no referencial representado, e, a partir delas, mostre que o vetor deslocamento resulta da diferença entre esses dois vetores.
  - Determine a velocidade média entre **A** e **B** e o respetivo módulo.
9. Os três primeiros segundos de movimento de um pássaro são descritos pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} x = 2t^2 - 5t \\ y = t^3 - 3t^2 + 6 \end{cases} \text{ (SI)}$$

Qual das expressões traduz, no SI, a velocidade do pássaro em função do tempo?

- $\vec{v}(t) = (4t - 5)\vec{e}_x - (3t^2 - 6t + 6)\vec{e}_y$
  - $\vec{v}(t) = (4t - 5)\vec{e}_x + (3t^2 - 6t)\vec{e}_y$
  - $\vec{v}(t) = (2t - 5)\vec{e}_x + (3t - 6t)\vec{e}_y$
  - $\vec{v}(t) = (2t - 5)\vec{e}_x + (t^2 - 3t)\vec{e}_y$
10. O centro de massa de um pequeno barco tem um movimento definido pelo seguinte vetor posição:
- $$\vec{r}(t) = (t + 1)\vec{e}_x + 4t^2\vec{e}_y \text{ (SI)}$$
- Para os primeiros 5 s, esboce uma representação estroboscópica para o movimento em cada eixo e trace os gráficos  $x(t)$  e  $y(t)$ .
  - Que trajetória descreve o barco?
  - Qual é o deslocamento do barco nos dois primeiros segundos? O seu módulo será maior ou menor do que a distância percorrida?
  - No SI, a velocidade média nos dois primeiros segundos é:
    - $\vec{e}_x + 8\vec{e}_y$
    - $\vec{e}_x + 16\vec{e}_y$
    - $1,5\vec{e}_x + 8\vec{e}_y$
    - $3\vec{e}_x + 16\vec{e}_y$
  - Compare, justificando, a velocidade e a aceleração nos instantes  $t = 1$  s e  $t = 3$  s.

11. O movimento de um carrinho telecomandado é descrito por  $\vec{r}(t) = 2(t-1)\vec{e}_x + (4t^3 + 2)\vec{e}_y$  (SI).

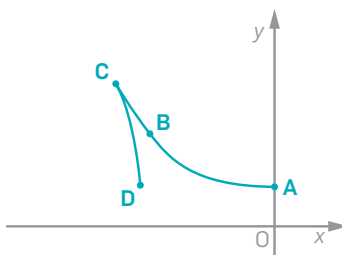
- Indique as equações paramétricas e esboce a trajetória com o auxílio da calculadora gráfica.
- O movimento em cada eixo é:
  - uniforme no  $x$  e uniformemente variado no  $y$ .
  - uniformemente variado em ambos os eixos.
  - retardado no  $x$  e acelerado no  $y$ .
  - uniforme no  $x$  e acelerado não uniformemente no  $y$ .
- Esboce os gráficos das componentes escalares da velocidade em função do tempo e determine os respectivos valores nos instantes  $t = 0$  s e  $t = 2$  s.
- Indique, justificando, se a posição do carrinho varia mais rapidamente em  $t = 0$  s ou  $t = 2$  s.
- Qual é a aceleração média nos dois primeiros segundos?
- Apresente a componente escalar da aceleração nos instantes  $t = 0$  s e  $t = 2$  s.

### 1.1.3 Componentes tangencial e normal da aceleração

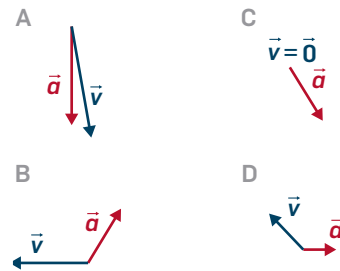
12. Na tabela seguinte, a cada tipo de movimento associe as respetivas componentes da aceleração.

I. Circular e uniforme	A. $a_t = 0$ $a_n = 0$
II. Retilíneo e uniforme	B. $a_t = 0$ $a_n \neq 0$
III. Retilíneo uniformemente acelerado	C. $a_t \neq 0$ $a_n \neq 0$
IV. Curvilíneo uniformemente retardado	D. $a_t \neq 0$ $a_n = 0$

13. A figura representa a trajetória de um pássaro, onde se assinalaram os pontos **A**, **B**, **C** e **D**.



a) A cada ponto associe um dos esquemas seguintes, em que se representa a velocidade e a aceleração.



b) Indique, justificando, um ponto onde o movimento seja acelerado.

14. Indique uma situação (se existir) em que:

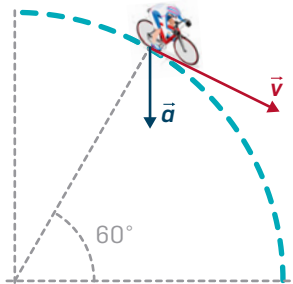
- a velocidade é sempre perpendicular ao vetor posição.
- o movimento tem aceleração mas o módulo da velocidade é constante.
- o movimento é acelerado e a velocidade é constante.
- a velocidade é nula num dado instante mas a aceleração não é.
- a aceleração é nula num dado instante mas a velocidade não é.
- a velocidade e a aceleração são ambas nulas num dado instante.
- a velocidade é constantemente perpendicular à força resultante.
- a força resultante só faz variar a direção da velocidade.
- a força resultante só faz variar a rapidez do movimento.
- a força resultante faz variar a velocidade.

15. Nas situações seguintes, caracterize as componentes tangencial e centrípeta da aceleração, indicando a orientação da velocidade em relação à aceleração.

- Um automóvel segue na autoestrada A23 com velocidade constante.
- Um automóvel descreve uma curva, marcando o velocímetro um valor constante.
- Um automóvel faz uma travagem numa curva.
- Uma patinadora no gelo descreve curvas na pista, ora acelerando ora travando.



16. Nas situações seguintes indique, justificando, qual é a curva descrita onde é maior o desconforto para o passageiro do automóvel.
- A. O automóvel descreve uma curva com o velocímetro a marcar um certo valor e a seguir outra igual com o velocímetro indicando o dobro.
- B. O automóvel descreve duas curvas de raios  $r_1$  e  $r_2$ , com  $r_1 > r_2$ , marcando o velocímetro o mesmo valor.
17. A figura representa a velocidade e a aceleração de um ciclista no instante em que se move a 18 km/h e o raio de curvatura é 80 m.



- a) Determine o módulo da componente normal da aceleração.
- b) O módulo da aceleração pode ser calculado pela expressão:
- (A)  $\frac{v^2}{r} \cos 60^\circ$       (C)  $\frac{v^2}{r \sin 60^\circ}$
- (B)  $\frac{v^2}{r} \sin 60^\circ$       (D)  $\frac{v^2}{r \cos 60^\circ}$
- c) Indique, justificando, qual é a variação do módulo da velocidade por unidade de tempo.
18. Num carrossel, uma criança de 40,0 kg descreve trajetórias circulares, de 5,00 m de diâmetro, com velocidade de módulo constante, dando duas voltas em 20,0 s.
- a) Que distância percorre nesse intervalo de tempo?
- b) No intervalo de tempo em que dá duas voltas, o módulo da sua velocidade média é, no SI:
- (A)  $\frac{\pi}{2}$       (B)  $4\pi$       (C)  $\frac{\pi}{4}$       (D) 0
- c) Caracterize, em cada instante, a velocidade da criança, a sua aceleração e a força resultante que atua sobre ela.

19. O centro de massa de um barco tem um movimento definido pelo seguinte vetor posição:

$$\vec{r}(t) = (t + 1)\vec{e}_x + \frac{8}{3}t^3\vec{e}_y \quad (\text{SI})$$

Para o instante  $t = 1$  s determine:

- a) o ângulo entre os vetores velocidade e aceleração.
- b) as componentes tangencial e normal da aceleração e o vetor aceleração em função dessas componentes.
- c) o raio de curvatura da trajetória.

### 1.1.4 Segunda Lei de Newton em referenciais fixos e ligados à partícula

20. Comente as seguintes afirmações:

- A. A componente normal (centrípeta) da força resultante só existe quando um corpo descreve um movimento circular e uniforme.
- B. A componente tangencial da força resultante só existe em trajetórias retilíneas e a componente normal só existe em trajetórias curvilíneas.
- C. A componente normal da força resultante tem sempre a direção perpendicular à velocidade, apontando para dentro ou para fora da curva descrita, enquanto a componente tangencial tem sempre a direção e o sentido da velocidade.

21. Um automóvel de 1,0 t parte do repouso e segue numa estrada circular de raio 100 m. Suponha que a rapidez do automóvel aumenta uniformemente até aos 72 km/h em 10 s. Neste instante os módulos das componentes tangencial e normal da força resultante são, respetivamente:
- (A)  $2,0 \times 10^3$  N e  $4,0 \times 10^3$  N
- (B)  $4,0 \times 10^3$  N e  $4,0 \times 10^3$  N
- (C)  $4,0 \times 10^3$  N e  $2,0 \times 10^3$  N
- (D)  $1,0 \times 10^3$  N e  $2,0 \times 10^3$  N

22. Um automóvel de 900 kg descreve um movimento circular, no plano horizontal, numa rotunda com raio 8,0 m. O módulo da velocidade do seu centro de massa aumenta uniformemente  $0,60 \text{ m s}^{-1}$  em cada segundo. Escreva a expressão vetorial da força resultante num referencial ligado à partícula para o instante em que o velocímetro marca  $36 \text{ km h}^{-1}$ .

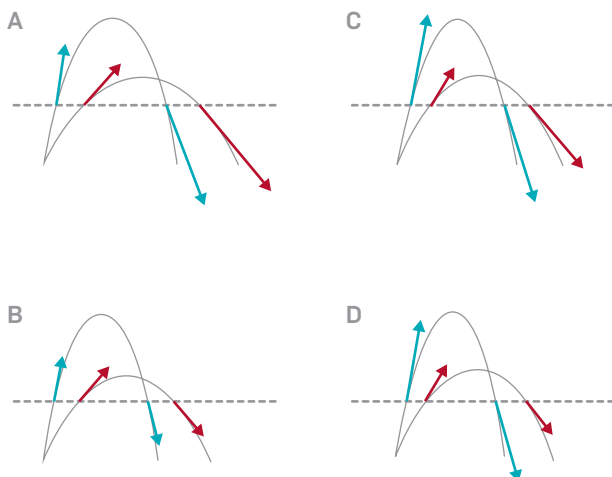
### 1.1.5 Movimentos sob a ação de uma força resultante constante

23. Um carrinho de 200 g move-se com velocidade  $\vec{v} = 3,0\vec{e}_y$  (m s<sup>-1</sup>). Quando se encontra na posição  $\vec{r} = 0,3\vec{e}_x$  (m) é atuado por uma força resultante  $\vec{F} = 0,5\vec{e}_x$  (N) durante 10 s.

- a) Escreva as equações paramétricas do movimento, após a atuação da força.
- b) Faça um esboço da trajetória e represente sobre ela os vetores indicados para o instante inicial.
- c) Determine a expressão do módulo da velocidade em função do tempo.
- d) Indique para que instante,  $t = 2$  s ou  $t = 5$  s:
  - i) varia mais rapidamente o módulo da velocidade.
  - ii) varia mais rapidamente a direção da velocidade.
  - iii) é maior o raio de curvatura.

24. Um avião de socorro viaja horizontalmente a uma altura de 100 m, a 144 km h<sup>-1</sup>. Pretende deixar-se cair um pacote para atingir um ponto a 200 m da sua vertical. Verifique se aquelas condições permitem alcançar o objetivo. É desprezável a resistência do ar.

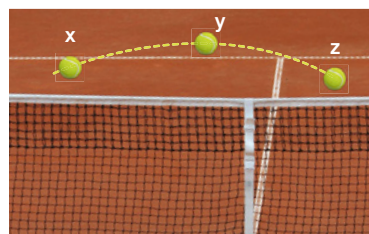
25. Um projétil foi lançado duas vezes, a partir do mesmo ponto, com velocidade inicial de igual módulo mas ângulos diferentes. É desprezável a resistência do ar. Qual das opções pode representar as velocidades do projétil à altura correspondente à linha a tracejado?



26. Da janela de um apartamento, a 20,0 m de altura, lança-se horizontalmente um objeto que toca o solo a 5,0 m da base do prédio. É desprezável a resistência do ar.

- a) Indique o tipo de trajetória e o tempo de voo.
- b) Determine o módulo da velocidade no instante inicial e quando atinge o solo.
- c) Determine o raio de curvatura quando o objeto se encontra a 10,0 m do solo.
- d) Se o objeto fosse largado e não lançado da janela, demoraria mais ou menos tempo a chegar ao solo? Justifique.

27. A figura mostra a trajetória de uma bola de ténis que passa sucessivamente pelos pontos X, Y e Z, sendo Y a posição da altura máxima. É desprezável a resistência do ar.



Para cada ponto, que opção representa o vetor:

a) velocidade?

	X	Y	Z
(A)	↑	zero	↓
(B)	↓	→	↓
(C)	↗	→	↘
(D)	↗	zero	↘

b) força?

	X	Y	Z
(A)	↗	↓	↘
(B)	↑	zero	↑
(C)	↓	↓	↓
(D)	↗	zero	↘

c) aceleração?

	X	Y	Z
(A)	↗	↓	↘
(B)	↑	zero	↑
(C)	↓	↓	↓
(D)	↗	zero	↗

28. Um atleta efetua um salto em comprimento segundo um ângulo de  $20^\circ$  com a horizontal e velocidade de módulo  $11 \text{ m s}^{-1}$ . O movimento do seu centro de massa é, aproximadamente, o de um projétil. É desprezável a resistência do ar. Determine:

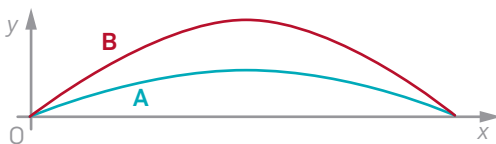
- a) o tempo de voo e o alcance do salto.  
b) a altura máxima atingida e a velocidade nesse ponto.

29. Um jogador de futebol dá um pontapé numa bola, ao nível do solo, a  $36 \text{ m}$  de um muro com  $2,5 \text{ m}$  de altura. A bola parte com velocidade inicial de módulo  $72 \text{ km h}^{-1}$  e segundo um ângulo de  $53^\circ$  com a horizontal. É desprezável a resistência do ar.

- a) Mostre que a bola passa por cima do muro e averigue se é quando sobe ou quando desce.  
b) Se existir vento, os resultados alterar-se-ão? Porquê?  
c) Verifique se a bola atingiria o muro se fosse pontapeada a  $40 \text{ cm}$  do solo, com metade do módulo da velocidade e segundo um ângulo de  $32^\circ$  com a horizontal.

30. Quando uma nadadora salta de uma prancha, a distância mínima a que deve passar por ela ao cair é  $1,0 \text{ m}$ , por razões de segurança. A nadadora faz o salto projetando o corpo segundo um ângulo de  $14^\circ$  com a vertical e atinge uma altura máxima de  $1,3 \text{ m}$  relativamente à prancha. Considere o movimento do seu centro de massa. É desprezável a resistência do ar. Verifique se o salto é seguro.

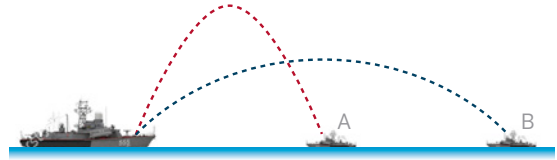
31. A figura representa as trajetórias de dois projéteis, **A** e **B**, lançados do mesmo ponto, e que atingem o solo na mesma posição.



Indique, justificando, que opção pode representar as velocidades iniciais, no SI, de **A** e de **B**.

- (A)  $\vec{v}_A = 8\vec{e}_x + 6\vec{e}_y$ ;  $\vec{v}_B = 6\vec{e}_x + 8\vec{e}_y$   
(B)  $\vec{v}_A = 8\vec{e}_x + 6\vec{e}_y$ ;  $\vec{v}_B = 4\vec{e}_x + 12\vec{e}_y$   
(C)  $\vec{v}_A = 8\vec{e}_x + 6\vec{e}_y$ ;  $\vec{v}_B = 8\vec{e}_x + 12\vec{e}_y$   
(D)  $\vec{v}_A = 16\vec{e}_x + 6\vec{e}_y$ ;  $\vec{v}_B = 8\vec{e}_x + 6\vec{e}_y$

32. Num teste de tiro, um cruzador dispara simultaneamente dois tiros para dois navios, **A** e **B**, com velocidade de igual módulo. O navio **B** está duas vezes mais distante do cruzador do que o navio **A**. É desprezável a resistência do ar.



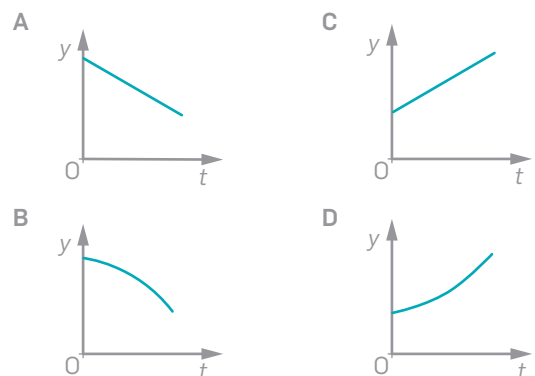
Sendo, respetivamente,  $t_A$  e  $t_B$  os tempos que as balas demoram até aos navios, **A** e **B**, verifica-se que:

- (A)  $t_A = t_B$                       (C)  $t_B = 2t_A$   
(B)  $t_A > t_B$                       (D)  $t_B = \sqrt{2} t_A$

33. Três projéteis **A**, **B** e **C**, foram lançados no mesmo instante e do mesmo ponto do solo com velocidades, no SI, iguais a  $\vec{v}_A = 4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$ ,  $\vec{v}_B = 6\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$  e  $\vec{v}_C = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$ . É desprezável a resistência do ar. Indique, justificando, qual das afirmações seguintes é verdadeira.

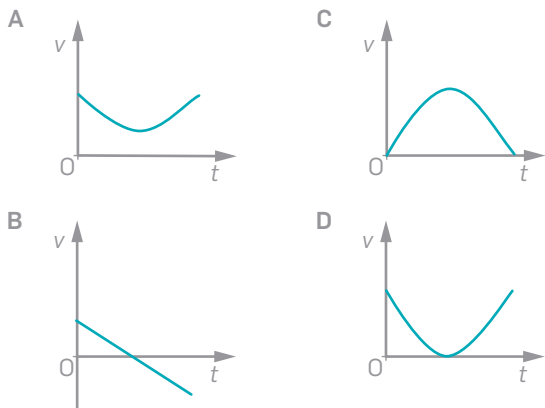
- A. O alcance horizontal de **A** é inferior ao de **C**.  
B. O projétil **B** atinge o solo antes do projétil **A**.  
C. O projétil que atinge maior altura é o **A**.  
D. O projétil **C** é o primeiro a tocar no solo.

34. Uma esfera de  $250 \text{ g}$  move-se verticalmente para baixo, com velocidade  $\vec{v}_A = -2,0\vec{e}_y \text{ (m s}^{-1}\text{)}$ , quando, para além da força gravítica, fica sujeita à ação de uma força exterior  $\vec{F} = 3,0\vec{e}_x + 2,5\vec{e}_y \text{ (N)}$  devido a uma rajada de vento. Considere  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ . Indique, justificando, que gráfico traduz a variação da coordenada de posição  $y$ , ao longo do tempo, no intervalo de tempo em que atua a força  $\vec{F}$ .

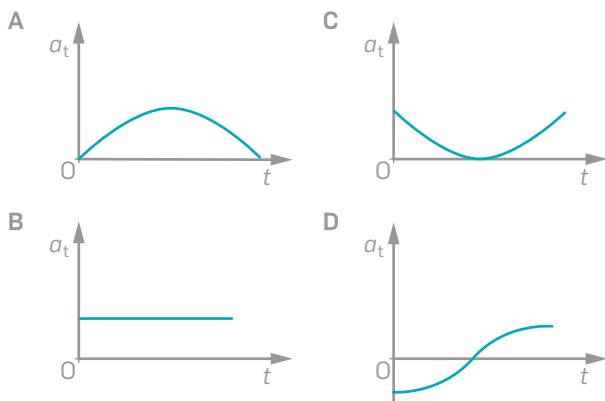


35. Um projétil foi lançado obliquamente para cima com velocidade de módulo  $v_0$ , a partir de um ponto ao nível do solo. É desprezável a resistência do ar.

a) Qual dos gráficos seguintes pode representar o módulo da sua velocidade em função do tempo?



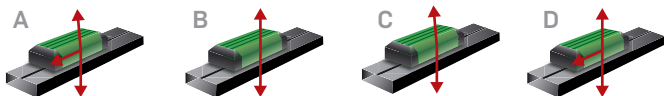
b) Qual dos gráficos seguintes pode representar a componente tangencial da aceleração em função do tempo?



### 1.1.6 Movimentos de corpos sujeitos a ligações

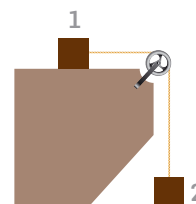
36. Numa calha de ar, inclinada, colocou-se um deslizador (bloco suspenso sobre almofada de ar).

a) Que opção representa as forças no deslizador?

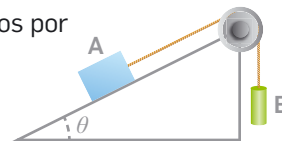


b) Imprimindo-se ao deslizador uma velocidade de módulo  $4,6 \text{ m s}^{-1}$ , a sua velocidade aumenta para  $4,8 \text{ m s}^{-1}$  após percorrer  $1,5 \text{ m}$ . Determine a inclinação da calha.

37. Dois blocos **1** e **2**, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , respetivamente, estão ligados por um fio como mostra a figura. O fio e a roldana são ideais e as forças dissipativas são desprezáveis. Mostre que o módulo da aceleração do sistema é inferior ao da aceleração gravítica.

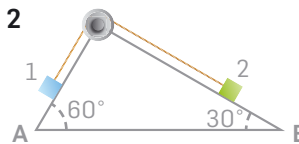


38. Dois corpos **A** e **B** estão ligados por um fio como mostra a figura. O corpo **A**, de  $500 \text{ g}$ , está sobre uma rampa de  $20,0^\circ$  de inclinação e o corpo **B**, de  $300 \text{ g}$ , está suspenso da outra extremidade do fio. O fio e a roldana são ideais e são desprezáveis as forças dissipativas.



- Após largados os corpos, conclua, justificando, se o corpo **B** sobe ou desce.
- Qual é o módulo da velocidade de **A** e **B** ao fim de  $2,00 \text{ s}$ , partindo do repouso?
- Que força exerce o fio no corpo **A**?

39. Na figura seguinte, os blocos **1** e **2** têm a mesma massa,  $m$ . O fio e a roldana são ideais e são desprezáveis as forças dissipativas.



- Quando se largam os dois blocos, em que sentido se move cada um? Caracterize o seu movimento e determine a aceleração.
- Suponha que os blocos **1** e **2** são mantidos em repouso e à mesma altura em relação à base **AB**. O fio é cortado.
  - A relação entre os módulos das velocidades quando chegam à base é:

(A)  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}$       (C)  $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}}$

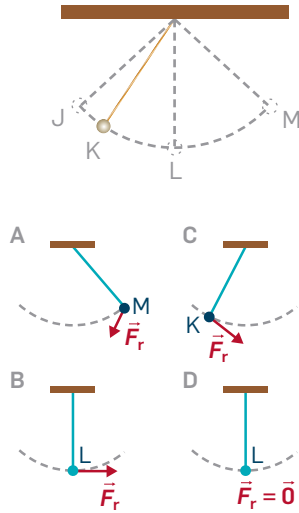
(B)  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}$       (D)  $\frac{v_1}{v_2} = 1$

- A relação entre os intervalos de tempo que demoram a chegar à base é:

(A)  $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}$       (C)  $\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}}$

(B)  $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}$       (D)  $\frac{t_1}{t_2} = 1$

40. Na figura, um pêndulo gravítico é largado da posição **J**, ficando a oscilar entre as posições **J** e **M**. Na posição assinalada por **L**, o fio tem a direção vertical. São desprezáveis as forças dissipativas.



Qual das opções representa a resultante das forças que atuam no pêndulo,  $\vec{F}_r$ ?

41. Um pêndulo gravítico oscila entre duas posições extremas **A** e **C**, passando em **B** pela posição vertical.

a) Selecione a afirmação correta.

- (A) Na posição **B** o peso é maior do que a tensão exercida pelo fio.
- (B) A componente normal da aceleração é maior na posição **B** e nula nas posições **A** e **C**.
- (C) A componente tangencial da aceleração é maior na posição **B** e nula nas posições **A** e **C**.
- (D) A tensão exercida pelo fio é máxima nas posições **A** e **C**.

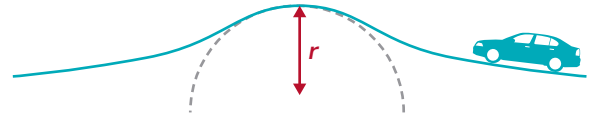
b) Esboce o gráfico que traduz a variação da energia cinética, no movimento de **B** para **C**, em função da altura.

42. Quando se põe a girar, com a mão, uma pequena pedra presa a um fio, a pedra descreve um movimento circular uniforme com trajetória num plano horizontal.

Justifique a veracidade das afirmações seguintes.

- A. A força resultante que atua sobre a pedra é dirigida para o centro da trajetória.
- B. A velocidade da pedra é independente da sua massa.
- C. Aumentando o comprimento do fio e mantendo o ângulo do fio com a vertical, aumenta a velocidade da pedra.
- D. Aumentando o ângulo do fio com a vertical, aumenta a velocidade angular.
- E. É impossível o fio fazer  $90^\circ$  com a vertical.

43. Observe a figura: um automóvel, de massa  $m$ , move-se com velocidade de módulo constante  $v$  na lomba de uma estrada cujo perfil longitudinal corresponde a um arco de circunferência de raio  $r$ . Considere  $g$  o módulo da aceleração gravítica.



a) O módulo da força normal exercida sobre o automóvel pela estrada, no instante em que este passa no ponto mais alto da trajetória, é:

- (A)  $m \frac{v^2}{r}$
- (B)  $mg + m \frac{v^2}{r}$
- (C)  $mg$
- (D)  $mg - m \frac{v^2}{r}$

b) O valor mínimo do módulo da velocidade do automóvel para que, ao passar no ponto mais alto, perca o contacto com a estrada é:

- (A)  $\sqrt{gr}$
- (B)  $\sqrt{2gr}$
- (C)  $\sqrt{g}$
- (D)  $gr$

44. Um motociclista desloca-se numa superfície com o perfil da figura. Passa na posição **L** a  $18,0 \text{ km h}^{-1}$ , cuja superfície tem  $40,0 \text{ m}$  de raio de curvatura, e, posteriormente, na posição **M** a  $54 \text{ km h}^{-1}$ , que tem  $80 \text{ m}$  de raio de curvatura. A massa do conjunto *motociclista + moto* é  $160 \text{ kg}$ .

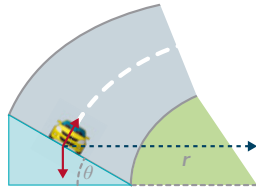


- a) Mostre que o motociclista não perde o contacto com o solo em **L**.
- b) Calcule a intensidade da força normal que o solo exerce sobre o conjunto no ponto **M**.

45. Numa roda gigante de um parque de diversões, um passageiro descreve um movimento circular uniforme, num plano vertical, estando sobre uma balança-dinamómetro. Mostre que a balança não marca sempre o mesmo valor.



46. A figura mostra um automóvel, de massa  $m$ , que descreve um arco de circunferência, de raio  $r$ , numa curva inclinada, com inclinação  $\theta$ , e as forças aplicadas no automóvel. O módulo da velocidade do automóvel é constante e o atrito desprezável. Considere  $g$  o módulo da aceleração gravítica. Estabeleça a correspondência entre as colunas I e II.

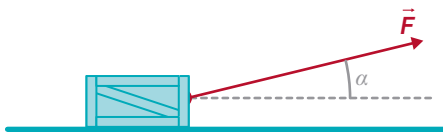


I	II
A. Força normal	I. $mg \tan \theta$
B. Aceleração	II. $\frac{mg}{\cos \theta}$
C. Módulo da velocidade	III. Nula
D. Aceleração tangencial	IV. $g \tan \theta$
E. Intensidade da resultante das forças	V. $\sqrt{rg \tan \theta}$

### 1.1.7 Forças de atrito entre sólidos

47. Sobre a força de atrito estático, quais das frases são verdadeiras?
- Só existe se o corpo onde atua, considerado pontual, estiver em movimento.
  - Existe em todas as situações do corpo em repouso.
  - Existe em repouso, sendo a sua intensidade igual ao produto do coeficiente de atrito estático pela intensidade da força normal.
  - Em repouso, a sua intensidade aumenta até um valor limite.
  - A sua intensidade varia com a área de contacto do corpo e com os materiais em contacto.

48. O bloco da figura, de massa  $m$ , é arrastado horizontalmente com velocidade constante.



Sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito cinético e  $g$  o módulo da aceleração gravítica, as intensidades da força normal e da força de atrito exercidas pelo solo são, respetivamente:

- $mg - F \sin \alpha$  e  $F \cos \alpha$
- $mg - F \cos \alpha$  e  $\mu F \sin \alpha$
- $mg + F \sin \alpha$  e  $F \cos \alpha$
- $mg + F \sin \alpha$  e  $\mu F \sin \alpha$

49. Um paralelepípedo, de arestas  $L$ ,  $2L$  e  $3L$  e com faces de igual revestimento, está sobre uma mesa. Quando apoiado sobre diferentes faces, fica na iminência de deslizar por ação de forças horizontais,  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$ . A relação entre as intensidades das forças é:

- $F_3 = 1,5F_2 = 3F_1$
- $F_3 = 2F_2 = 1,5F_1$
- $F_1 = 1,5F_2 = 3F_3$
- $F_3 = F_2 = F_1$

50. Um bloco de 2,0 kg, inicialmente em repouso num plano horizontal, é puxado por uma força horizontal  $\vec{F}$ . Os coeficientes de atrito estático e cinético entre as superfícies são, respetivamente, 0,4 e 0,3.

- Se  $F = 0$  N, a intensidade da força de atrito é:
  - 8 N
  - 20 N
  - 6 N
  - 0 N
- Se  $F = 8$  N, a intensidade da força de atrito é:
  - 8 N
  - 20 N
  - 6 N
  - 0 N
- Se  $F = 20$  N, a intensidade da força de atrito é:
  - 8 N
  - 20 N
  - 6 N
  - 0 N

51. Um bloco, de massa  $m$ , sobe uma rampa com  $30^\circ$  de inclinação, com velocidade constante, por ação de uma força  $\vec{F}$  paralela ao plano e com sentido ascendente. Sendo  $g$  o módulo da aceleração gravítica,  $\sin 30^\circ = 0,50$  e  $\cos 30^\circ = 0,87$ , a intensidade da força de atrito é dada por:

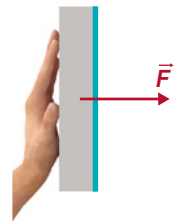
- $F + 0,50 mg$
- $F - 0,50 mg$
- $F + 0,87 mg$
- $F - 0,87 mg$

52. Um automóvel viaja a  $80 \text{ km h}^{-1}$  e faz uma travagem brusca. Supondo o movimento retilíneo e uniformemente retardado, compare a distância mínima percorrida na travagem com o piso molhado ( $\mu = 0,1$ ) e com o piso seco ( $\mu = 0,6$ ).

53. Um bloco é comprimido contra uma parede por uma força  $\vec{F}$  de direção horizontal.

Sejam  $P$ ,  $F_a$ ,  $N$  e  $\mu$  respetivamente, o peso do bloco, a força de atrito e a força normal exercidas pela parede, e o coeficiente de atrito estático. Se  $\mu < 1$ , a intensidade mínima da força que mantém o bloco em repouso é:

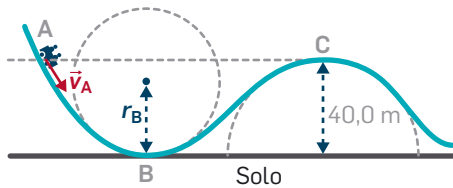
- $F = F_a$
- $F = \mu N$
- $F = P$
- $F > P$



54. Um caixote está sobre a caixa de uma carrinha. Se a carrinha se mover em linha reta, com aceleração constante de módulo  $a$ , qual deverá ser o coeficiente de atrito mínimo dos materiais em contacto para que o bloco não deslize?

### 1.1.8 Dinâmica da partícula e considerações energéticas

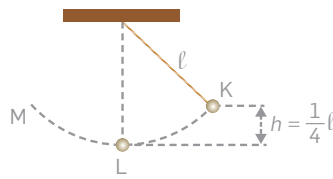
55. Um carro, de peso  $P$ , desloca-se sobre um troço de uma montanha-russa, contido num plano vertical, como mostra a figura.



O carro passa nos pontos **A**, **B** e **C** com velocidade de módulo igual, respetivamente, a  $4,8 \text{ m s}^{-1}$ ,  $28,2 \text{ m s}^{-1}$  e  $2,0 \text{ m s}^{-1}$ . O ponto **C** está num troço circular de raio  $40,0 \text{ m}$  e o ponto **B** num outro de raio  $36,0 \text{ m}$ .

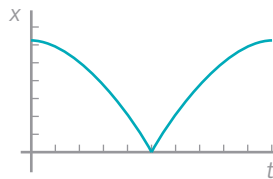
- a) Mostre que não é desprezável o atrito entre as superfícies em contacto.  
b) Determine, em função do peso do carro,  $P$ , as intensidades das forças verticais aplicadas sobre ele, pelo solo, nos pontos **B** e **C**.

56. A figura mostra um pêndulo gravítico, de massa  $m$  e comprimento  $\ell$ , que é afastado da sua posição de equilíbrio, **L**, para



a posição **K**, que se encontra a uma altura  $h = \frac{1}{4}\ell$  em relação a **L**. Em seguida, o corpo é libertado, passando a oscilar entre **K** e **M**. São desprezáveis as forças dissipativas.

O gráfico representa o módulo de uma grandeza física,  $X$ , em função do tempo, no intervalo de tempo necessário para o pêndulo se deslocar entre as duas posições extremas.

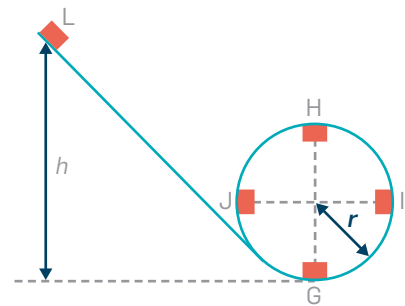


- a) Essa grandeza física é:
- (A) a componente tangencial da aceleração.  
(B) o módulo da velocidade do corpo.  
(C) o módulo da tensão exercida pelo fio.  
(D) a componente normal da aceleração.

- b) Em **L**, o quadrado do módulo da velocidade é:  
(A)  $2g\ell$  (B)  $\sqrt{2g\ell}$  (C)  $\frac{1}{2}g\ell$  (D)  $\frac{1}{4}g\ell$

- c) O módulo da tensão é igual a ... na posição...
- (A)  $\frac{1}{4}mg$  ... K (C) zero ... M  
(B)  $\frac{3}{2}mg$  ... L (D)  $mg$  ... L

57. Um pequeno bloco desliza ao longo de uma calha fazendo um *looping* circular de raio  $r$ , como mostra a figura. São desprezáveis as forças dissipativas.



- a) Qual é o valor mínimo da altura  $h$  de que deve ser largado o bloco para descrever o *looping*?

- (A)  $\frac{3}{2}r$  (B)  $\frac{7}{2}r$  (C)  $2r$  (D)  $\frac{5}{2}r$

- b) O bloco é largado de uma altura  $h$  superior à altura mínima para descrever o *looping*.

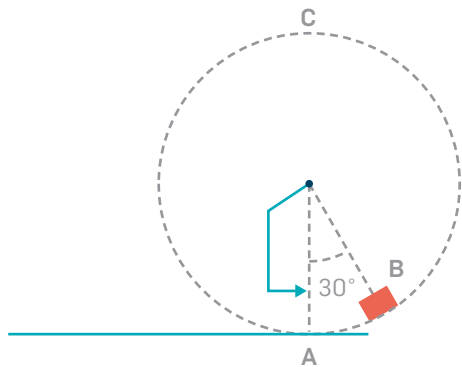
- i) A componente centrípeta da aceleração do bloco, ao passar na posição **G**, é:

- (A)  $\frac{2gh}{r}$  (B)  $\frac{gr}{h}$  (C)  $\frac{gh}{2r}$  (D)  $g$

- ii) Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- A. A componente tangencial da aceleração na posição **I** é igual à aceleração da gravidade.  
B. A aceleração na posição **H** é igual à aceleração da gravidade.  
C. A aceleração na posição **H** tem direção vertical e sentido de cima para baixo.  
D. A aceleração é constante em módulo quando o bloco executa o *looping* **GIHJ**.  
E. A componente centrípeta da aceleração na posição **H** é nula.  
F. A aceleração em **H** é simétrica da aceleração em **G**.

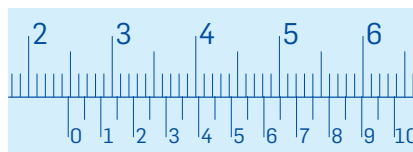
58. Na figura, um pequeno corpo de 200 g, ligado a um fio inextensível e de massa desprezável de 40 cm de comprimento, descreve uma trajetória circular num plano vertical. Quando passa no ponto mais alto da trajetória, **C**, o corpo tem a velocidade mínima necessária para descrever essa trajetória circular. São desprezáveis as forças dissipativas.



- a) O módulo da tensão exercida pelo fio em **B** é:
- (A)  $mg \cos 30^\circ$   
 (B)  $mg \cos 30^\circ + 2,5mv_B^2$   
 (C)  $mg \cos 30^\circ - 2,5mv_B^2$   
 (D)  $mg (0,4 + 0,4 \cos 30^\circ)$
- b) Determine o módulo da velocidade em **A**.
- c) Ao passar por **A**, um gume corta o fio. Sendo 0,40 o coeficiente de atrito cinético entre o corpo e a superfície, determine, usando considerações energéticas, a distância percorrida pelo corpo.
59. Um carrinho descreve um movimento circular num plano vertical dentro de uma calha de 0,50 m de raio, sendo o atrito desprezável. Na posição mais baixa a força normal exercida pela superfície tem uma intensidade que é tripla da intensidade do peso.
- a) Qual é o módulo da velocidade nessa posição?  
 b) Averigue se o carrinho descreve uma volta completa.

## Atividades laboratoriais

60. Pretendendo obter-se a relação entre o alcance de um projétil lançado horizontalmente e a sua velocidade inicial, montou-se o dispositivo da **Fig. 75** (página 60). A altura da saída da esfera em relação ao solo foi 178,00 cm. Mediu-se o diâmetro da esfera com uma craveira, cujo nónio se mostra na figura.



Numa primeira largada, para um alcance,  $A$ , de 93,00 cm, mediram-se os seguintes tempos de interrupção do feixe da fotocélula na passagem da esfera:

$t / \text{ms}$	14,840	14,804	14,679
-----------------	--------	--------	--------

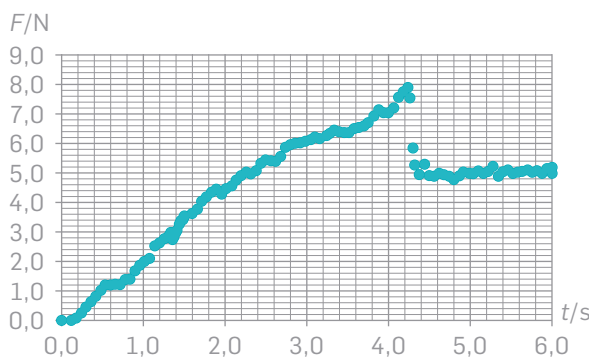
Repetiu-se o procedimento mais cinco vezes, medindo-se o módulo da velocidade horizontal,  $v_0$ , à saída da rampa, e o respetivo alcance,  $A$ . A tabela seguinte apresenta os resultados.

$v_0 / \text{m s}^{-1}$	0,538	0,884	1,027	1,246	1,467
$A / \text{m}$	0,253	0,443	0,548	0,682	0,798

Considere  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

- a) Indique o resultado da medição do diâmetro da esfera, incluindo a incerteza de leitura.
- b) Apresente o resultado da medição do tempo da primeira passagem da esfera pela fotocélula em função da incerteza relativa e no SI.
- c) Qual foi o módulo da velocidade do primeiro lançamento para o alcance de 93,00 cm?
- d) Elabore o gráfico do alcance em função do módulo da velocidade inicial e encontre a equação da reta que melhor se ajusta aos pontos.
- i) O resultado está de acordo com o esperado?  
 ii) Qual seria o alcance se o módulo da velocidade de lançamento fosse  $2,0 \text{ m s}^{-1}$ ?

61. Colocou-se um bloco paralelepípedo de massa 206 g sobre uma superfície horizontal. Sobre ele colocaram-se massas marcadas de 2,236 kg. Em seguida, ligou-se ao bloco um sensor de força e exerceu-se uma força horizontal de intensidade crescente até o conjunto se começar a mover. Tal ocorreu cerca de 4,2 s após o início do registo e o movimento manteve-se com velocidade constante. O gráfico seguinte representa a intensidade da força exercida em função do tempo para os dados recolhidos. Considere  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

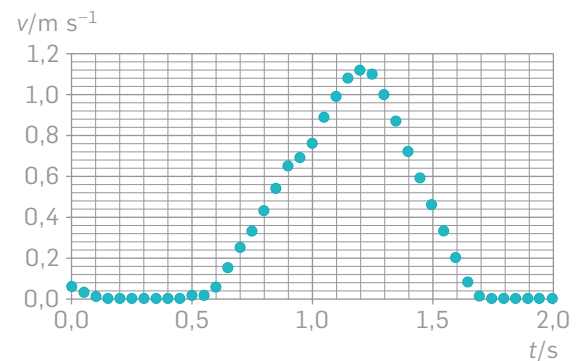


- a) Da análise do gráfico:
- Que conclusão se retira quanto às diferenças entre as forças de atrito estático e cinético?
  - Como se poderão determinar as forças de atrito estático? E as forças de atrito cinético? Quais são as intensidades dessas forças?
  - Indique, justificando, o que se pode concluir sobre a facilidade de empurrar um objeto em movimento ou tirá-lo do repouso.
- b) Colocando-se sucessivamente massas marcadas sobre o bloco, repetiu-se a recolha das intensidades das forças, mantendo-se as outras condições. A tabela mostra os dados obtidos.

$m/\text{kg}$	$F_{ae,m\acute{a}x}/\text{N}$	$F_{ac}/\text{N}$
0,827	3,241	2,650
1,670	5,833	4,737
2,225	7,466	5,950
2,442	7,895	6,234
2,793	8,878	7,052
3,239	10,167	8,156
3,793	12,198	9,242

A partir do gráfico da intensidade da força de atrito em função da intensidade da força normal, determine os coeficientes de atrito estático e cinético.

- Mantendo o bloco apoiado pela mesma face e na mesma superfície, foi-se inclinando progressivamente essa superfície. A partir de que ângulo de inclinação o bloco entrou em movimento?
- O bloco ligou-se por um fio, que passava numa roldana, a um corpo suspenso na vertical. O que se observou quando se aumentou a massa do corpo suspenso? Justifique.
- Segurou-se o bloco, assente na superfície horizontal, quando a massa do corpo suspenso era 118 g. Após se largar o bloco, e com um sensor de movimento, registou-se o gráfico seguinte.



Determine, a partir das acelerações do bloco no movimento acelerado e no movimento retardado, o coeficiente de atrito cinético. Justifique eventuais diferenças nos valores obtidos a partir de cada movimento.

- Mudando-se o tipo de superfície da base do bloco, ou a sua área, procurou investigar-se se as forças de atrito dependiam desses fatores. A tabela seguinte mostra os dados obtidos para três situações.

$A/\text{cm}^2$	Material da base do bloco	$m/\text{kg}$	$F_{ae,m\acute{a}x}/\text{N}$	$F_{ac}/\text{N}$
48,0	Madeira polida	2,188	6,22	4,43
48,0	Feltro	2,188	7,46	6,54
32,0	Madeira polida	2,188	5,98	4,37

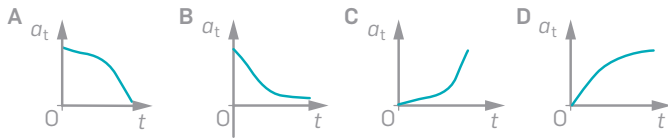
Determine os coeficientes de atrito, estático e cinético, das superfícies em contacto. Conclua, a partir dos dados experimentais, se as forças de atrito dependem da área de contacto e do tipo de materiais.

## Questões globais

**62.** «Consideremos um caçador num safari em África que dispara uma bala contra um animal distante – por exemplo, um rinoceronte que está a 500 m de distância. A espingarda está apontada precisamente na horizontal. Será que a bala chega a atingir o animal? Não. Pode o rinoceronte ficar tranquilo, porque a física não se destina a eliminar pobres bichos indefesos. Um valor máximo para a velocidade inicial de uma bala é 3600 km/h, o triplo da velocidade do som no ar, que é cerca de 1200 km/h.»

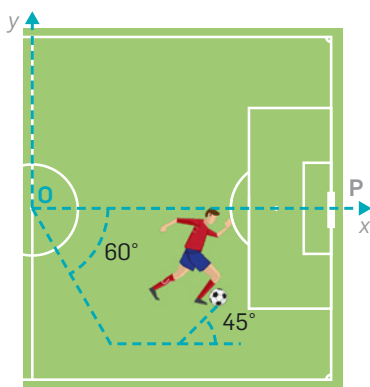
in *Física Divertida*, de Carlos Fiolhais

- Considere que a altura de saída da bala relativamente ao chão é 1,60 m e que o corpo do rinoceronte se encontra 50 cm acima do solo. Mostre que a afirmação do texto é correta e que, neste caso, o rinoceronte pode ficar descansado.
- Determine a componente tangencial da aceleração no instante 0,20 s.
- Que gráfico melhor representa a componente tangencial da aceleração em função do tempo?



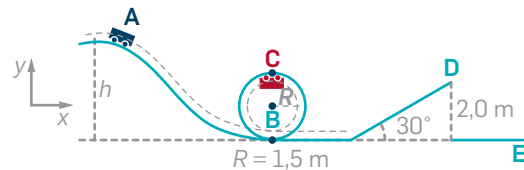
**63.** Um campo de futebol tem 100 m de comprimento e balizas com 2,44 m por 7,32 m. Um jogador faz treino de drible e de marcação de penálti.

- Saindo com a bola do meio do campo (ver figura), avança 26,0 m segundo um ângulo de  $60^\circ$  com a linha que une o meio do campo, **O**, ao centro da baliza, **P**; percorre depois 16,0 m numa direção paralela a essa linha e, em seguida, vira a  $45^\circ$ , de modo a aproximar-se da baliza, andando 18,0 m. A que distância ficou do centro da baliza?



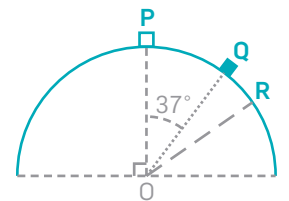
- Da marca da grande penalidade, a 11 m da baliza, o jogador chutou a bola obliquamente para cima, segundo um ângulo de  $20^\circ$  com a linha OP, imprimindo-lhe a velocidade de  $90 \text{ km h}^{-1}$ . Se for desprezável a resistência do ar, poderá o chute originar golo? Justifique.

**64.** Um carrinho de 200 g, redutível a uma partícula, é largado na posição **A**, atingindo as posições **B**, **C**, novamente **B**, e **D**, onde entra em movimento de projétil, caindo em **E**. O módulo da velocidade atingida pelo carrinho em **D** é de  $8,0 \text{ m s}^{-1}$ . São desprezáveis as forças dissipativas.



- Determine a altura  $h$  de onde saiu o carrinho.
- Justifique por que razão o carrinho passou pela posição **C** sem cair.
- Determine a intensidade da força que a calha exerceu no carrinho na posição **C**.
- Considere o movimento de projétil do carrinho. Indique a afirmação correta.
  - A componente horizontal da velocidade do carrinho varia, no SI, entre 0 e  $8,0 \cos 30^\circ$ .
  - O carrinho tem velocidade igual à da posição **D**, quando volta a passar, na descida, pelo plano em que se situa essa posição.
  - A aceleração do carrinho diminui na subida e aumenta na descida.
  - A aceleração tangencial é nula na posição mais alta porque a velocidade é mínima.

**65.** Um bloco de 1,0 kg desliza sobre uma superfície esférica, de raio 80 cm, como mostra a figura, partindo do repouso do ponto **P**. No ponto **R** perde o contacto com a superfície. São desprezáveis as forças dissipativas.



- Determine a intensidade da força exercida pela superfície sobre o bloco no ponto **Q**.
- Prove que o ângulo  $\widehat{P\hat{O}R}$  é  $48^\circ$ .



# 1.2 CENTRO DE MASSA E MOMENTO LINEAR DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS



1.2.1 Centro de massa de um sistema de partículas

1.2.2 Velocidade e aceleração do centro de massa. Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

1.2.3 Momento linear e Segunda Lei de Newton

1.2.4 Lei da Conservação do Momento Linear. Colisões

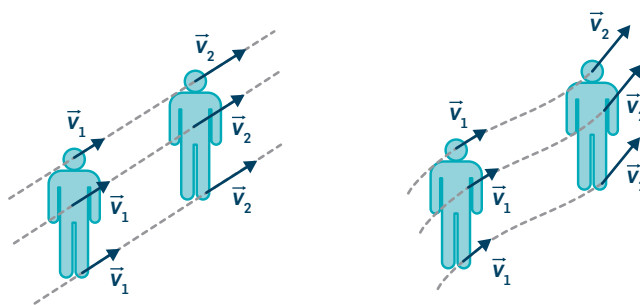
**AL1.3** Colisões

Temos estudado a cinemática e a dinâmica de um corpo, como um automóvel ou uma bola, representando-o por um só ponto: o seu centro de massa. Mas, em geral, um corpo tem de ser estudado como um **sistema de partículas**.

Uma **partícula** pode mover-se entre duas posições quaisquer descrevendo uma trajetória retilínea ou curvilínea, mas, como não tem dimensões, esse movimento é sempre de translação.

Um sistema de partículas (como um corpo extenso) terá movimento de translação se as suas partículas descreverem igual trajetória, que pode ser retilínea (**Fig. 1**, à esquerda) ou curvilínea (**Fig. 1**, à direita) e, no mesmo instante, todas tiverem igual velocidade.

**Fig. 1** Corpo com movimento de translação retilínea (à esquerda) e com movimento de translação curvilínea (à direita): as partículas têm a mesma trajetória e, no mesmo instante, têm igual velocidade.



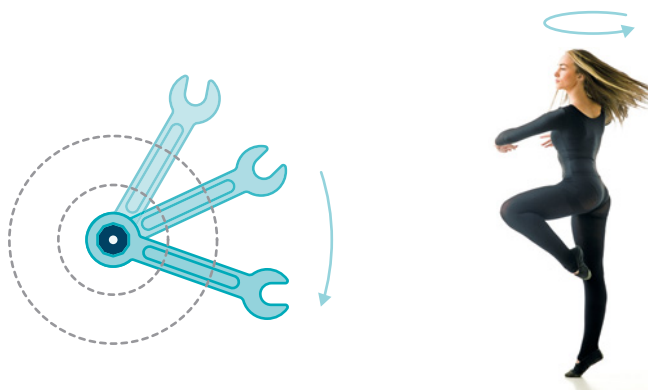
**Sistema de partículas:** pode ter movimento de rotação e/ou de translação. Para ser reduzido a uma partícula, terá de possuir apenas movimento de translação.

**Fig. 2** Rotação pura: quanto mais afastadas estão as partículas do eixo de rotação, maiores são as circunferências descritas e maiores são as suas velocidades.



**Fig. 3** O movimento da roda pode ser visto como a combinação de um movimento de translação do seu centro de massa com outro de rotação em torno dele.

Um **sistema de partículas** pode ter simultaneamente um movimento de translação e outro de rotação. Quando tem só movimento de rotação (diz-se rotação pura), há partículas fixas – as que estão sobre o eixo de rotação – e partículas móveis, que rodam em torno desse eixo. Estas últimas descrevem trajetórias circulares de diferentes raios. A sua velocidade depende da distância ao eixo de rotação: será tanto maior quanto maior for o raio da trajetória circular (**Fig. 2**).



Muitos movimentos são uma combinação de translação e de rotação. Por exemplo, a Terra tem um movimento de rotação em torno de um eixo e este tem uma translação curvilínea em torno do Sol; numa roda de bicicleta (**Fig. 3**) há uma translação retilínea do centro de massa e uma rotação em torno do eixo que passa pelo centro de massa.

Num sistema de partículas que só tem **movimento de translação** basta estudar uma só partícula, pois todas têm igual movimento. Se, simultaneamente, forem desprezáveis as variações de energia interna do sistema, então o sistema será **reduzível a uma partícula**.



## 1.2.1 Centro de massa de um sistema de partículas

No nosso quotidiano deparamo-nos com numerosos corpos em que a distância entre duas quaisquer partículas é constante, independentemente do seu movimento ou das interações a que está sujeito: diz-se um **corpo indeformável** ou **rígido**. É o caso do tampo de uma mesa, de um martelo (**Fig. 4**), de uma caneta, etc.

De facto não há corpos totalmente rígidos: quando pressionamos um dedo sobre o tampo de uma mesa, o dedo e o tampo deformam-se; contudo, como a deformação do tampo não é perceptível, dizemos que ele é rígido.

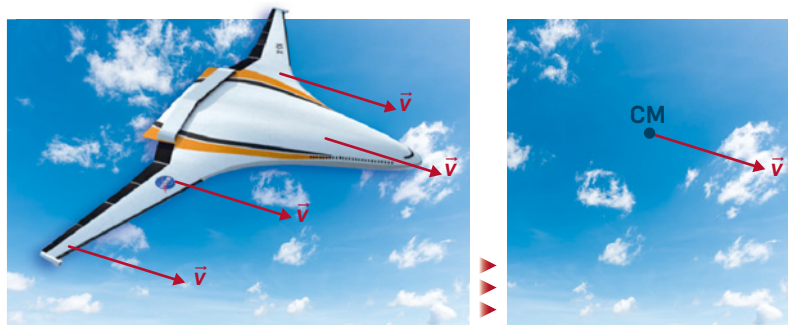
Mas, por exemplo, um sistema formado por um barco e pelos seus ocupantes (**Fig. 4**) já não é rígido (é deformável), pois as distâncias entre os seus constituintes podem variar.

Iremos estudar movimentos de corpos rígidos e de sistemas deformáveis, que têm apenas movimento de translação.

Neste caso não é necessário estudar cada partícula, pois todas têm o mesmo movimento. Podemos, por isso, reduzir um objeto extenso e complexo a um só ponto, o chamado **centro de massa** (CM) do sistema, que se move, em cada instante, com velocidade igual à de cada partícula do sistema (**Fig. 5**).



**Fig. 4** Exemplos de corpos rígidos (em cima) e não rígidos (em baixo).



**Corpo rígido:** sistema de partículas em que a distância entre elas se mantém constante.

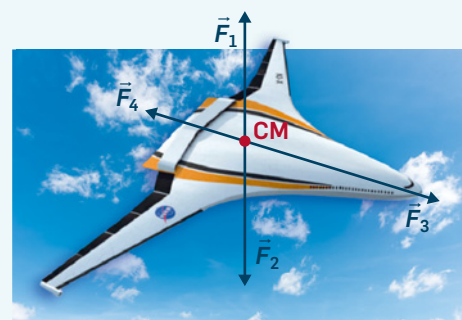
**Fig. 5** Um corpo só com movimento de translação pode ser representado pelo seu centro de massa, cuja velocidade é a velocidade das partículas.

Podemos, então, definir o **centro de massa** (**Fig. 6**).

### Centro de massa de um sistema de partículas

Ponto ao qual se associa a massa do sistema e onde se considera aplicada a resultante das forças exercidas sobre o sistema.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$



**Fig. 6** Centro de massa de um sistema de partículas.

**Sistemas com elevada simetria:**

o centro de massa coincide com o centro geométrico; não tem de estar localizado sobre o corpo.

**E onde se localiza o centro de massa?**

Nos **sistemas com elevada simetria**, e cuja massa esteja uniformemente distribuída (sistema homogéneo), o centro de massa localiza-se no centro geométrico do corpo. É o caso de uma esfera maciça e homogénea. Neste caso, o centro de massa localiza-se no corpo.

Mas nem sempre isso acontece: numa bola oca, num pneu ou num anel, com a massa homogeneamente distribuída, o centro de massa é o centro geométrico, mas já não se localiza no corpo (**Fig. 7**).



**Fig. 7** Centros de massa de uma bola maciça e de um anel. No segundo caso, o centro de massa não se localiza no corpo.

Se o sistema não tiver simetria, o centro de massa estará na região onde estiver a maior parte da massa.

Para qualquer sistema de massa  $m$  contendo  $N$  partículas de massas  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , e vetores posição  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  num dado referencial, a posição do centro de massa,  $\vec{r}_{CM}$ , é a média, ponderada pelas massas, da posição de todas as partículas (ponderada significa que as partículas com maior massa contribuem mais).

**Posição do centro de massa (CM)**

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

$m_1, m_2, \dots, m_N$ : massa das partículas

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ : posição das partículas

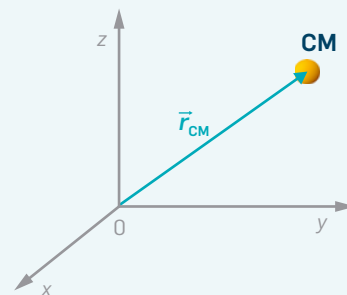
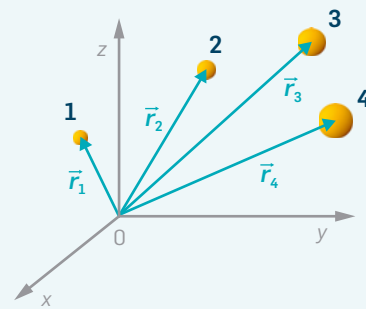
$m = \sum_{i=1}^N m_i$ : massa total do sistema

As coordenadas da posição do centro de massa são dadas pelas equações escalares:

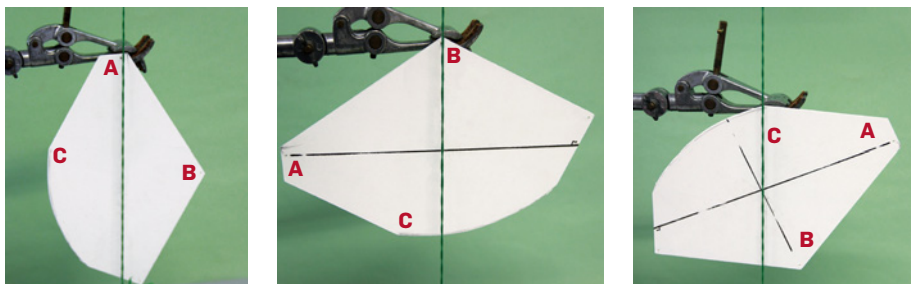
$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} \quad x_{CM} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} \quad y_{CM} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i y_i$$

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} \quad z_{CM} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i z_i$$



Como determinar, experimentalmente, a posição do centro de massa (CM) de um corpo rígido? Se o objeto tiver espessura uniforme, o procedimento será simples. Pendura-se o objeto por um ponto qualquer da sua periferia e marca-se a linha vertical que passa por esse ponto (por exemplo, o ponto **A** da **Fig. 8**).



**Fig. 8** Procedimento para determinar a posição do centro de massa de um objeto de espessura uniforme.

Pendura-se depois o objeto por um outro ponto, **B**, e marca-se a linha vertical que passa por **B**. A interseção das duas linhas indica a posição do centro de massa (claro que o centro de massa está no interior do objeto e não na sua superfície!).

Para confirmar, pode escolher-se outro ponto, **C**, e pendurar de novo o objeto, traçando a linha vertical que passa por **C**. Essa linha tem de interseccionar as outras duas no mesmo ponto (CM). Pendurando o objeto de qualquer outro ponto, e procedendo da mesma maneira, todas as linhas se interseccionarão no CM.

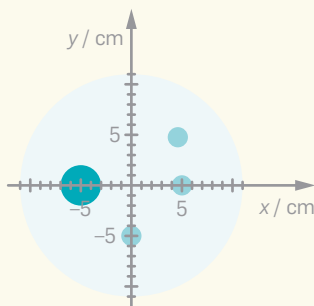
A localização do centro de massa é determinante para a estabilidade de um corpo. Por exemplo, o objeto da **Fig. 9**, cuja forma se pode variar porque não é rígido, só se mantém sem cair quando a vertical que passa pelo seu centro de massa (coincidente com o fio suspenso) cai dentro da sua base de sustentação.



**Fig. 9** Dispositivo de laboratório escolar, cuja forma se pode variar. Há estabilidade sempre que o fio vertical caia na base de sustentação do objeto.

### Questão resolvida 1

Numa bandeja circular de 0,300 kg é colocada uma garrafa de 2,200 kg e três copos, cada um com 0,200 kg, tal como mostra a figura. Um empregado de mesa quer transportar a bandeja. Onde deve colocar a mão para a manter equilibrada?



Para a bandeja não se desequilibrar, a mão deve ser colocada por baixo do centro de massa do sistema constituído pela bandeja, três copos e garrafa. No referencial da figura as coordenadas da posição do centro de massa de cada um destes corpos são, em centímetros: garrafa (-5, 0); copo 1 (0, -5); copo 2 (5, 0); copo 3 (5, 5); bandeja (0, 0). Usando as expressões para as coordenadas cartesianas do centro de massa, vem:

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i x_i =$$

$$= \frac{2,200 \times (-5) + 0,200 \times 0 + 0,200 \times 5 + 0,200 \times 5 + 0,300 \times 0}{2,20 + 0,200 + 0,200 + 0,200 + 0,300} =$$

$$= -2,90 \text{ cm}$$

De igual forma se obtém  $y_{\text{CM}} = 0,00 \text{ cm}$  (a distribuição de massas é simétrica na coordenada  $y$ ).

As coordenadas do centro de massa são (-2,90; 0,00) cm.



## 1.2.2 Velocidade e aceleração do centro de massa. Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

**Velocidade do centro de massa** de um sistema de partículas: média, ponderada pelas massas, das velocidades das partículas.

A posição do centro de massa,  $\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ , não tem de ser constante, pois as posições de cada partícula dependem, em geral, do tempo. Se as partículas que constituem o sistema tiverem massa constante, encontraremos, derivando ambos os membros da expressão anterior em ordem ao tempo, a expressão da **velocidade do centro de massa**:

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{r}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

Ou seja, a velocidade do centro de massa é a média das velocidades das partículas, ponderada pelas respectivas massas:

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

**Aceleração do centro de massa** de um sistema de partículas: média, ponderada pelas massas, das acelerações das partículas.

A **aceleração do centro de massa** obtém-se derivando, em ordem ao tempo, a velocidade do centro de massa:

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

Ou seja, a aceleração do centro de massa é a média das acelerações das partículas, ponderada pelas respectivas massas:

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

A expressão  $\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$  é uma soma de parcelas, cada uma delas igual ao produto da massa de uma partícula pela aceleração dessa partícula,  $m_i \vec{a}_i$ , que é a força resultante que atua sobre a partícula:  $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$  (Segunda Lei de Newton). Assim, a aceleração do centro de massa é dada por:

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}{m} = \frac{\vec{F}_R}{m}$$

Como  $\vec{F}_R$  é a resultante de todas as forças que atuam nas partículas do sistema, a **Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas** é

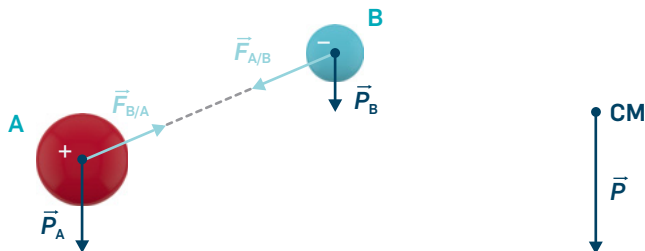
$$\vec{F}_R = m \vec{a}_{\text{CM}}$$

**Forças interiores:** forças exercidas entre as partículas de um sistema.

**Forças exteriores:** forças exercidas pela vizinhança sobre o sistema.

De todas as forças que atuam num sistema, designamos por **forças interiores** as forças que as partículas exercem umas sobre as outras, e por **forças exteriores** as forças exercidas pela vizinhança sobre o sistema.

Vejam os exemplos da **Fig. 10** que mostra as forças que atuam sobre duas partículas carregadas que estão num campo gravítico.



**Fig. 10** Sistema de duas partículas com cargas elétricas sujeitas ao campo gravítico e forças sobre cada uma das partículas (à esquerda). A resultante das forças exteriores aplica-se no centro de massa do sistema (à direita).

Sobre a partícula **A** atua a força que a partícula **B** exerce sobre ela,  $\vec{F}_{B/A}$ , e o peso,  $\vec{P}_A$ : a primeira é uma força interior pois é exercida por uma partícula do sistema; a segunda é uma força exterior que resulta da interação com a Terra (que não pertence ao sistema).

Sobre a partícula **B** atua a força que a partícula **A** exerce sobre ela,  $\vec{F}_{A/B}$ , que é uma força interior, e o peso,  $\vec{P}_B$ , que é uma força exterior.

De acordo com a Terceira Lei de Newton,  $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$ , pelo que a resultante das forças interiores é nula. Então, a resultante das forças no sistema é igual à resultante das forças exteriores,  $\vec{P} = \vec{P}_A + \vec{P}_B$ , que se aplica no centro de massa do sistema (**Fig. 10**).

A conclusão anterior é válida qualquer que seja o número de partículas do sistema: como as forças interiores existem aos pares (pares ação-reação), a resultante das **forças interiores é sempre nula**,  $\vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}$ . Ou seja, a resultante das forças sobre um sistema coincide com a resultante das **forças exteriores**:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{\text{int}} + \vec{F}_{\text{ext}} \Rightarrow \vec{F}_R = \vec{F}_{\text{ext}} \quad (\vec{F}_{\text{int}} = \vec{0})$$

Podemos, então, reescrever a Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas:

#### Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_{\text{CM}}$$

A aceleração do centro de massa de um sistema,  $\vec{a}_{\text{CM}}$ , é igual à de uma partícula, a que se atribui a massa do sistema,  $m$ , e onde se aplica a resultante de todas as forças exteriores,  $\vec{F}_{\text{ext}}$ .

Portanto, só as forças exteriores são responsáveis pela aceleração do sistema. Por exemplo, o centro de massa de um projétil em que só atue a força gravítica descreve uma trajetória parabólica com a mesma aceleração, por mais extenso que seja o corpo e por mais complexo que seja o seu movimento (**Fig. 11**).

#### Forças interiores num sistema de partículas:

a sua resultante é sempre nula,  $\vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}$ , de acordo com a Terceira Lei de Newton.

#### Forças exteriores que atuam num sistema de partículas:

a sua resultante é responsável pela aceleração do sistema.



**Fig. 11** Fotografia estroboscópica do salto em comprimento de um atleta e linha (a verde) que representa a trajetória parabólica do seu centro de massa: a aceleração deste só depende da força exterior, o peso do atleta.

### Questão resolvida 2

Duas partículas, A e B, respetivamente de massas 100 g e 300 g, movem-se com as seguintes velocidades:

$$\vec{v}_A(t) = (4t - 5)\vec{e}_x + (3t - 6)\vec{e}_y \text{ (m s}^{-1}\text{)}$$

$$\text{e } \vec{v}_B(t) = (-4t + 5)\vec{e}_x + (-3t + 6)\vec{e}_y \text{ (m s}^{-1}\text{)}$$

A velocidade do seu centro de massa é:

- (A) nula.  
 (B)  $\vec{v}_{CM}(t) = (-8t - 10)\vec{e}_x + (-6t + 12)\vec{e}_y \text{ (m s}^{-1}\text{)}$   
 (C)  $\vec{v}_{CM}(t) = (8t - 10)\vec{e}_x + (6t - 12)\vec{e}_y \text{ (m s}^{-1}\text{)}$   
 (D)  $\vec{v}_{CM}(t) = (-2t + 2,5)\vec{e}_x + (-1,5t + 3)\vec{e}_y \text{ (m s}^{-1}\text{)}$

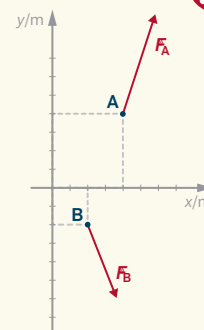
**(D)**  $v_{x(CM)} = \frac{100 \times (4t - 5) + 300 \times (-4t + 5)}{100 + 300} = (-2t + 2,5) \text{ m s}^{-1}$

$$v_{y(CM)} = \frac{100 \times (3t - 6) + 300 \times (-3t + 6)}{100 + 300} = (-1,5t + 3) \text{ m s}^{-1}$$

### Questão resolvida 3

Observe a figura: duas partículas A e B, respetivamente, de massas 4,0 kg e 2,0 kg, movem-se num plano horizontal. Num dado instante, e no referencial considerado na figura, as velocidades das partículas são  $\vec{v}_A = -2,0\vec{e}_x \text{ (m s}^{-1}\text{)}$  e  $\vec{v}_B = 4,0\vec{e}_x \text{ (m s}^{-1}\text{)}$  e as forças que nelas atuam são  $\vec{F}_A = 6,0\vec{e}_x + 12,0\vec{e}_y \text{ (N)}$  e  $\vec{F}_B = 6,0\vec{e}_x - 8,0\vec{e}_y \text{ (N)}$ .

- a) No instante considerado, a velocidade do centro de massa é, no SI,  
 (A)  $1,0\vec{e}_x$     (B)  $2,0\vec{e}_x$     (C)  $3,0\vec{e}_x$     (D) nula.
- b) Determine as acelerações de cada partícula e a do centro de massa nesse instante.



**(D)**  $\vec{v}_{CM} = \frac{4 \times (-2) + 2 \times (4)}{4 + 2} \vec{e}_x = \vec{0}$

b)  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ ;  $a_A = 1,5\vec{e}_x + 3,0\vec{e}_y \text{ (m s}^{-2}\text{)}$  e  $\vec{a}_B = 3,0\vec{e}_x - 4,0\vec{e}_y \text{ (m s}^{-2}\text{)}$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_{ext}}{m} = \frac{(6,0 + 6,0)\vec{e}_x + (12 - 8)\vec{e}_y}{4 + 2} = 2,0\vec{e}_x - 0,67\vec{e}_y \text{ (m s}^{-2}\text{)}$$

## 1.2.3 Momento linear e Segunda Lei de Newton

Se um automóvel e um camião viajarem à mesma velocidade (Fig. 12) e chocarem contra um obstáculo idêntico, o camião provocará mais danos no obstáculo. Mas se o automóvel tiver velocidade muito superior à do camião pode provocar mais estragos do que este. Ou seja, os efeitos da colisão dependem da massa e da velocidade do corpo. Por isso, define-se a grandeza momento linear,  $\vec{p}$ , de uma partícula:

### Momento linear de uma partícula, $\vec{p}$

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$\text{kg m s}^{-1}$      $\text{kg}$      $\text{m s}^{-1}$

- Tem a direção e o sentido da velocidade.
- Tem módulo igual ao produto da massa,  $m$ , pelo módulo da velocidade,  $v$ .

A unidade de momento linear obtém-se multiplicando a unidade de massa pela unidade de velocidade. O momento linear é também designado por quantidade de movimento.

Se variar o momento linear de uma partícula, de massa constante, variará também a sua velocidade. Mas tal só será possível se a resultante das forças não for nula. Ou seja, há uma relação entre o momento linear da partícula e a resultante das forças que nela atuam, que se obtém derivando a expressão  $\vec{p} = m \vec{v}$  em ordem ao tempo. Para uma partícula de massa constante, vem:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_R$$

A expressão anterior não é mais do que a Segunda Lei de Newton aplicada à partícula mas reescrita noutra forma:

### Segunda Lei de Newton para uma partícula

A resultante das forças que atuam sobre uma partícula é igual à derivada temporal do seu momento linear:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Se  $\vec{F}_R$  for constante, a variação do momento linear com o tempo será também constante e a expressão anterior poderá escrever-se:

$$\vec{F}_R = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$



**Fig. 12** Um automóvel e um camião, viajando à mesma velocidade, provocarão efeitos diferentes se colidirem com obstáculos idênticos.

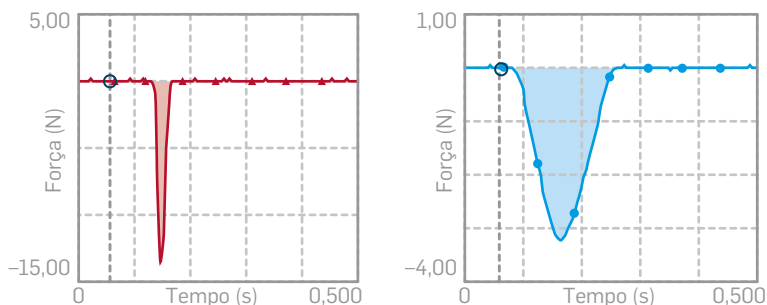




**Fig. 13** Teste de colisão: as forças na colisão do automóvel com o obstáculo atuam num intervalo de tempo muito curto e têm intensidade variável, que pode ser muito elevada.

**Intensidade média das forças numa colisão:** será tanto maior quanto menor for o intervalo de tempo da colisão, para a mesma variação de momento linear.

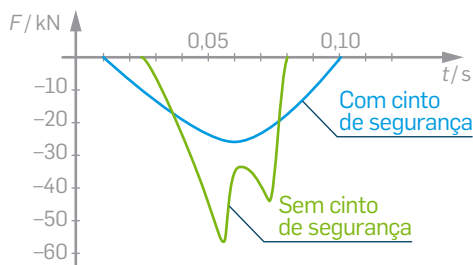
**Fig. 14** O módulo da força máxima é maior quando o intervalo de tempo da sua atuação é menor, para o mesmo momento linear inicial do corpo. Note-se que as escalas verticais são diferentes nos dois gráficos.



O resultado anterior tem inúmeras aplicações. Os *airbags* dos automóveis (Fig. 15) são um bom exemplo. Quando um veículo se imobiliza subitamente devido a uma colisão, a força que se exerce sobre os ocupantes será tanto menor quando maior for o tempo que eles demoram a imobilizar-se. A interposição de uma almofada entre o passageiro e o volante (*airbag*), que é insuflada de gás numa colisão, aumenta o tempo de imobilização do ocupante.

Também o cinto de segurança, devido à sua flexibilidade, faz aumentar o tempo de imobilização do ocupante, diminuindo a força que atua sobre ele. Além disso, distribui a força por uma maior área do corpo, diminuindo a pressão sobre ele, e impede que seja projetado para fora.

A Fig. 16 mostra como varia a componente escalar da força que atua num passageiro numa colisão, com e sem cinto de segurança, ao longo do tempo (o sentido positivo é o da velocidade do veículo, pelo que a componente escalar da força é negativa): sem cinto de segurança, a força é muito mais intensa, uma vez que o tempo de imobilização é menor.



**Fig. 16** A intensidade da força que atua sobre um passageiro de um veículo em colisão, ao longo do tempo, é muito diferente com e sem cinto de segurança.



Também se define o momento linear para um sistema de partículas como a soma dos momentos lineares de cada uma delas. Sendo o momento linear de cada partícula  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$  ( $m_i$  e  $\vec{v}_i$  são, respetivamente, a massa e a velocidade da partícula  $i$ ), o momento linear de um sistema de  $N$  partículas é:

$$\vec{p}_{\text{sist}} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots + m_N \vec{v}_N \Leftrightarrow \vec{p}_{\text{sist}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Como a velocidade do centro de massa é  $\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$ , então:

$$m \vec{v}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

Ou seja, o **momento linear do centro de massa** é igual ao **momento linear do sistema**:

$$\vec{p}_{\text{sist}} = \vec{p}_{\text{CM}} = m \vec{v}_{\text{CM}}$$

Se derivarmos o momento linear do sistema em ordem ao tempo, obtemos:

$$\frac{d\vec{p}_{\text{sist}}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

sendo  $\vec{F}_i$ , a resultante das forças (interiores e exteriores) sobre a partícula  $i$ .

Como a resultante das forças interiores é nula, então  $\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ . Pode, por isso, reescrever-se a Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas noutra forma:

### Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

A resultante das forças externas que atuam sobre um sistema de partículas é igual à derivada temporal do momento linear do sistema:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{sist}}}{dt} \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{CM}}}{dt}$$

sendo o momento linear do sistema,  $\vec{p}_{\text{sist}}$ , dado por:

$$\vec{p}_{\text{sist}} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots + m_N \vec{v}_N \Rightarrow \vec{p}_{\text{sist}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \vec{p}_{\text{CM}}$$

Se as forças exteriores forem constantes, a resultante toma a forma:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\Delta \vec{p}_{\text{sist}}}{\Delta t} \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\Delta \vec{p}_{\text{CM}}}{\Delta t}$$

Conclui-se que só as forças exteriores podem variar o momento linear de um sistema. Por exemplo, se quisermos pôr um automóvel em movimento empurrando-o, não o faríamos estando no seu interior: as forças exercidas seriam interiores ao sistema *automóvel + pessoas* e não alterariam o momento linear desse sistema. Mas, se empurrarmos o automóvel pela parte de fora (**Fig. 17**), as forças exercidas já serão exteriores ao sistema «automóvel» e alterarão o seu momento linear.

### Momento linear de um sistema

de partículas: é igual ao momento linear do centro de massa. Só varia por ação de forças exteriores de resultante não nula.

### + QUESTÕES p. 99



**Fig. 17** A resultante das forças exercidas por elementos exteriores ao sistema *automóvel* fazem variar o momento linear do veículo, alterando a sua velocidade.

## 1.2.4 Lei da Conservação do Momento Linear. Colisões



**Fig. 18** As pessoas movem-se dentro de uma canoa, inicialmente em repouso, num lago calmo: a velocidade do centro de massa do sistema não se altera, pois não atuam forças exteriores.

Vimos que só as forças exteriores podem variar o momento linear de um sistema. Mas, em muitas situações, a resultante das forças exteriores é nula.

Por exemplo, uma canoa com pessoas está em repouso num lago calmo. Se as pessoas se moverem dentro da canoa (**Fig. 18**), as forças que exercem são interiores ao sistema *canoa + pessoas*, pelo que não fazem variar o momento linear deste. Embora as partes do sistema (as pessoas e a canoa) possam mudar de posição, o centro de massa do sistema vai permanecer em repouso pois o seu momento linear não varia.

De facto, a expressão  $\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\Delta \vec{p}_{\text{sist}}}{\Delta t}$  mostra que, se  $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ , então  $\frac{\Delta \vec{p}_{\text{sist}}}{\Delta t} = \vec{0}$  e  $\Delta \vec{p}_{\text{sist}} = \vec{0}$ , ou seja, o momento linear do sistema é constante.

Tal resultado exprime a **Lei da Conservação do Momento Linear** para um sistema de partículas:

### Lei da Conservação do Momento Linear para um sistema de partículas

Se a resultante das forças exteriores que atuam num sistema for nula, não haverá variação do seu momento linear (manter-se-á constante).

$$\text{Se } \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \Delta \vec{p}_{\text{sist}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_{\text{sist}} \text{ é constante}$$

Como  $\vec{p}_{\text{sist}} = \vec{p}_{\text{CM}} = m\vec{v}_{\text{CM}}$ , a velocidade do centro de massa também se manterá constante.



**Fig. 19** Na colisão entre as bolas de *snooker* o momento linear do sistema conserva-se.

Já no tempo de Newton se tinha concluído, por via experimental, que havia conservação de momento linear na colisão de corpos (**Fig. 19**).

Se duas bolas (reduzíveis a partículas) colidirem, a resultante das forças exteriores sobre o sistema formado pelas bolas será nula, pois o peso e a força normal anulam-se e a força de atrito é desprezável. Por isso, os momentos lineares do sistema, antes e depois da colisão, são iguais:  $\vec{p}_{\text{sist}} = \vec{p}'_{\text{sist}}$  (**Fig. 20**).



**Fig. 20** O momento linear do sistema das duas bolas é igual antes e depois da colisão.

A conservação do momento linear do sistema das duas bolas é uma consequência das Leis de Newton, como se mostra na **Fig. 21**.

### A conservação do momento linear como consequência das Leis de Newton

Colisão que ocorre no intervalo de tempo  $\Delta t$ :



Pela Segunda Lei de Newton:

- variação do momento linear da bola 1:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{F}_1 \Delta t$$

- variação do momento linear da bola 2:

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{F}_2 \Delta t$$

Pela Terceira Lei de Newton:  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$$\text{Então: } \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_{\text{sist}} = \vec{0}$$

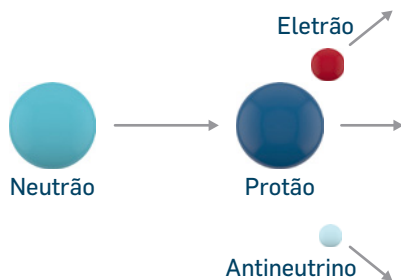
$$\text{Ou: } \vec{p}_{\text{sist}} \text{ (antes da colisão)} = \vec{p}_{\text{sist}} \text{ (depois da colisão)}$$

**Fig. 21** A conservação do momento linear resulta das leis de Newton.

A conservação do momento linear não se verifica só nas colisões mas em todas as situações em que é nula a resultante das forças exteriores sobre o sistema, ou em que é pequeno o produto do módulo da resultante pelo intervalo de tempo. É o caso de explosões, tiros, lançamento de foguetes, etc.

A **Lei da Conservação do Momento Linear** e a Lei da Conservação da Energia constituem dois grandes princípios da física, pois são aplicáveis em todas as escalas, desde a macrofísica à microfísica.

Por exemplo, no início do século passado, os físicos que estudaram uma emissão radioativa beta – processo no qual um neutrão se transforma num próton e num eletrão (**Fig. 22**) – ficaram intrigados, pois essas duas leis de conservação não se aplicavam. Então, o italiano Enrico Fermi propôs a existência de uma nova partícula, também emitida no processo, a que chamou neutrino (hoje sabe-se que é um antineutrino). Essa partícula, prevista em 1930, viria a ser detetada experimentalmente em 1955. Ou seja, foram as leis de conservação que levaram à descoberta da partícula, por via teórica.

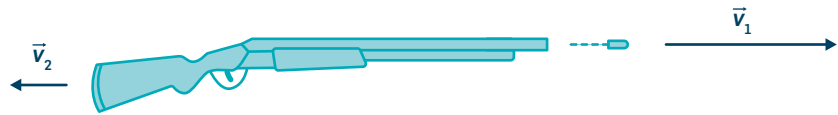


**Lei da Conservação do Momento Linear:** é um dos pilares da física, juntamente com a Lei da Conservação da Energia.

**Fig. 22** Um neutrão desintegra-se num próton, num eletrão e num antineutrino.

A conservação de momento linear poder ocorrer quando os movimentos são descritos a uma, duas ou a três dimensões. Aqui abordaremos apenas situações de movimentos a uma dimensão.

**Fig. 23** O recuo de uma espingarda explica-se pela conservação do momento linear.



Sistema *espingarda + bala*

Antes do disparo: o sistema está em repouso, pelo que,  $\vec{p}_{\text{sist}} = \vec{0}$ .

Depois do disparo:

Bala: massa  $m_1$  e velocidade  $\vec{v}_1$ .

Espingarda: massa  $m_2$  e velocidade  $\vec{v}_2$ .

$$\vec{p}'_{\text{sist}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\text{Como } \vec{p}_{\text{sist}} = \vec{p}'_{\text{sist}} \Rightarrow \vec{0} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1$$

A velocidade de recuo da espingarda tem sentido oposto ao da velocidade da bala, dependendo o seu módulo da relação entre as massas da bala e da espingarda.

A conservação do momento linear também está na base de funcionamento de aviões a jato e de foguetões (**Fig. 24**).

Nos aviões a jato, as turbinas absorvem o ar à sua frente e lançam-no com grande velocidade para a retaguarda. A massa ejetada pode ser pequena, mas sai a grande velocidade, o que obriga o avião a deslocar-se para a frente, verificando-se a conservação do momento linear do sistema *avião + gases*. Nos gases há vapor de água que, devido ao rápido arrefecimento, passa a cristais de gelo, deixando marcas no céu.

A progressão de um foguete ou de um foguetão tem precisamente a mesma explicação física: os gases resultantes da combustão misturados com ar são expelidos para trás a grande velocidade, obrigando o foguete a deslocar-se em sentido oposto.

**Fig. 24** Os aviões a jato e os foguetões baseiam-se na conservação do momento linear.



## Atividade 1

Com materiais caseiros, construa um dispositivo que ilustre o movimento de um foguete.

Pode usar-se uma garrafa onde se introduz alguma água e se rola. Inverte-se a garrafa e introduz-se na rolha uma agulha de válvula de encher bolas à qual se liga

uma bomba de encher pneus de bicicleta. O aumento da pressão no interior da garrafa provocará a saída da tampa e também da água a grande velocidade. A garrafa é projetada para cima.

## Questão resolvida 4

Duas bolas de *snooker* sofrem uma colisão frontal, movendo-se em sentidos contrários, com velocidades de módulos  $10 \text{ m s}^{-1}$  e  $4 \text{ m s}^{-1}$ . Depois da colisão, uma das

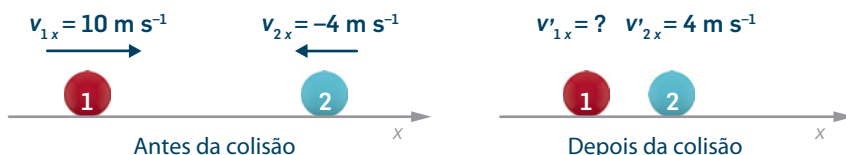
bolas passa a ter velocidade simétrica da que tinha inicialmente. Como se moverá a outra bola?

O movimento é a uma só dimensão e no eixo dos  $xx$ , por isso a conservação do momento linear exprime-se por

$$mv_{1x} + mv_{2x} = mv'_{1x} + mv'_{2x}.$$

Deve desenhar-se uma figura, escolhendo um sentido positivo, para se escreverem as componentes escalares das velo-

idades, antes e depois da colisão, e indicar os dados e os pedidos. Substituindo os valores da figura na expressão da conservação do momento linear,  $10 m + (-4) m = mv'_{1x} + 4 m$ , obtém-se  $v'_{1x} = 2 \text{ m s}^{-1}$ . O sentido positivo indica que a bola 1 se vai mover para a direita, ou seja, no sentido da bola 2.

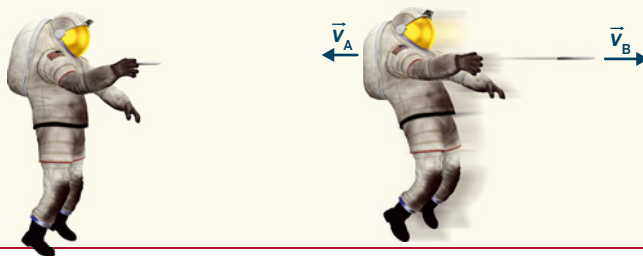


## Questão resolvida 5

Num anúncio futurista, lê-se:

«Quando for para o espaço, leve uma caneta no bolso para se mover!».

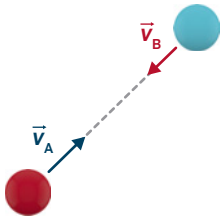
Qual é a base para esta sugestão?



Um astronauta, na sua nave, está numa situação de microgravidade e tem dificuldade em mover-se de um lado para o outro! Mas, se tiver consigo um objeto como uma caneta, bastará atirá-lo para logo adquirir movimento em sentido contrário (situação semelhante à da espingarda). Inicialmente, o sistema está em repouso e o momento linear é nulo. Após o lançamento, o sistema divide-se em duas partes: o astronauta, de massa  $m_a$  e velocidade  $\vec{v}_a$ , e a caneta, de massa  $m_c$  e velocidade  $\vec{v}_c$ . Como a resultante das forças exteriores é nula, há conservação

do momento linear, isto é,  $\vec{0} = m_a \vec{v}_a + m_c \vec{v}_c$ , obtendo-se  $\vec{v}_c = -\frac{m_a}{m_c} \vec{v}_a$ . Ou seja, o astronauta adquire velocidade com a mesma direção mas sentido oposto ao da caneta. Se o astronauta tiver  $70 \text{ kg}$  de massa, a caneta  $6,0 \text{ g}$  e, se esta for lançada com velocidade de módulo  $5,0 \text{ m s}^{-1}$ , então,  $v_c = -4,3 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$  (o sinal menos indica sentido negativo, uma vez que foi tomado como positivo o sentido do movimento da caneta). A velocidade é pequena. Mas isso é ótimo, pois, assim, o astronauta não sai disparado!





**Fig. 25** Colisão frontal: os movimentos iniciais dos centros de massa têm lugar sobre a mesma reta.

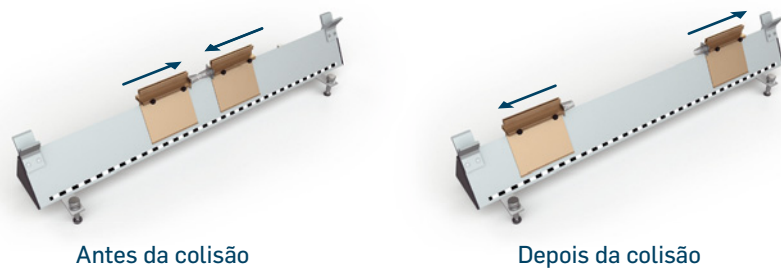
Em física, designa-se por colisão uma interação entre partículas num intervalo de tempo muito curto, sendo a intensidade das forças exercidas pelas partículas umas sobre as outras muito superior à das forças exteriores.

Uma colisão pode ocorrer à escala macroscópica, por contacto direto entre objetos – como nas bolas de *snooker* –, mas também à escala microscópica, por interações à distância entre partículas.

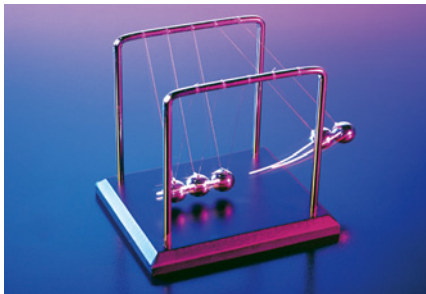
Vamos estudar as colisões em que os centros de massa dos corpos que vão colidir se movem sobre uma mesma linha reta (**Fig. 25**). São chamadas colisões frontais.

Em todas as colisões verifica-se a conservação do momento linear do sistema. Como o movimento ocorre a uma dimensão, a equação vetorial da conservação do momento linear do sistema,  $\vec{p}_{\text{sist}} = \vec{p}'_{\text{sist}}$ , pode ser escrita na sua forma escalar.

Em certas colisões também há conservação de energia cinética do sistema,  $E_c = E'_c$ . São chamadas **colisões elásticas**. A **Fig. 26** mostra um exemplo.



**Fig. 26** Exemplo de uma colisão elástica: dois objetos aproximam-se com velocidades de igual módulo e afastam-se com velocidades também de igual módulo.



**Fig. 27** No dispositivo, chamado «berço de Newton», as colisões são aproximadamente elásticas.

Uma colisão elástica é caracterizada pelas seguintes equações:

#### Colisão elástica

$$\begin{cases} \vec{p}_{\text{sist}} = \vec{p}'_{\text{sist}} \Rightarrow m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ E_{c(\text{sist})} = E'_{c(\text{sist})} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \end{cases}$$

À escala macroscópica, o «berço de Newton» (**Fig. 27**) permite observar colisões entre esferas que são praticamente elásticas.

Numa colisão elástica há deformações dos corpos durante a colisão, transformando-se a energia cinética inicial em energia potencial elástica. Em seguida a energia potencial elástica é transformada novamente em energia cinética, adquirindo os corpos a sua forma original. Por isso, há conservação da energia cinética do sistema.

Mas, de um modo geral, a energia cinética do sistema diminui após a **colisão**, que se diz **inelástica**, e o sistema não recupera a sua forma inicial. É a colisão mais comum no dia a dia (**Fig. 28**).

Nas colisões inelásticas, a energia cinética do sistema diminui, mas a energia interna aumenta, verificando-se aquecimento e deformações permanentes do sistema. Também há colisões com aumento de energia cinética, mas não as vamos estudar.



**Fig. 28** Uma bola cai no solo e não ressalta até à altura de onde caiu: a colisão é inelástica.

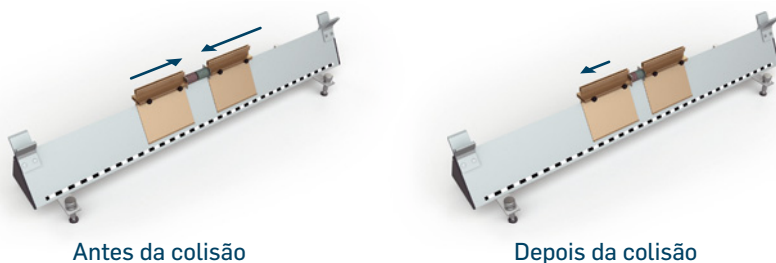
Quando dois corpos colidem e a energia cinética final é a mínima possível (compatível com a conservação do momento linear), estamos em presença de uma **colisão perfeitamente inelástica**.

Neste caso, os corpos seguem juntos após a colisão, ou seja, com a mesma velocidade (**Fig. 29**):  $\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2 = \vec{v}'$ . Ou seja:

#### Colisão perfeitamente inelástica

$$\vec{p}_{\text{sist}} = \vec{p}'_{\text{sist}} \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}'$$

Durante a colisão, os corpos deformam-se e essa deformação mantém-se após a colisão, pelo que a energia cinética do sistema diminui. Se os corpos tiverem inicialmente momentos lineares opostos, acabarão por se imobilizar (**Fig. 29**). Mas, se o momento linear inicial do sistema não for nulo, os objetos seguirão juntos com momento linear igual ao inicial.



**Fig. 29** Colisão perfeitamente inelástica: os corpos seguem juntos após a colisão.

Indicam-se a seguir as características dos vários tipos de colisão:

Colisão elástica	Colisão inelástica
$\vec{p}_{\text{sist}} = \vec{p}'_{\text{sist}}$ $E_{\text{c(sist)}} = E'_{\text{c(sist)}}$ <p>Após a colisão, os corpos ficam com a forma inicial.</p>	$\vec{p}_{\text{sist}} = \vec{p}'_{\text{sist}}$ $E_{\text{c(sist)}} \neq E'_{\text{c(sist)}}$ <p>Após a colisão, os corpos ficam deformados. Se os corpos tiverem igual velocidade após a colisão, esta diz-se perfeitamente inelástica.</p>

#### Questão resolvida 6

Uma partícula, com velocidade de módulo  $10,0 \text{ m s}^{-1}$ , colide frontalmente com outra de massa dupla, inicialmente em repouso. Depois da colisão a primeira move-se

no mesmo sentido com velocidade de módulo  $5,0 \text{ m s}^{-1}$ . A colisão foi elástica ou inelástica?



Aplicando a Lei da Conservação do Momento Linear, obtém-se a componente escalar da velocidade da segunda partícula:

$$mv_1 = mv'_1 + 2mv'_2 \Leftrightarrow 10 = 5 + 2v'_2 \Leftrightarrow v'_2 = 2,5 \text{ m s}^{-1}$$

Energia cinética do sistema antes da colisão:

$$E_c = \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} \times m \times 10^2 = 50 m \text{ (J)}$$

Energia cinética do sistema após a colisão:

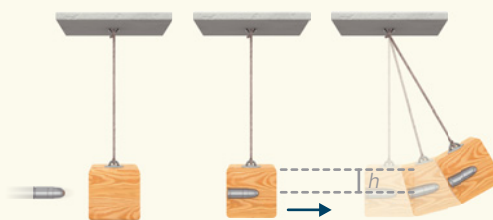
$$E'_c = \frac{1}{2} mv_1'^2 + \frac{1}{2} 2mv_2'^2 = \frac{1}{2} m \times 5^2 + \frac{1}{2} 2m \times 2,5^2 = 18,8 m \text{ (J)}$$

Não houve conservação da energia cinética do sistema, pelo que a colisão foi inelástica.

## Questão resolvida 7



Uma bala de 5,0 g é disparada contra um pêndulo em repouso na posição de equilíbrio. O pêndulo é constituído por um bloco de madeira de massa 2,0 kg suspenso por uma haste de massa desprezável. A bala fica incrustada no bloco de madeira que sobe até à altura de 26 cm.



- a) Com que velocidade a bala atinge o pêndulo?  
 b) Que tipo de colisão ocorre?  
 c) Que percentagem de energia cinética o sistema perde na colisão? Como se manifesta essa energia?

- a)** Imediatamente após a colisão da bala com o bloco, os dois movem-se com a velocidade comum,  $v'$ . Designando por  $v$  a velocidade inicial da bala e por  $m_1$  e  $m_2$  as massas da bala e do bloco, respetivamente, e como o movimento se faz a uma dimensão, da conservação do momento linear vem:

$$m_1 v = (m_1 + m_2) v', \text{ ou seja } v = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} v'$$

A partir do instante em que a bala para dentro do bloco, a energia cinética do bloco com a bala incrustada irá transformar-se em energia potencial gravítica, até o conjunto atingir a altura máxima,  $h$ . Aplicando a conservação da energia mecânica, durante o processo de subida do pêndulo:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 = (m_1 + m_2) g h, \text{ logo, } v' = \sqrt{2gh}$$

Combinando este resultado com o anterior, a velocidade inicial da bala será:

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

Substituindo os valores obtemos:

$$v = \frac{(2,0 + 5,0 \times 10^{-3})}{5,0 \times 10^{-3}} \times \sqrt{2 \times 10 \times 0,26} = \\ = 9,1 \times 10^2 \text{ m s}^{-1} = 3,3 \times 10^3 \text{ km h}^{-1}$$

- b)** A colisão da bala com o pêndulo é um exemplo típico de um choque perfeitamente inelástico, pois o sistema fica com a mesma velocidade após a colisão. Ocorre a maior dissipação de energia compatível com a conservação do momento linear.
- c)** A energia cinética do sistema antes da colisão é

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v^2 \text{ e depois da colisão } E'_c = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2.$$

$$\text{Usando } v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v, \text{ obtemos } E'_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E_c,$$

pele que  $E'_c < E_c$ . Substituindo os valores  $m_1 = 5,0 \text{ g}$  e  $m_2 = 2,0 \text{ kg}$ , obtemos  $E'_c = \frac{0,005}{2,005} E_c = \frac{E_c}{401}$ , ou seja, a energia mecânica final é apenas 0,25% da inicial! A energia restante – que é 99,75% da energia cinética inicial da bala – dissipou-se durante o processo de incrustação da bala no bloco (aumentou a energia interna do sistema formado pela bala e bloco, o que se traduz num aumento das temperaturas da bala e do bloco).



AL 1.3

p. 96



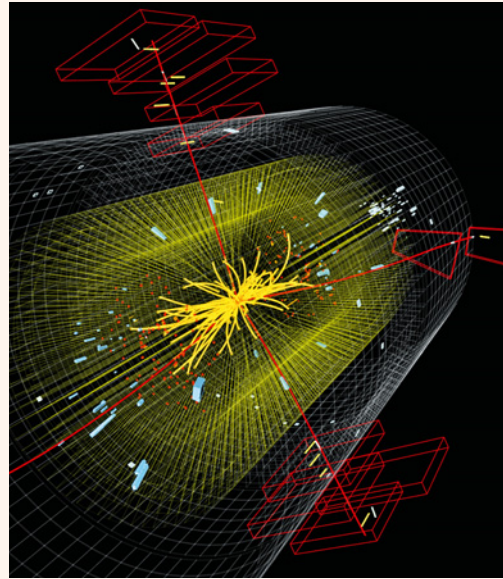
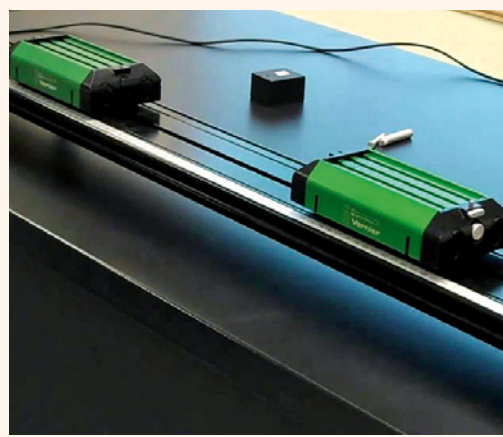
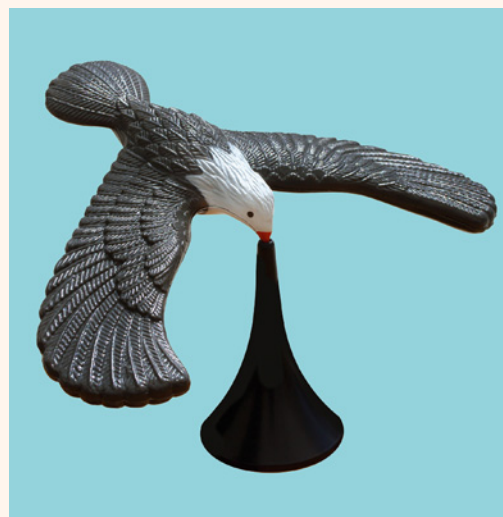
QUESTÕES

p. 100

A Atividade Laboratorial 1.3, «Colisões», permitirá investigar a conservação do momento linear em colisões elásticas e inelásticas e determinar o coeficiente de restituição na colisão de um carrinho com um alvo fixo.

## RESUMO

- **Sistema de partículas:** conjunto de várias partículas. O movimento do sistema reduz-se ao do seu centro de massa se as partículas tiverem a mesma velocidade (o sistema tem só movimento de translação) e não ocorrerem variações da energia interna. O sistema será um corpo rígido se as distâncias entre as partículas se mantiverem constantes.
- **Centro de massa de um sistema de partículas:** ponto a que se associa a massa do sistema e onde se considera aplicada a resultante das forças exercidas sobre ele. A sua posição é dada por  $\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ .
- **Velocidade do centro de massa de um sistema de partículas:**  $\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$ .
- **Aceleração do centro de massa de um sistema de partículas:**  $\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$ .
- **Forças interiores,  $\vec{F}_{\text{int}}$ :** forças exercidas entre si pelas partículas de um sistema; anulam-se aos pares (Terceira Lei de Newton ou Lei da Ação-Reação).
- **Forças exteriores  $\vec{F}_{\text{ext}}$ :** forças exercidas pela vizinhança sobre as partículas do sistema; a sua resultante é responsável pela aceleração do sistema.
- **Momento linear de uma partícula:**  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Unidade SI:  $\text{kg m s}^{-1}$ .
- **Momento linear de um sistema de partículas:**  $\vec{p}_{\text{sist}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$ ; é igual ao momento linear do centro de massa:  $\vec{p}_{\text{sist}} = \vec{p}_{\text{CM}} = m\vec{v}_{\text{CM}}$ .
- **Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas:**  $\vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{CM}}$  ou  $\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{CM}}}{dt}$  ou  $\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{sist}}}{dt}$ ; para forças exteriores constantes:  $\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\Delta\vec{p}_{\text{CM}}}{\Delta t}$ .
- **Lei da Conservação do Momento Linear de um sistema de partículas:** se  $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \Delta\vec{p}_{\text{sist}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_{\text{sist}}$  é constante ( $\vec{v}_{\text{CM}}$  será constante se a massa for constante); por isso, se  $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ , o momento linear do sistema antes e depois de uma interação é igual:  $\vec{p}_{\text{sist}} = \vec{p}'_{\text{sist}}$ .
- **Colisão elástica:** há conservação do momento linear do sistema e da energia cinética do sistema, ou seja,  $\vec{p}_{\text{sist}} = \vec{p}'_{\text{sist}}$  e  $E_{\text{c(sist)}} = E'_{\text{c(sist)}}$ .
- **Colisão inelástica:** há conservação do momento linear do sistema mas há variação da energia cinética do sistema, ou seja,  $\vec{p}_{\text{sist}} = \vec{p}'_{\text{sist}}$  e  $E_{\text{c(sist)}} \neq E'_{\text{c(sist)}}$ .
- **Colisão perfeitamente inelástica:** colisão inelástica em que os corpos ficam com a mesma velocidade após a colisão (a perda de energia cinética é máxima).







## ATIVIDADE LABORATORIAL 1.3



### Colisões

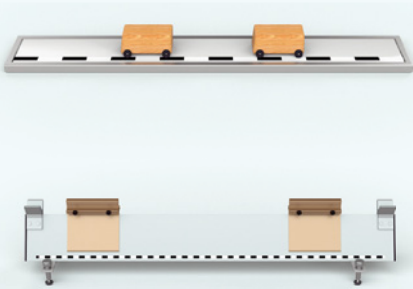
As colisões ocorrem em todas as escalas: entre objetos comuns, entre estrelas e galáxias, mas também entre partículas elementares nos aceleradores de partículas.

À nossa escala, se dois carrinhos colidirem frontalmente, como se moverão após a colisão? E de que dependerão as suas velocidades após a colisão?

#### Questões pré-laboratoriais



1. Considere uma calha horizontal (**Fig. 30**) onde se movem dois carrinhos, sendo desprezável o atrito no eixo das rodas, ou, em alternativa, dois deslizadores a moverem-se numa calha de ar. Os carrinhos (ou deslizadores) colidem.



**Fig. 30** Carrinhos (em cima) e deslizadores (em baixo) que se movem numa calha e colidem.

- a) Que forças atuam sobre cada corpo na colisão? Quais são responsáveis pela interação entre eles? Justifique.
  - b) Pode aplicar-se a Lei da Conservação do Momento Linear a cada um dos corpos? E ao sistema dos dois corpos em colisão? Justifique.
2. Que tipos de colisões podem ocorrer? Caracterize-as quanto à conservação do momento linear e da energia cinética do sistema.
  3. Um carrinho (ou deslizador), colocado sobre uma calha horizontal (ou calha de ar), colide frontalmente com outro parado (**Fig. 30**). Após a colisão, seguem juntos. O carrinho é lançado cinco vezes e, de cada vez, altera-se a sua massa ou a massa do outro inicialmente parado.

- a) Que grandezas se devem medir para determinar os momentos lineares e as energias cinéticas de cada corpo antes e após a colisão? Como se poderão medir?
- b) Construa uma tabela para registar os valores dessas grandezas, antes e após a colisão.

4. A elasticidade dos materiais de dois corpos em colisão, 1 e 2, pode ser avaliada por um parâmetro designado por **coeficiente de restituição** (símbolo  $e$ ). Em colisões frontais, define-se como a razão entre a diferença das componentes escalares das velocidades dos corpos após a colisão,  $(v'_2 - v'_1)$  (velocidade de afastamento), e essa diferença antes da colisão,  $(v_1 - v_2)$  (velocidade de aproximação): 
$$e = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2}$$
. Verifica-se que  $0 \leq e \leq 1$ , tendo valor nulo numa colisão perfeitamente inelástica e 1 numa colisão elástica.

- a) Um carrinho colide frontalmente com um corpo fixo e, após a colisão, recua. Mostre que o coeficiente de restituição dos materiais em colisão é 
$$e = \left| \frac{v'_1}{v_1} \right|$$
.

- b) Na situação anterior, o carrinho passa por uma célula fotoelétrica. Sejam  $t'$  e  $t$  os tempos de passagem, respetivamente, após a colisão e antes da colisão. Mostre que a equação  $e = \left| \frac{v'_1}{v_1} \right|$  é equivalente a  $e = \frac{t}{t'}$ .



## Trabalho laboratorial



Nesta atividade investigam-se colisões a uma dimensão. Conclui-se se a resultante das forças exteriores sobre o sistema é, ou não, nula, avaliando-se a conservação de momento linear; determina-se a variação de energia cinética em colisões inelásticas e coeficientes de restituição numa colisão frontal com um alvo fixo.

**Material:** balança, massas marcadas, régua, craveira, calha e carrinhos (ou calha de ar e deslizadores), duas células fotoelétricas com cronómetro digital (ou sistema de aquisição de dados), ou sensor de posição.

**1.** Efetue uma montagem semelhante à da **Fig. 31** (em alternativa às fotocélulas pode usar um sensor de posição na extremidade da calha).

**2.** Lançando um carrinho, com velocidades moderadas, sobre outro parado, proceda de tal forma que, após a colisão, os dois sigam juntos. Repita mais quatro vezes, mudando a massa do carrinho lançado ou a massa do que estava parado. Use a tabela já construída para registar as grandezas que lhe permitirão avaliar eventuais variações de momento linear do sistema ou da sua energia cinética.

**3.** Altere a montagem, usando apenas uma célula fotoelétrica (ou o sensor de movimento) e fixando uma peça na extremidade da calha (**Fig. 32**). Nessa peça, diferentes grupos poderão colocar um elástico, um ímã ou outro material onde o carrinho irá embater.

**4.** Usando velocidades moderadas, lance o carrinho sete vezes contra a peça fixada na extremidade da calha. Procure variar, em cada lançamento, a velocidade do carrinho. Registe os tempos de interrupção da célula pela tira opaca, antes e depois da colisão, numa tabela (ou as velocidades no caso de usar um sensor de movimento).



**Fig. 31** Um carrinho colide frontalmente com outro em repouso.



**Fig. 32** Um carrinho colide frontalmente com um corpo fixo.

## Questões pós-laboratoriais

- Complete a tabela com o cálculo dos momentos lineares e das energias cinéticas. Avalie se houve conservação do momento linear e da energia cinética do sistema. Se houve diferenças, determine a respetiva variação percentual.
- Indique, justificando, que conclusões pode retirar sobre a resultante das forças sobre o sistema dos carrinhos durante a colisão.
- Avalie as condições experimentais: identifique fontes de erro e apresente explicações para as variações detetadas.
- Para a situação da colisão do carrinho com a peça fixada na extremidade da calha, trace um gráfico do tempo de passagem na célula antes da colisão,  $t$ , em função do tempo de passagem depois da colisão,  $t'$ . A partir da linha de ajuste aos pontos experimentais, determine o coeficiente de restituição dos materiais em colisão.
- Os valores dos coeficientes de restituição são importantes em diversos desportos. Por exemplo, o coeficiente de restituição de uma bola de futebol não pode ser inferior a um dado valor para que possa ser classificada como bola oficial. Qual é esse valor? Faça uma pesquisa que permita saber como esse valor é determinado.



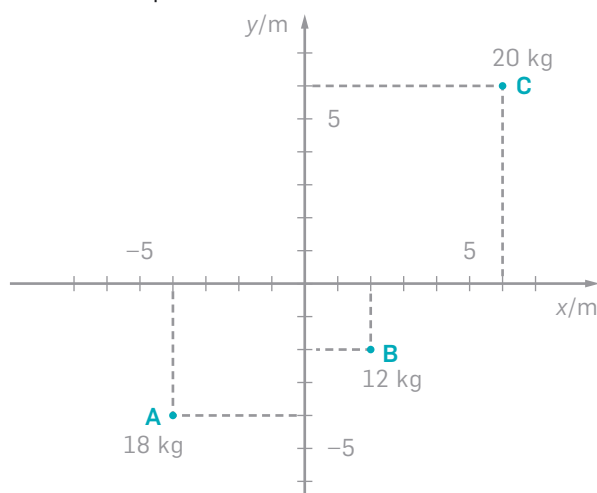
# QUESTÕES

## Nota

Na resolução das questões, considere  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

### 1.2.1 Centro de massa de um sistema de partículas

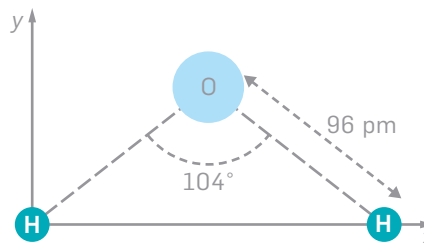
- Sobre o centro de massa de um sistema de partículas, quais das frases são corretas?
  - É um ponto onde se supõe estar a massa do sistema e onde se aplicam as forças exteriores que atuam sobre ele.
  - Só tem movimento de translação.
  - Só se define para corpos rígidos.
  - Pode estar em repouso e diversas partes do sistema estarem em movimento.
  - Tem aceleração constante se a resultante das forças exteriores for constante.
  - Localiza-se sempre num ponto onde haja matéria de um corpo rígido.
- Na figura representam-se três partículas, **A**, **B**, e **C**, sobre uma superfície.



As coordenadas do centro de massa do sistema no referencial indicado são:

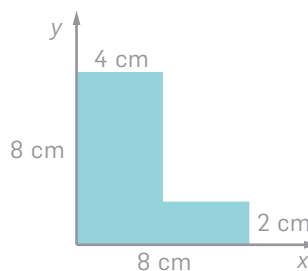
- |                 |                    |
|-----------------|--------------------|
| (A) (1,44; 0) m | (C) (1,44; 0,48) m |
| (B) (4,0; 0) m  | (D) (3,0; 3,0) m   |

- A figura representa uma molécula de água. As massas atômicas relativas do oxigénio e do hidrogénio são, respetivamente, 16,0 e 1,0.

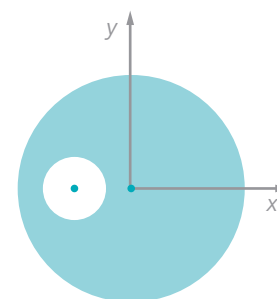


As coordenadas do centro de massa no sistema de eixos indicado são, em pm:

- |                  |
|------------------|
| (A) (48,0; 52,5) |
| (B) (59,1; 59,1) |
| (C) (48,0; 59,1) |
| (D) (75,6; 52,5) |
- Mostre que o centro de massa do sistema *Terra-Lua* se localiza no interior da Terra, cujo raio é  $6,4 \times 10^6 \text{ m}$ . Considere que a luz demora 1,28 s da Terra à Lua e que a massa da Terra é 81 vezes a massa da Lua.
  - Observe as figuras seguintes. Em **A** representa-se uma chapa homogénea de espessura constante. Em **B** representa-se uma chapa circular homogénea, de 4,0 dm de raio, onde se fez um orifício circular de raio 1,0 dm e cujo centro dista 2,0 dm do centro da chapa. Determine a posição do centro de massa de cada chapa no referencial indicado.



**A**



**B**

## 1.2.2 Velocidade e aceleração do centro de massa. Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

6. Três partículas em movimento, **A**, **B** e **C**, de massas 1,0 kg, 1,0 kg e 2,0 kg respetivamente, têm as suas posições descritas, em unidades SI, por:

$$\begin{aligned}\vec{r}_A(t) &= 2t\vec{e}_x + 3\vec{e}_y \\ \vec{r}_B(t) &= t^2\vec{e}_x + (2t + 2)\vec{e}_y \\ \vec{r}_C(t) &= t\vec{e}_x + t^2\vec{e}_y\end{aligned}$$

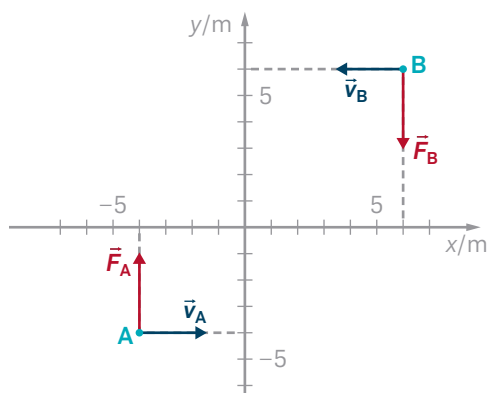
Determine, para um instante qualquer, a posição, a velocidade e a aceleração do centro de massa e o módulo da força resultante que atua no sistema.

7. Duas partículas, **A** e **B**, respetivamente de massas 100 g e 300 g, movem-se com velocidades (em  $\text{m s}^{-1}$ ) dadas por:

$$\begin{aligned}\vec{v}_A(t) &= (4t - 5)\vec{e}_x + (3t - 6)\vec{e}_y \\ \text{e } \vec{v}_B(t) &= (-4t - 5)\vec{e}_x + (-3t + 6)\vec{e}_y\end{aligned}$$

Determine a velocidade e a aceleração do centro de massa e a resultante das forças exteriores sobre o sistema.

8. Observe a figura: duas partículas **A** e **B**, respetivamente de massas 1,0 kg e 2,0 kg, movem-se numa superfície horizontal, onde o atrito é desprezável, com velocidades simétricas de módulo  $1,0 \text{ m s}^{-1}$ , atuando sobre elas forças simétricas de intensidade 20 N.



- a) Determine a velocidade e a aceleração do centro de massa do sistema e verifique que a resultante das forças exteriores é nula.

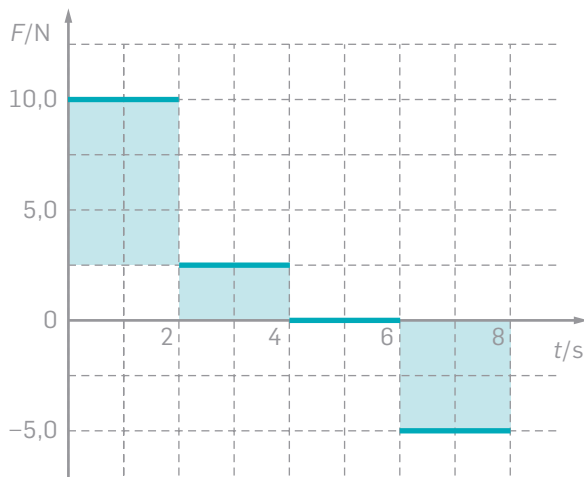
- b) Determine a posição do centro de massa passados 2,0 s de as partículas ocuparem as posições indicadas na figura.

## 1.2.3 Momento linear e Segunda Lei de Newton

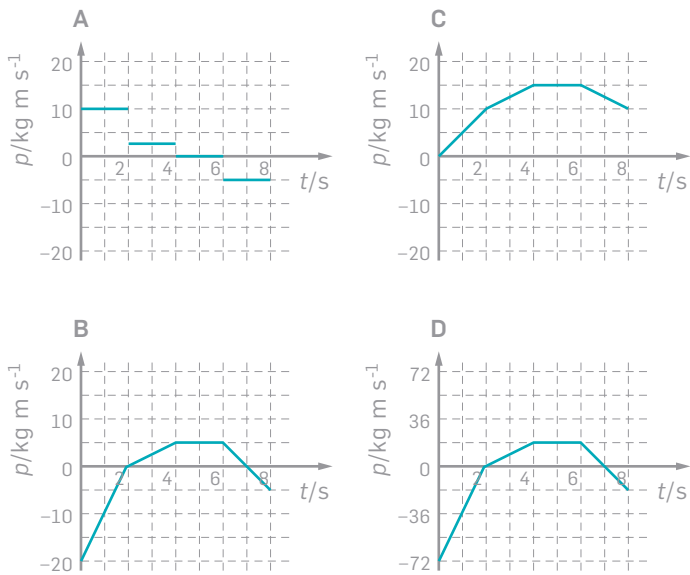
9. Explique fisicamente as seguintes situações:
- Após um salto, procura cair-se com as pernas fletidas, e no salto em altura os atletas caem sobre colchões de espuma.
  - Uma garrafa cai numa carpete sem se partir, mas parte ao cair num mosaico.
10. Um comboio de mercadorias em manobras colide com um vagão. Compare as variações de momento linear do comboio e do vagão, as forças que um exerce sobre o outro e as acelerações adquiridas por cada um deles.
11. Fez-se um teste de impacto com um veículo de 1,25 t. O veículo embateu num muro a  $40,0 \text{ km h}^{-1}$  e, imediatamente após o impacto, moveu-se a  $6,0 \text{ km h}^{-1}$  em sentido contrário. O tempo do impacto foi 80 ms.
- O módulo da variação de momento linear, na unidade SI, foi:
 

(A) $1,2 \times 10^4$	(C) $1,6 \times 10^4$
(B) $5,8 \times 10^4$	(D) $4,3 \times 10^4$
  - Determine a intensidade da força média que atuou sobre o veículo no impacto.
12. Um patinador de 75 kg move-se a  $10,0 \text{ m s}^{-1}$  e colide com outro que está parado. Após a colisão, que demorou 100 ms, seguem juntos com a velocidade de  $5,0 \text{ m s}^{-1}$ . Verifique se houve danos físicos, sabendo que a intensidade da força média exercida sobre cada um não pode exceder 4500 N.
13. Dois carrinhos, **A** e **B**, respetivamente de massas  $m$  e  $2m$ , estão em repouso em calhas horizontais, sendo o atrito desprezável. Durante 3 s são empurrados por forças horizontais iguais. Após esses 3 s, o momento linear de A é ... de B.
- |                  |                    |
|------------------|--------------------|
| (A) duas vezes o | (C) igual ao       |
| (B) metade do    | (D) quatro vezes o |

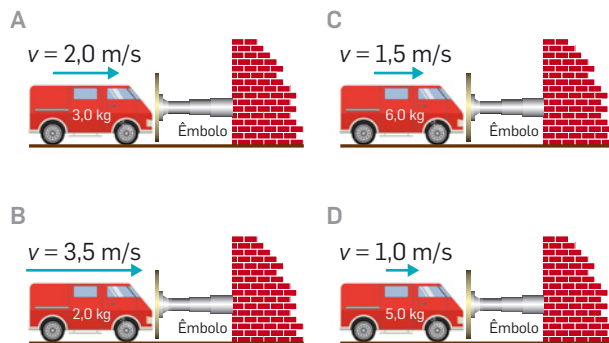
14. Um corpo de massa 2,0 kg, move-se no sentido negativo de um eixo, a  $36 \text{ km h}^{-1}$ , quando sobre ele atua uma força com a direção da velocidade, cuja componente escalar varia como mostra a figura.



Que gráfico traduz o momento linear do corpo em função do tempo?



15. Numa experiência pretende investigar-se o tempo necessário para parar uma camioneta de brincar. São realizadas quatro experiências, **A**, **B**, **C** e **D**, em que se varia a velocidade e a massa da camioneta (ver figura). Esta é parada por um êmbolo que aplica, nos quatro casos, a mesma força média.



A relação entre os tempos de paragem é:

- (A)  $t_D < t_C < t_A < t_B$       (C)  $t_B < t_A < t_D < t_C$   
 (B)  $t_A < t_B < t_C < t_D$       (D)  $t_D < t_A < t_B < t_C$

### 1.2.4 Lei da Conservação do Momento Linear. Colisões

16. Uma espingarda de 4,0 kg, inicialmente em repouso, dispara uma bala de 50 g com velocidade de módulo  $792 \text{ km h}^{-1}$ . Indique, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras.

Imediatamente após o disparo,

- A. o módulo do momento linear da bala é  $3,96 \times 10^4 \text{ kg m s}^{-1}$ .  
 B. a energia cinética da bala é  $1,21 \times 10^3 \text{ J}$ .  
 C. o módulo do momento linear da espingarda é  $11,0 \text{ kg m s}^{-1}$ .  
 D. a bala e a espingarda ficam com igual energia cinética.  
 E. o momento linear da espingarda é igual ao da bala.

17. Dois andares de um foguetão, **1** e **2**, de massas respetivamente  $4,50 \times 10^4 \text{ kg}$  e  $1,20 \times 10^5 \text{ kg}$ , movem-se unidos com velocidade de módulo  $2,50 \times 10^3 \text{ km/h}$ . Num certo instante, uma pequena explosão provoca a separação dos andares. Imediatamente após a explosão, o andar **1** move-se na mesma direção, mas diminui a sua velocidade em  $60 \text{ km/h}$ .

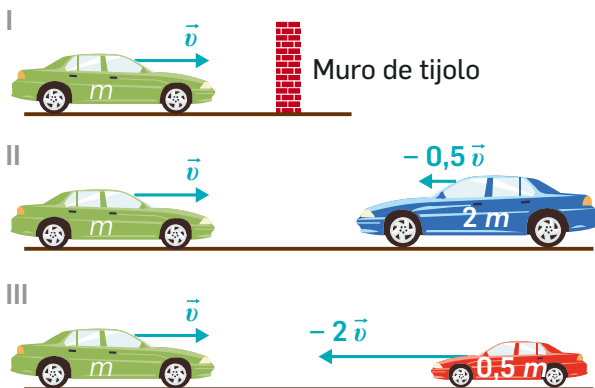
Desprezando a interação gravítica, após a explosão o andar **2** move-se a:

- (A)  $2,52 \times 10^3 \text{ km/h}$  e no mesmo sentido.  
 (B)  $4,35 \times 10^3 \text{ km/h}$  e no mesmo sentido.  
 (C)  $2,66 \times 10^3 \text{ km/h}$  e em sentido contrário.  
 (D)  $1,57 \times 10^4 \text{ km/h}$  e em sentido contrário.

18. Num teste de colisão, fez-se embater um automóvel a  $50,0 \text{ km h}^{-1}$  contra um muro. Imediatamente após a colisão, o veículo moveu-se em sentido contrário a  $4,0 \text{ km h}^{-1}$ . No veículo colaram-se sensores para medir as forças de impacto e também um boneco de teste com sensores. A massa total do sistema *automóvel* + *carga* era  $1200 \text{ kg}$  e o tempo do impacto foi  $0,200 \text{ s}$ . Indique, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras para o automóvel.

- A. O módulo do momento linear era  $1,67 \times 10^4 \text{ kg m s}^{-1}$  antes da colisão.
- B. O módulo da variação de momento linear foi  $6,48 \times 10^4 \text{ kg m s}^{-1}$ .
- C. Devido à colisão, a energia cinética diminuiu  $1,15 \times 10^5 \text{ J}$ .
- D. A intensidade da força média exercida sobre o veículo foi  $3,24 \times 10^5 \text{ N}$ .
- E. A energia cinética inicial era  $1,16 \times 10^5 \text{ J}$ .

19. A figura mostra três colisões que são perfeitamente inelásticas.

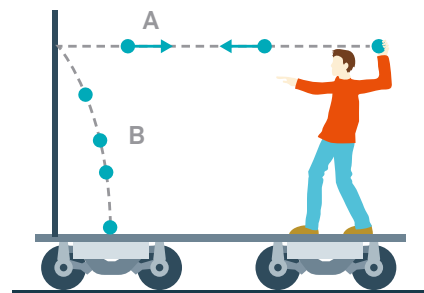


Após a colisão, o automóvel da esquerda:

- (A) fica parado apenas em I.
- (B) fica parado em I, II e III.
- (C) fica parado apenas em II e III.
- (D) não para.

20. Uma pessoa está num carro em repouso que se pode mover numa superfície horizontal de atrito desprezável (ver figura). Num dado instante atira uma bola contra uma placa montada rigidamente na base do carro. Considere duas situações com dois tipos de bolas de igual massa:

- A. A bola bate na placa, volta para a mão e é novamente atirada, repetindo-se sucessivamente o movimento.
- B. A bola bate na placa e cai na base do carro.



O carro:

- (A) vai permanecer imóvel porque o sistema é isolado.
- (B) vai mover-se para a esquerda apenas na situação A, pois a bola colide elasticamente com a placa.
- (C) vai mover-se para a esquerda apenas na situação B, pois a colisão da bola com a placa é inelástica.
- (D) vai mover-se alternadamente para a direita e para a esquerda na situação A.

21. Dois astronautas da ISS trocam uma bola entre si. Os astronautas mover-se-ão? Justifique.

22. Dois blocos, A e B, de massas  $1,0 \text{ kg}$ , deslocam-se no mesmo sentido e colidem. Imediatamente antes da colisão,  $v_A = 3v_B$ . Após a colisão, os blocos seguem juntos. O atrito entre as superfícies é desprezável e o intervalo de tempo da colisão é  $3,0 \text{ ms}$ .

- a) Qual das afirmações é correta?
  - (A) A velocidade do centro de massa do sistema é constante.
  - (B) Na colisão, a variação do momento linear de A é igual à variação do momento linear de B.
  - (C) Na colisão, a força que A exerce em B é igual à força que B exerce em A.
  - (D) O momento linear do sistema diminui após a colisão.
- b) Classifique o tipo de colisão.
- c) Compare, justificando, a velocidade final do sistema com a velocidade inicial de B.



23. Numa calha de ar, um carrinho de massa  $m$  e velocidade  $\vec{v}$  colide com outro de massa  $2m$  e velocidade  $-\vec{v}$ .

- Determine a velocidade do centro de massa do sistema.
- Esboce, justificando, o gráfico da posição do centro de massa em função do tempo, após a colisão, supondo que a posição inicial do centro de massa é a origem do referencial.

24. Duas bolas, uma de pingue-pongue e outra de *bowling*, movem-se retilineamente com o mesmo momento linear. Para as parar exerce-se uma mesma força constante em sentido contrário ao do movimento. Indique, justificando, quais das afirmações são verdadeiras.

- A bola de *bowling*, de maior massa, demora mais tempo a parar e percorre maior distância até parar.
- As bolas demoram o mesmo tempo a pararem.
- As bolas percorrem a mesma distância até pararem porque têm o mesmo momento linear inicial e final.
- A bola de pingue-pongue percorre uma menor distância até parar.
- Sendo iguais as forças necessárias para parar as bolas, são iguais as energias despendidas para as parar.

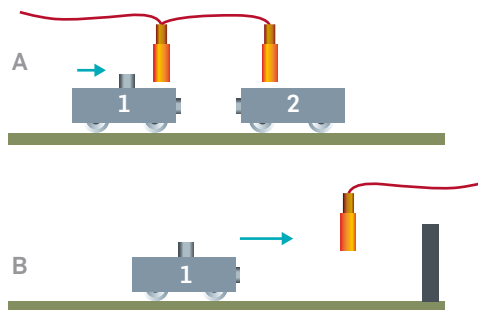
25. Uma bala de massa  $m$  colide com um pêndulo gravítico de massa  $M$  e comprimento  $l$ , continuando a mover-se no mesmo sentido mas com a velocidade reduzida a metade. Qual deve ser a velocidade mínima da bala para que o pêndulo dê uma volta completa?

## Atividade laboratorial

26. Numa experiência **A**, um carrinho **1**, colocado numa calha, foi lançado contra outro carrinho **2**, que se encontrava parado na mesma calha, seguindo os dois colados após a colisão.

Noutra experiência **B**, o carrinho **1** foi lançado contra um obstáculo fixado na extremidade da calha.

Em ambas as experiências mediram-se os tempos que uma tira opaca de largura 2,0 cm, colada a cada carrinho, interrompeu os feixes de luz de fotocélulas antes e após a colisão. A figura esquematiza as experiências **A** e **B**.



- Na parte **A**, em diferentes lançamentos variou-se a massa do carrinho **1** ou a massa do carrinho **2**. A tabela seguinte apresenta as massas dos carrinhos e os intervalos de tempo de interrupção do feixe antes da colisão,  $t_1$ , e após a colisão,  $t_2$ .

$m_1/g$	$m_2/g$	$t_1/ms$	$t_2/ms$
502,5	502,3	28,9	56,9
976,3	502,3	34,7	49,9
502,5	976,1	29,5	85,4
1500,4	502,3	36,6	47,2
502,5	1500,2	18,4	72,3

- Determine, em unidades SI, as velocidades do carrinho **1** e do sistema dos dois carrinhos após a colisão.
  - Avalie se houve conservação de momento linear e da energia cinética do sistema.
  - Poderá concluir-se que, durante a colisão, a resultante das forças sobre os carrinhos foi nula? Justifique.
- Da parte **B** da experiência registaram-se os dados da tabela seguinte:

$t_1/ms$	19,7	16,6	38,0	31,1	26,5	31,0	27,2
$t_2/ms$	24,8	20,3	48,5	38,5	31,6	37,7	32,4

Sendo  $v_1$  e  $v'_1$ , respetivamente, os módulos das velocidades do corpo antes e após a colisão, o coeficiente de restituição é dado por  $e = \frac{v'_1}{v_1}$ . Mostre que pode ser calculado por  $e = \frac{t_1}{t_2}$  e, a partir do respetivo gráfico, determine o coeficiente de restituição dos materiais em colisão.

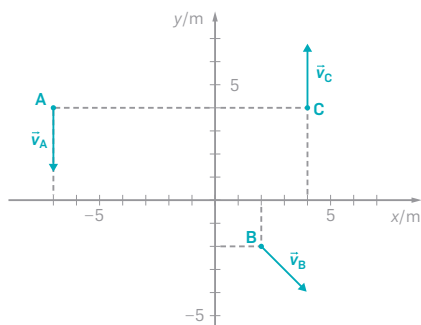
## Questões globais

27. A figura mostra uma superfície onde se encontram três partículas **A**, **B**, e **C**, de massas respetivamente 0,18 kg, 0,12 kg e 0,20 kg. Para o instante indicado, as velocidades das partículas, no SI, são:

$$\vec{v}_A(t) = -4,0\vec{e}_y$$

$$\vec{v}_B = 4,0\vec{e}_x - 4,0\vec{e}_y$$

$$\vec{v}_C = 4,0\vec{e}_y$$



- a) A posição do centro de massa no instante indicado na figura, em metros, é:

(A)  $-0,4\vec{e}_x + 2,6\vec{e}_y$

(C)  $0,0\vec{e}_x + 6,0\vec{e}_y$

(B)  $-1,0\vec{e}_x + 2,0\vec{e}_y$

(D)  $-0,8\vec{e}_x + 0,0\vec{e}_y$

- b) Qual é a velocidade do centro de massa?

- c) O momento linear do centro de massa do sistema de partículas, em  $\text{kg m s}^{-1}$ , é:

(A)  $0,32\vec{e}_x - 1,28\vec{e}_y$

(C)  $0,48\vec{e}_x - 0,40\vec{e}_y$

(B)  $2,00\vec{e}_x - 2,00\vec{e}_y$

(D)  $0,04\vec{e}_x - 0,04\vec{e}_y$

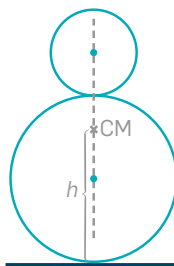
28. Na figura representa-se uma vassoura, suspensa por um fio, na posição horizontal. As duas partes da vassoura, **A** e **B**, de um e do outro lado do ponto de suspensão, possuem massas iguais? Justifique.



29. Observe a figura, que representa dois círculos.

Determine o valor de  $h$ , referente à posição do centro de massa, supondo que a figura representa:

- a) uma chapa homogênea, de raios 4,0 cm e 2,0 cm.  
b) um boneco de neve constituído por duas partes esféricas, de raios 40 cm e 20 cm.



30. Um homem de 70 kg e um rapaz de 35 kg estão sobre um ringue de gelo. Um empurra o outro, movendo-se o homem a  $1,0 \text{ km h}^{-1}$ . O empurrão demorou 0,10 s.

a) A que distância se encontram um do outro 3,0 s após a colisão?

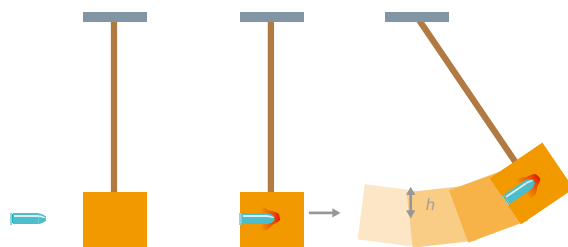
b) Que força média exerce o homem sobre o rapaz?

31. Um corpo **A** colide elasticamente com outro corpo **B**, da mesma massa, que estava em repouso, ficando **A** em repouso. Noutra situação, **A** colide com **B** (inicialmente em repouso) e ficam juntos após a colisão. Compare as velocidades de **A** e de **B** antes e depois da colisão, em cada um dos casos.

32. Uma pessoa encontra-se no meio de um lago gelado e quer chegar a terra firme. Indique possíveis formas de se aproximar da margem e discuta a sua exequibilidade.

33. Por que razão, em algumas corridas de automóveis, se colocam pneus velhos nos bordos da pista?

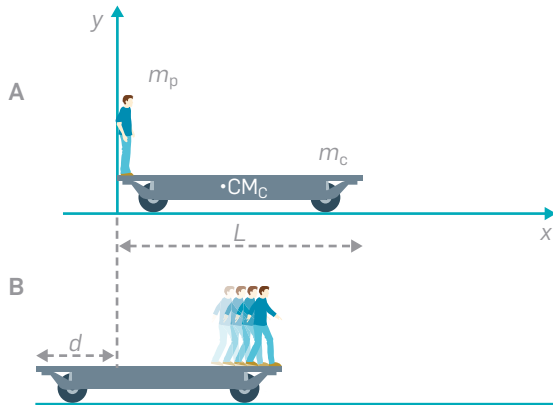
34. No pêndulo balístico, uma bala de massa  $m$  é disparada contra um bloco de massa  $M$  suspenso de um fio. A bala fica incrustada no bloco e o conjunto sobe a uma altura  $h$ , tal como mostra a figura.



Na tabela seguinte, associe cada grandeza à respetiva expressão.

I. Módulo da velocidade do conjunto após a colisão	A. $(m + M) gh$
II. Módulo da velocidade da bala	B. $\sqrt{2gh}$
III. Energia cinética após a colisão	C. $\frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}$
IV. Energia cinética da bala	D. $\frac{M}{m} (m + M) gh$
V. Energia dissipada na colisão	E. $\frac{(m + M)^2}{m} gh$

35. Uma pessoa está em repouso na extremidade de um carro, de comprimento  $L$ , que inicialmente também está em repouso, tal como mostra a figura **A**. Ao deslocar-se para a outra extremidade, verifica-se que o carro também se desloca. Quando chega à outra extremidade, a situação é a da figura **B**.



As massas da pessoa e do carro são, respetivamente,  $m_p$  e  $m_c$ . Considere que o carro é homogêneo e despreze todos os atritos e as dimensões da pessoa. Indique, justificando, quais das afirmações são verdadeiras.

- A.** Após a pessoa iniciar o movimento, o centro de massa do sistema *carro + pessoa* move-se com velocidade constante.
- B.** A pessoa andou sobre o carro uma distância  $L$ , mas em relação ao exterior apenas se deslocou  $L - d$ .
- C.** A abcissa da posição final da pessoa é  $\frac{m_c}{m_p + m_c} L$ .
- D.** A distância  $d$ , percorrida pelo carro, desde que a pessoa iniciou o movimento até que chegou à outra extremidade, é dada por  $d = \frac{m_c}{m_p + m_c} L$ .
- E.** O centro de massa do sistema *carro + pessoa* desloca-se de  $d = \frac{m_p}{m_p + m_c} L$ .

36. Uma pancada numa bola de golfe, de massa 50 g, inicialmente em repouso, submete-a a uma força variável. A força antes do contacto é nula e com a deformação da bola aumenta até um valor máximo. Após a deformação máxima, a força decresce de novo até se anular, quando a bola perde contacto com o taco. A bola está em contacto com o taco durante 0,50 ms, e tem velocidade de  $180 \text{ km h}^{-1}$  quando esse contacto cessa.

- a)** Qual foi o módulo da variação do momento linear da bola?
- b)** Determine as intensidades das forças médias, em kN, que atuaram na bola e no taco.

37. Uma bala de massa 10 g move-se horizontalmente quando colide com um pêndulo de massa 990 g e comprimento 1,0 m, inicialmente em repouso, ficando incrustada nele. A velocidade do sistema, imediatamente após o choque, tem o valor mínimo que lhe permite dar a volta completa numa trajetória circular. Considere desprezável a resistência do ar e o peso do fio. Determine:

- a)** o módulo da velocidade mínima do sistema imediatamente após a colisão e o módulo da velocidade da bala imediatamente antes da colisão.
- b)** a percentagem de energia dissipada na colisão.


38. Uma bola cai de 1,50 m de altura do solo e ressalta a 1,20 m. A massa da bola é 200 g e a duração do choque com o solo é 10,0 ms. Despreze a resistência do ar.

- a)** Numa colisão frontal de um corpo contra uma superfície fixa, define-se coeficiente de restituição dos materiais por  $e = \frac{v'_1}{v_1}$ , sendo  $v_1$  e  $v'_1$ , respetivamente, os módulos das velocidades do corpo antes e após a colisão. Determine o coeficiente de restituição para os materiais em colisão.
- b)** Determine o módulo da variação de momento linear da bola e a intensidade média da resultante das forças que atuam na bola.
- c)** Verifique se houve variação de energia cinética e conclua sobre o tipo de colisão ocorrida.

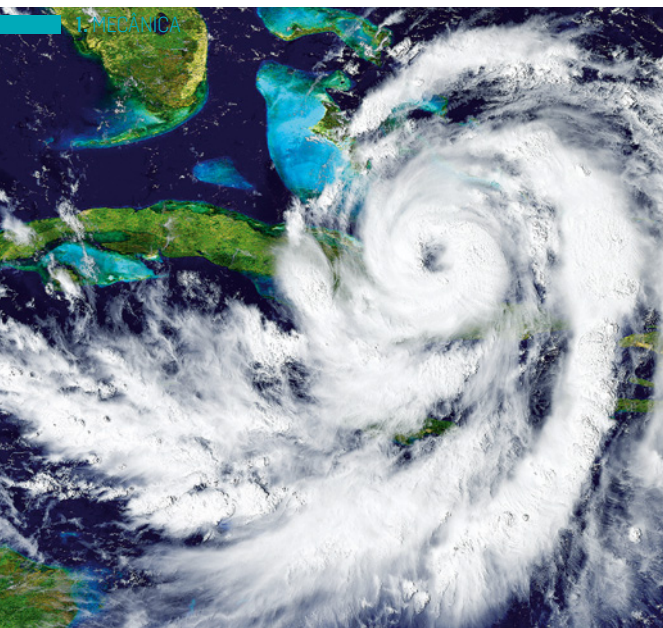


# 1.3 FLUIDOS

---

- 
- 1.3.1 Fluidos, massa volúmica, densidade relativa e pressão
  - 1.3.2 Forças de pressão em fluidos
  - 1.3.3 Lei Fundamental da Hidrostática
  - 1.3.4 Lei de Pascal
  - 1.3.5 Impulsão e Lei de Arquimedes; equilíbrio de corpos flutuantes
  - 1.3.6 Movimento de corpos em fluidos; viscosidade
  - AL 1.4** Coeficiente de viscosidade de um líquido

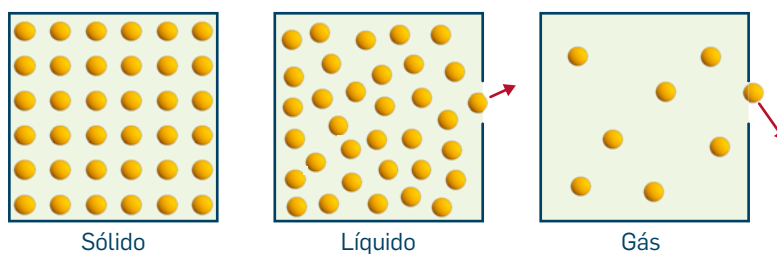




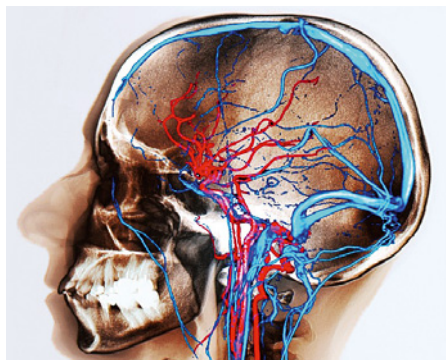
**Fig. 1** A interpretação dos fenômenos atmosféricos requer conhecimentos sobre fluidos.

### Fluidos: líquidos e gases.

**Fig. 2** Os líquidos e gases tendem a escapar do recipiente que os contém por as ligações entre as partículas serem fracas.



**Fig. 3** Selo italiano que homenageia o grego Arquimedes (séc. III a.C.), que estudou a flutuação dos corpos.



**Fig. 4** Exame clínico (angiografia por ressonância magnética) que mostra o sangue nas artérias (a vermelho) e nas veias (a azul).

Estamos rodeados de **fluidos**, termo que designa líquidos e gases, como é o caso dos oceanos e da atmosfera (**Fig. 1**).

A nossa sobrevivência depende de fluidos: da água que bebemos, do ar que respiramos, do sangue que circula no nosso corpo.

O termo fluido está associado a substâncias que tendem a escapar por uma abertura no recipiente onde estão contidos, como os líquidos e os gases.

Por exemplo, a água num coador escapa pelos seus orifícios e um perfume tende a espalhar-se pelo espaço que tem disponível. Este comportamento não se observa nos sólidos, pois as forças de ligação entre as suas partículas são, normalmente, mais fortes do que nos líquidos e gases (**Fig. 2**).

A mecânica dos fluidos divide-se em duas grandes áreas: a estática de fluidos, normalmente designada por **hidrostática**, e a dinâmica de fluidos, designada por **hidrodinâmica**.

Apesar do prefixo «hidro», de origem grega, que significa água, a hidrostática e a hidrodinâmica estudam quaisquer fluidos. A hidrostática analisa fluidos em equilíbrio estático e a hidrodinâmica estuda fluidos em movimento.

O estudo dos fluidos começou muito cedo, nos tempos do sábio grego Arquimedes (**Fig. 3**), que estabeleceu uma lei para a flutuação dos corpos em água.

Estudaremos aspetos fundamentais da hidrostática, designadamente certas grandezas que caracterizam os fluidos, assim como algumas leis que descrevem o seu comportamento em repouso.

Estudaremos também movimentos de corpos no seio de fluidos.

O estudo dos fluidos é importante em áreas diversas, desde a meteorologia à engenharia ou medicina (**Fig. 4**), para além de permitir explicar fenômenos comuns como, por exemplo, a pressão atmosférica, a flutuação dos corpos em líquidos ou a sustentação dos aviões.



## 1.3.1 Fluidos, massa volúmica, densidade relativa e pressão

No estudo de corpos sólidos utilizamos sobretudo as grandezas massa e força. Nos fluidos é mais conveniente usar a massa volúmica e a pressão.

Para um corpo homogéneo de massa  $m$  e volume  $V$ , a **massa volúmica** (ou densidade) do material que o constitui,  $\rho$ , é o quociente

$$\rho = \frac{m}{V}$$

A sua unidade SI é o quilograma por metro cúbico ( $\text{kg m}^{-3}$ ).

Os gases têm massas volúmicas menores do que os líquidos e do que os sólidos, por as partículas constituintes estarem mais afastadas.

A **Tab. 1** indica massas volúmicas de alguns materiais. A massa volúmica do gelo é uma exceção à regra anterior: é menor do que a da água líquida. Isso explica por que razão uma garrafa cheia de água colocada no congelador acaba por partir: a mesma massa passa a ocupar um volume maior, pois a densidade do gelo é menor (**Fig. 5**). O mercúrio é o líquido mais denso. A densidade dos gases é medida à pressão de 1 atm ( $1,013 \times 10^5$  Pa) e à temperatura de 0 °C.

Sólidos		Líquidos		Gases	
Material	$\rho / \text{kg m}^{-3}$	Material	$\rho / \text{kg m}^{-3}$	Material	$\rho / \text{kg m}^{-3}$
Ouro	$19,3 \times 10^3$	Água (a 4 °C)	$1,00 \times 10^3$	Ar seco	1,293
Ferro	$7,9 \times 10^3$	Álcool etílico	$0,79 \times 10^3$	Azoto	1,251
Alumínio	$2,7 \times 10^3$	Azeite	$0,92 \times 10^3$	Hélio	1,179
Gelo (a 0 °C)	$0,92 \times 10^3$	Mercúrio	$13,6 \times 10^3$	Hidrogénio	0,090
Cortiça	$0,24 \times 10^3$	—	—	Oxigénio	1,429

Define-se também **densidade relativa** de um material,  $d$ , como a razão entre a massa volúmica do material e a massa volúmica de um material padrão:

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{padrão}}}$$

A expressão mostra que a densidade relativa não tem unidades. Para os sólidos e líquidos, o material padrão é a água a 4 °C e à pressão atmosférica normal. Para os gases é o ar, nas mesmas condições de pressão e temperatura do gás.

Dizer, por exemplo, que a densidade relativa do ferro é 7,9 significa que é mais denso do que a água 7,9 vezes. A separação de líquidos imiscíveis num recipiente permite ordenar as respetivas densidades relativas (**Fig. 6**).



**Fig. 5** Quando a água solidifica, a garrafa parte-se porque a água aumenta o seu volume, passando a ter menor massa volúmica.

**Tab. 1** Massas volúmicas de alguns materiais. Os valores para os gases referem-se à temperatura de 0 °C e à pressão atmosférica normal.

**Densidade relativa:** indica se um material é mais ou menos denso do que um material padrão.



**Fig. 6** Líquidos imiscíveis: a densidade relativa aumenta sucessivamente do líquido superior para o líquido inferior.

Se um corpo for **não homogéneo**, ou seja, tiver valores diferentes de massa volúmica para diferentes partes, pode definir-se a **massa volúmica média** como o quociente da massa total pelo volume total:

$$\rho_m = \frac{m}{V}$$

### Questão resolvida 1



Uma estrela de neutrões é um objeto astronómico compacto cuja massa é da ordem de grandeza da massa do Sol, cerca de  $2 \times 10^{30}$  kg, mas cujo raio é muito menor, cerca de 10 km.

- a) Compare as ordens de grandeza da massa volúmica de uma estrela de neutrões e da massa volúmica de um neutrão (ou de um protão), cuja massa e raio são, respetivamente,  $m \approx 2 \times 10^{-27}$  kg e  $r \approx 10^{-15}$  m.
- b) Compare as ordens de grandeza da massa volúmica deste astro e da massa volúmica de um vácuo obtido no laboratório ( $10^{-17}$  kg m<sup>-3</sup>) e do espaço interestelar ( $10^{-21}$  kg m<sup>-3</sup>).



- a) O volume de uma esfera de raio  $r$  é  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

$$\text{Estrela de neutrões: } \rho_{\text{en}} = \frac{2 \times 10^{30}}{\frac{4}{3} \pi \times (10^4)^3} \approx 10^{18} \text{ kg m}^{-3}$$

$$\text{Neutrão: } \rho_n = \frac{2 \times 10^{-27}}{\frac{4}{3} \pi \times (10^{-15})^3} \approx 10^{18} \text{ kg m}^{-3}$$

A ordem de grandeza é a mesma.

- b)  $\frac{10^{18}}{10^{-17}} = 10^{35}$ : 35 ordens de grandeza maior;  
 $\frac{10^{18}}{10^{-21}} = 10^{39}$ : 39 ordens de grandeza maior.

### Questão resolvida 2



Um cubo de 1,00 dm de aresta não é homogéneo, sendo constituído por volumes iguais de ferro e de alumínio cujas massas volúmicas são, respetivamente,  $7,87 \times 10^3$  kg m<sup>-3</sup>

e  $2,70 \times 10^3$  kg m<sup>-3</sup>.

Determine a sua massa volúmica média.



A definição de massa volúmica, aplicada a cada parte, permite calcular a massa dessa parte, sendo o respetivo volume igual a  $\frac{(1,00 \text{ dm})^3}{2} = 0,500 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

$$m_{\text{ferro}} = \rho_{\text{ferro}} \times V_{\text{ferro}} = 7,87 \times 10^3 \times 0,500 \times 10^{-3} = 3,935 \text{ kg}$$

$$m_{\text{alumínio}} = \rho_{\text{alumínio}} \times V_{\text{alumínio}} = 2,70 \times 10^3 \times 0,500 \times 10^{-3} = 1,350 \text{ kg}$$

A massa total é 5,285 kg e o volume total é  $1,00 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

$$\text{logo, } \rho_m = \frac{5,285}{1,00 \times 10^{-3}} = 5,29 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

### Atividade 1



Conta a lenda que o rei de Siracusa, intrigado sobre a verdadeira constituição de uma coroa supostamente de ouro, pediu ao sábio Arquimedes que lhe resolvesse o problema. Faça uma pesquisa sobre o raciocínio de Arquimedes.



Ao comprimir um fluido, a sua massa volúmica varia, pois a mesma massa passa a ocupar um volume menor. Essa variação é grande nos gases (são muito compressíveis), mas pequena em muitos líquidos (são pouco compressíveis). Um **líquido ideal** é **incompressível**, ou seja, a sua massa volúmica não varia.

Comprimir significa aumentar a pressão, conceito presente no dia a dia: regulamos a pressão numa caldeira de aquecimento de água, medimos a pressão dos pneus ou a nossa pressão sanguínea, chamada tensão arterial (**Fig. 7**).

Mas como se define a **pressão**?

Se um corpo estiver sobre uma superfície exercendo sobre ela uma força perpendicular, como os pés da bailarina da **Fig. 8**, essa força, de intensidade  $F$ , distribuir-se-á pela superfície de contacto, de área  $A$  (**Fig. 8**). A pressão será a intensidade da força exercida por unidade de área:

$$p = \frac{F}{A}$$

No caso da bailarina da **Fig. 8**, a intensidade da força exercida, estando a bailarina em repouso, é igual à intensidade do peso. Mas a pressão exercida na superfície será maior se a área de contacto for menor, ou seja, quando a bailarina se apoiar na ponta dos pés.

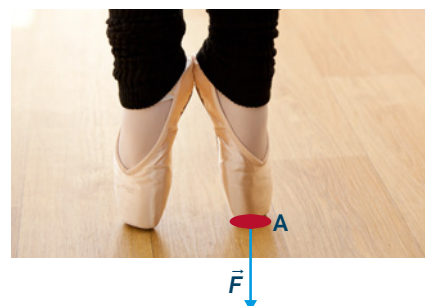
A unidade SI de pressão é o pascal (símbolo Pa): 1 Pa é a pressão exercida por uma força de intensidade 1 N que atua perpendicular e uniformemente sobre uma superfície de área igual a 1 m<sup>2</sup>.

E se a força for exercida obliquamente na superfície como, por exemplo, a que exerce o pé direito da bailarina da **Fig. 9**? Nesse caso, decompõe-se a força  $\vec{F}$  em duas componentes, a componente paralela à superfície,  $\vec{F}_{\parallel}$ , e a componente perpendicular,  $\vec{F}_{\perp}$ , mas apenas esta última contribui para a pressão.

Podemos, então, definir a grandeza pressão (que é uma grandeza escalar!), supondo que a força se exerce uniformemente na superfície:



**Fig. 7** Mede-se a pressão do ar dos pneus dos veículos e a pressão sanguínea (tensão arterial).



**Fig. 8** A pressão exercida pela bailarina no solo é a intensidade da força por unidade de área.



**Fig. 9** O pé direito exerce uma força não perpendicular à superfície: apenas a componente perpendicular contribui para a pressão exercida no solo.

**Pressão**

Intensidade da componente perpendicular da força exercida numa superfície por unidade de área:

$$p = \frac{F_{\perp}}{A}$$

Pa                  N                  m<sup>2</sup>

Se a força for exercida perpendicularmente:

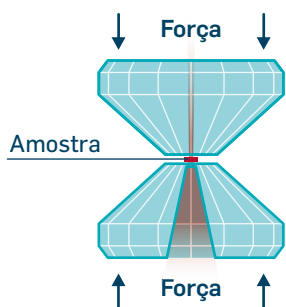
$$F = F_{\perp} \Rightarrow p = \frac{F}{A}$$

Para a mesma força, a pressão é inversamente proporcional à área.

$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$



**Fig. 10** A diminuição da área de contacto das superfícies faz aumentar a pressão.



**Fig. 11** Pontas de diamante em dispositivo para se obter altas pressões.

No dia a dia aumentamos muitas vezes a pressão diminuindo a área de contacto: pregamos um prego pela sua extremidade pontiaguda, afiamos as facas para melhor cortarem e usamos pneus com estrias para obter mais segurança na estrada (**Fig. 10**). As estrias dos pneus novos não só aumentam a pressão sobre o solo como permitem a infiltração da água nos seus rasgos (nos pneus lisos, a água não tem onde se infiltrar e forma uma camada entre o solo e o pneu, que diminui o atrito).

Além do pascal, que é a unidade SI de pressão, são comuns outras unidades. É o caso do bar, da atmosfera e do milímetro (ou do centímetro) de mercúrio (**Tab. 2**), cuja origem será adiante indicada.

Nome da unidade	Símbolo	Valor
Bar	bar	1 bar = $10^5$ Pa
Atmosfera	atm	1 atm = $1,013 \times 10^5$ Pa 1 atm = 760 mmHg 1 atm = 76 cmHg
Milímetro de mercúrio (ou torr)	mmHg (ou Torr)	1 mmHg = 133,322 Pa
Centímetro de mercúrio	cmHg	1 cmHg = 1333,22 Pa

**Tab. 2** Unidades de pressão.

A pressão no centro da Terra é cerca de 350 GPa ( $3,5 \times 10^{11}$  Pa), ou seja, é 3,5 milhões de vezes superior à pressão atmosférica normal. Mas em laboratório já se conseguiram atingir pressões de 1 terapascal ( $10^{12}$  Pa). Foi usado um dispositivo que é uma espécie de tenaz: a amostra é comprimida entre dois pequenos diamantes (diâmetro entre 10 e 20  $\mu\text{m}$ ) onde se exerceram forças enormes (**Fig. 11**).

### Questão resolvida 3

O que exerce mais pressão: uma pessoa de 80 kg, em repouso sobre o solo e com sapatos, de área  $250 \text{ cm}^2$  cada um, ou um gás contido num cilindro (como na figura) que exerce uma força de 50 N sobre um êmbolo de área  $10 \text{ dm}^2$ ?



**P** A força exercida no solo é o par ação-reação da força normal, cuja intensidade é igual à do peso.

Como há dois sapatos e  $p = \frac{F}{A}$ , vem:

$$p = \frac{mg}{A} = \frac{80 \times 10}{500 \times 10^{-4}} = 1,6 \times 10^4 \text{ Pa}$$

A pressão média exercida pelo gás sobre o êmbolo é

$$p = \frac{F}{A} = \frac{50}{10 \times 10^{-2}} = 5,0 \times 10^2 \text{ Pa}$$

Conclui-se que a pessoa exerce mais pressão sobre o solo do que o gás sobre o êmbolo.

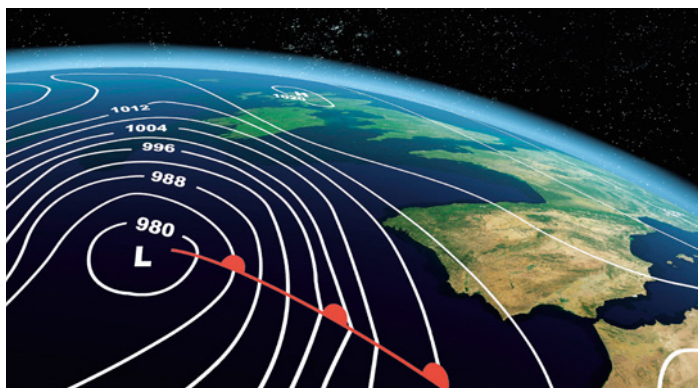


Num gás, a pressão tem origem nas colisões constantes das moléculas com as superfícies em contacto (Fig. 12).

A Terra é envolvida por uma camada de gases, a atmosfera, a qual exerce pressão sobre a sua superfície: a **pressão atmosférica**. Esta é considerada **normal** quando, medida ao nível do mar, é  $1,013 \times 10^5$  Pa (1 atm), o que equivale a dizer que sobre  $1 \text{ m}^2$  da superfície há uma camada de ar com o peso de  $1,013 \times 10^5$  N.

A pressão atmosférica diminui com a altitude (Fig. 13), pois a atmosfera é cada vez mais rarefeita. Essa diminuição é sentida nos nossos ouvidos quando subimos ao cimo de uma serra ou quando andamos de avião (apesar de neste haver pressurização que minimiza esse efeito).

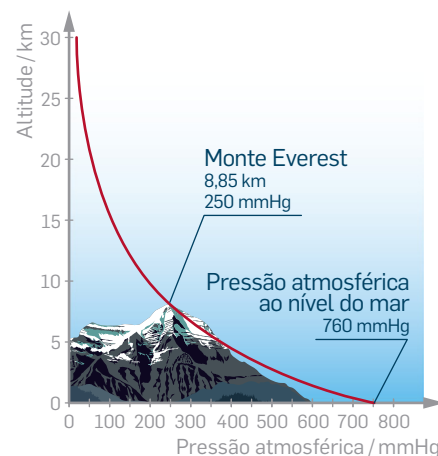
A meteorologia usa mapas de pressão para fazer previsões, como o da Fig. 14, onde se visualizam linhas, chamadas linhas isobáricas, que unem zonas de igual pressão. O vento desloca-se das altas pressões para as baixas pressões.



Foi o italiano Evangelista Torricelli que mostrou, em 1643, que existia pressão atmosférica. Onze anos depois, o alemão Otto von Guericke realizou uma experiência que não deixou dúvidas sobre a sua existência. Colocou topo a topo dois hemisférios metálicos e extraiu o ar das suas cavidades. Por efeito da pressão atmosférica, os hemisférios aderiam tão bem um ao outro que não se separaram ao serem puxados em sentido oposto por oito cavalos de cada lado (Fig. 15)! A experiência, realizada na cidade alemã de Magdeburgo, ficou conhecida por «experiência dos hemisférios de Magdeburgo».



**Fig. 12** Num gás, a pressão nas paredes do recipiente deve-se às colisões das moléculas com essas superfícies.



**Fig. 13** A pressão atmosférica decresce com a altitude.

**Fig. 14** Mapas de pressão atmosférica: «L» assinala uma zona de baixa pressão e «H» uma zona de alta pressão.

### Pressão atmosférica normal:

$$1,013 \times 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg}$$

### + QUESTÕES p. 129

**Fig. 15** Von Guericke colocou dois hemisférios topo a topo e fez o vazio no seu interior. Nem mesmo a força de muitos cavalos os conseguiu separar.

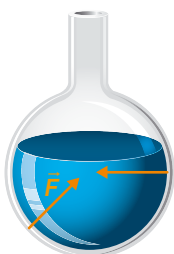




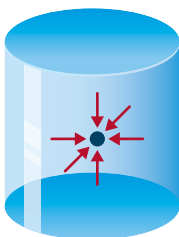
**Fig. 16** As forças de pressão do líquido sobre o recipiente são perpendiculares às suas paredes, pelo que a água sai horizontalmente pelos orifícios.

**Forças de pressão:** num fluido em repouso exercem-se perpendicularmente nas superfícies.

**Fig. 17** Um líquido em repouso exerce forças de pressão perpendiculares às superfícies de um corpo nele imerso.



**Fig. 18** O recipiente exerce forças no líquido perpendicularmente às suas paredes.



**Fig. 19** Líquido em repouso: é nula a resultante das forças de pressão sobre uma pequena porção do fluido.

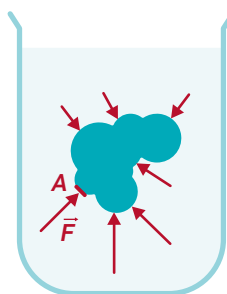
## 1.3.2 Forças de pressão em fluidos

Quando nadamos debaixo de água sentimos uma certa pressão nos tímpanos, resultante das forças exercidas pela água sobre eles. Estas forças designam-se por **forças de pressão**.

E como atuam essas forças? Se tivermos um **líquido em repouso** (diz-se em **equilíbrio hidrostático**) num recipiente com orifícios, o líquido sairá numa direção perpendicular às paredes do recipiente (**Fig. 16**). Tal facto permite concluir que as forças de pressão exercidas pelo líquido nas paredes do recipiente são perpendiculares a estas. Também sobre um corpo imerso num líquido em repouso atuam forças de pressão perpendiculares às suas superfícies (**Fig. 17**).

A intensidade da força de pressão,  $F$ , que um líquido exerce em qualquer pequena superfície de área  $A$  (**Fig. 17**), obtém-se da definição de pressão:

$$F = p A$$



Como as forças exercidas por um líquido nas paredes do recipiente são perpendiculares a estas, as forças exercidas pelas paredes no líquido serão simétricas, pela Terceira Lei de Newton (**Fig. 18**). Se assim não fosse o líquido estaria sujeito a forças com componentes tangenciais que o obrigariam a mover-se, contrariando a hipótese de estar em repouso.

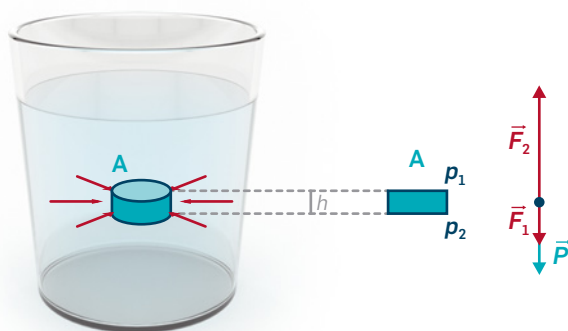
E que forças são exercidas numa pequena porção de um líquido em repouso? Se medirmos a pressão num ponto do líquido com um sensor verificaremos que é a mesma qualquer que seja a orientação do sensor. Então, nesse ponto, as forças de pressão exercem-se em todas as direções com a mesma intensidade (**Fig. 19**), sendo nula a sua resultante (se não fosse, o líquido deslocar-se-ia, deixando de estar em repouso).

Portanto, um líquido exerce forças de pressão nos pontos do seu interior, nas paredes do recipiente e em qualquer corpo nele imerso.

## 1.3.3 Lei Fundamental da Hidrostática

Medições feitas com sensores de pressão mostram que a pressão no interior de um líquido aumenta com a profundidade e é igual à mesma profundidade. Um mergulhador apercebe-se bem deste facto: quanto mais fundo estiver, maior pressão sentirá, sobretudo nos ouvidos (**Fig. 20**).

Para explicar o aumento da pressão com a profundidade analisemos um líquido homogéneo, de massa volúmica constante,  $\rho$ , em repouso, ou seja, em equilíbrio hidrostático. Nesse fluido isolemos uma porção com forma de um cilindro de altura  $h$  e área da base  $A$  (**Fig. 21**).



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} = \vec{0}$$

Como a porção de líquido está em repouso, a força resultante que nela atua é nula. As forças de pressão horizontais anulam-se, mas as forças de pressão verticais não se anulam pois têm de compensar o peso da porção de líquido. Seja  $\vec{F}_1$  a força de pressão exercida na face superior,  $\vec{F}_2$  a força de pressão exercida na face inferior e  $\vec{P}$  o peso da porção de líquido. Então, vem:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow F_1 - F_2 + P = 0$$

Sendo  $p_1$  e  $p_2$  a pressão respetivamente no topo e na base do cilindro, as intensidades das forças de pressão verticais são dadas por:

$$F_1 = p_1 A \quad \text{e} \quad F_2 = p_2 A$$

A intensidade do peso é dada por:

$$P = mg = \rho Vg \quad \text{com} \quad V = Ah \Rightarrow P = \rho Ahg$$

Logo:

$$F_1 + P = F_2 \Rightarrow p_1 A + \rho Ahg = p_2 A \Rightarrow p_2 = p_1 + \rho gh$$

Repare-se que a área  $A$  da base do cilindro não aparece no resultado. Também a porção de fluido poderia ter uma forma qualquer de altura  $h$ .



**Fig. 20** Quanto maior for a profundidade, maior será a pressão sobre o mergulhador. Por isso, os praticantes de mergulho em águas profundas usam fatos especiais.

**Fig. 21** O pequeno volume cilíndrico no interior do fluido está em repouso: a resultante das forças que atuam sobre ele é nula.

A equação anterior generaliza-se a dois pontos quaisquer, **A** e **B**, do interior de um líquido cuja distância na vertical é  $h$  (mesmo sem estarem na mesma linha vertical):

$$p_B = p_A + \rho gh \Leftrightarrow p_B - p_A = \rho gh \Leftrightarrow \Delta p = \rho gh$$

Estas expressões traduzem a Lei Fundamental da Hidrostática, ou Lei de Stevin (em homenagem ao trabalho do belga Simon Stevin no séc. XVII):

### Lei Fundamental da Hidrostática (ou Lei de Stevin)

Num líquido incompressível e em repouso, a diferença de pressão entre dois pontos no seu interior é a exercida pela coluna de líquido de altura igual ao desnível vertical dos dois pontos:

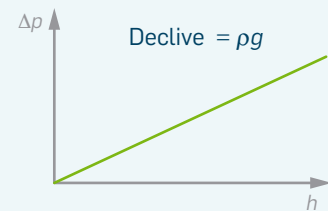
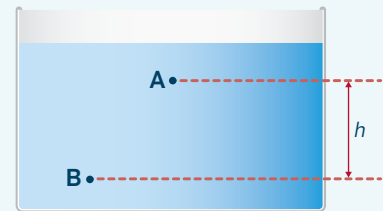
$$\Delta p = \rho gh$$

Pa       $\frac{\text{m s}^{-2}}{\text{kg m}^{-3}}$  m

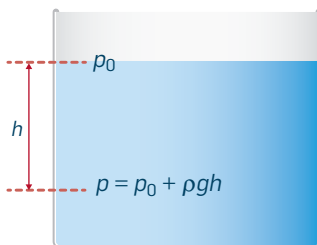
ou

$$p_B = p_A + \rho gh$$

- A diferença de pressão entre dois pontos de um líquido é diretamente proporcional ao desnível entre eles, dependendo a constante de proporcionalidade da massa volúmica do líquido.
- A diferença de pressão entre dois pontos de um líquido é independente da forma do recipiente que o contém.
- Pontos do líquido ao mesmo nível ( $h = 0$ ) têm pressões iguais.
- A pressão aumenta com a profundidade no líquido.



Maior massa volúmica  
⇒ maior declive da reta



**Fig. 22** A pressão será tanto maior quanto maior for a profundidade.

Num líquido incompressível (massa volúmica constante) e em repouso (como, aproximadamente, a água numa piscina), a pressão na superfície livre do líquido é a pressão atmosférica, que designaremos por  $p_0$ . Se  $h$  for a distância vertical entre um ponto do líquido e a sua superfície livre (ou seja, a profundidade do ponto), e estando o recipiente aberto para a atmosfera (**Fig. 22**), a pressão nesse ponto, chamada **pressão absoluta**, será dada por:

$$p = p_0 + \rho gh$$

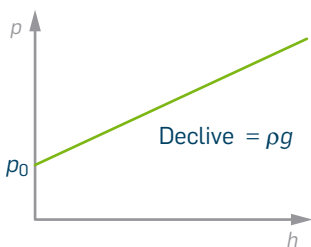
A pressão devida apenas ao líquido, dada pela parcela  $\rho gh$ , chama-se pressão hidrostática ou pressão manométrica. Pode, então, escrever-se:

$$p_{\text{absoluta}} = p_{\text{atmosférica}} + p_{\text{manométrica}}$$

com

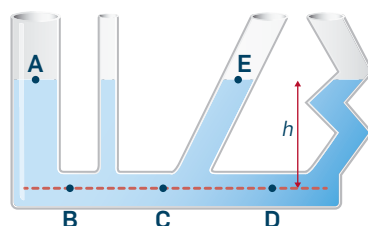
$$p_{\text{manométrica}} = \rho gh$$

A pressão absoluta varia linearmente com a profundidade no líquido (**Fig. 23**).



**Fig. 23** Variação da pressão absoluta com a profundidade.

A independência da pressão com a forma dos recipientes explica o comportamento de um líquido num **sistema de vasos comunicantes**. A **Fig. 24** mostra um exemplo: tubos de formas diferentes comunicam entre si de modo que um líquido neles contido sobe exatamente à mesma altura em todos eles. Como, pela Lei Fundamental da Hidrostática, os pontos ao mesmo nível têm de ter a mesma pressão, as alturas a que subirão nos tubos terá de ser a mesma.



Lei de Stevin:

$$p_A = p_E = p_0$$

$$p_B = p_C = p_D = p_0 + \rho gh$$

**Vasos comunicantes:** o líquido fica ao mesmo nível em todos os recipientes, qualquer que seja a sua forma.

**Fig. 24** Sistema de vasos comunicantes e sua explicação com base na Lei Fundamental da Hidrostática (Lei de Stevin).

#### Questão resolvida 4

Duas barragens são projetadas para dois rios que ficarão, depois de cheias as albufeiras, com a mesma profundidade perto do paredão. Contudo, as albufeiras terão comprimentos muito diferentes.

Qual dos paredões deverá ser mais resistente, o da albufeira comprida ou o da mais pequena?  
A espessura do paredão deve ser a mesma de cima até baixo?

**P** Os paredões devem ter a mesma resistência pois a pressão num e no outro é a mesma, independentemente da extensão da albufeira. Essa pressão só depende da profundidade da água, que é a mesma, como se representa na figura, e

não da sua quantidade. Mas, em ambas as situações, o paredão deve ter uma espessura que aumente de cima para baixo, pois a pressão a que está submetido aumenta com a profundidade.



#### Questão resolvida 5

Um mergulhador está submerso num lago, onde a pressão atmosférica é  $1,0 \times 10^5$  Pa. A que profundidade se deve encontrar para estar a uma pressão dupla da pressão atmosférica, supondo que é constante a massa volúmica da água? Considere que a massa volúmica da água é  $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ .

**P** De  $p = p_0 + \rho gh$ , vem  $2p_0 = p_0 + \rho gh$  ou  $p_0 = \rho gh$ .  
Então,  $1,0 \times 10^5 = 1,0 \times 10^3 \times 10h$ , donde  $h = 10$  m.  
Ou seja, uma coluna de água com 10 m de altura exerce uma pressão igual à pressão atmosférica.



**Fig. 25** Evangelista Torricelli mediu pela primeira vez a pressão atmosférica.

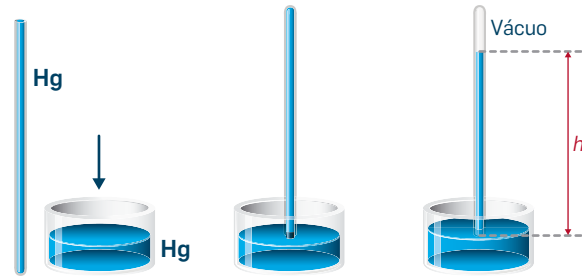
**Fig. 26** Experiência de Torricelli.

**Barômetro:** mede a pressão atmosférica.

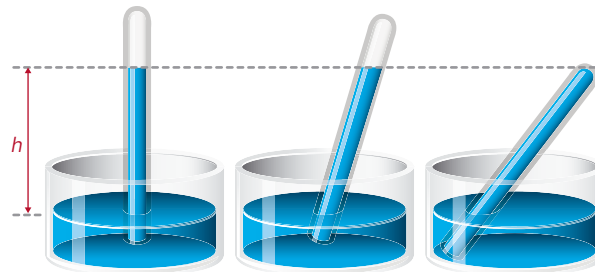
**E como se mede a pressão?**

Foi o italiano Evangelista Torricelli (**Fig. 25**) quem, no século XVII, reconheceu a existência de pressão atmosférica e a mediu, construindo o primeiro aparelho de medida de pressão atmosférica – o **barômetro**.

A **Fig. 26** ilustra o procedimento de Torricelli: encheu de mercúrio um tubo de vidro, de cerca de 1 m. Tapando a sua abertura, inverteu-o numa tina com mercúrio e destapou-o em seguida. Verificou que o mercúrio desceu no tubo mas não escorreu todo para a tina, permanecendo uma coluna de mercúrio, de altura  $h$ , com vácuo por cima. A altura de mercúrio era cerca de 76 cm.

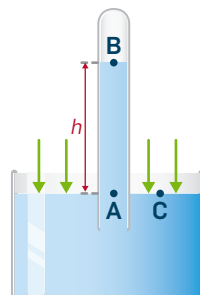


Se repetirmos a experiência e inclinarmos o tubo, verificaremos que se mantém inalterada a altura da coluna de mercúrio (**Fig. 27**). E os resultados serão semelhantes se o diâmetro do tubo for diferente.



**Fig. 27** Para qualquer inclinação do tubo, a altura de mercúrio mantém-se.

É a pressão atmosférica que impede que o tubo se esvazie até o fim. Há um equilíbrio das forças de pressão: as exercidas pela atmosfera, e que comprimem a superfície exposta do mercúrio, e as exercidas pelo mercúrio que ficou no tubo (**Fig. 28**). A Lei Fundamental da Hidrostática permite explicar a razão pela qual a altura de mercúrio dá a medida da pressão atmosférica:



**Fig. 28** A altura de mercúrio no tubo dá a medida da pressão atmosférica.

$$p_B = 0 \text{ (vácuo)}$$

Pela Lei Fundamental da Hidrostática:

$$p_A = p_C = p_0$$

$$p_A = p_B + \rho_{Hg}gh \Leftrightarrow p_A = \rho_{Hg}gh$$

ou

$$p_0 = \rho_{Hg}gh$$



Quando se indica a pressão atmosférica em milímetros ou centímetros de mercúrio (mmHg ou cmHg), está-se a identificar a altura de mercúrio num barómetro. Convencionou-se que a pressão atmosférica normal corresponde a uma altura de mercúrio de 760 mm, que é 1 atm. Esse valor na unidade SI é:

$$p_0 = \rho_{\text{Hg}} gh \Rightarrow p_0 = 13,6 \times 10^3 \times 9,8 \times 0,760 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

O uso de mercúrio na experiência deve-se à sua elevada massa volúmica, o que permite ter barómetros com tubos até 1 metro. Se fosse usada água, a altura de água no tubo que equilibraria a pressão atmosférica teria de ser 13,6 vezes maior, pois a sua massa volúmica é 13,6 vezes inferior à do mercúrio.

Há dois tipos de barómetros: os de mercúrio, baseados na experiência de Torricelli, e os metálicos que usam deformações provocadas pela pressão atmosférica numa cápsula metálica, as quais são transmitidas a um ponteiro que se desloca sobre uma escala graduada em aparelhos que registam a pressão (**Fig. 29**).

Quando medimos a pressão dos pneus, ou a tensão arterial, o que medimos é apenas a **pressão manométrica** do fluido, ou seja, o excesso de pressão do fluido relativamente à pressão atmosférica. Um aparelho como este chama-se **manómetro** de tubo aberto.

A **Fig. 30** mostra um exemplo e o seu fundamento: o fluido cuja pressão se quer medir comunica com um tubo em U, que contém mercúrio e tem a outra extremidade aberta para a atmosfera. Se a pressão do fluido exceder a pressão atmosférica, o mercúrio sobe na parte aberta do tubo. O desnível nos dois ramos do tubo,  $h$ , mede a pressão manométrica.

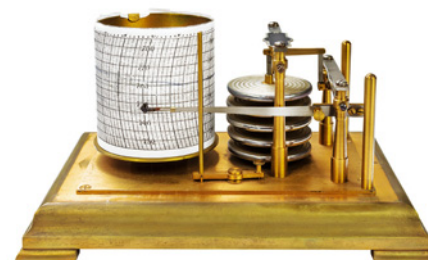
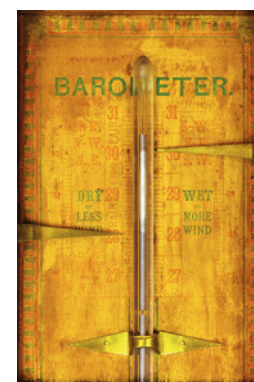
Pela Lei de Stevin

$$p_A = p_B$$

$$p_A = p_{\text{fluido}}$$

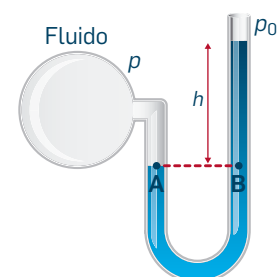
$$p_B = p_0 + \rho_{\text{Hg}} gh \quad \text{ou} \quad p_B - p_0 = \rho_{\text{Hg}} gh$$

$$\text{ou} \quad \Delta p = \rho_{\text{Hg}} gh$$



**Fig. 29** Barómetro de mercúrio e barómetro de metal que regista a pressão (barógrafo).

**Manómetro:** mede a pressão manométrica, ou seja, o excesso de pressão do fluido relativamente à pressão atmosférica.

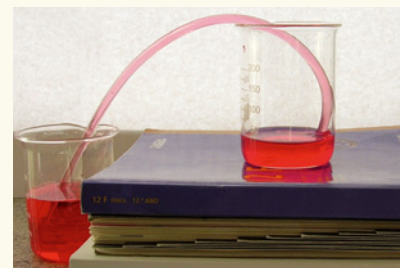


**Fig. 30** Manómetro de tubo aberto: mede a diferença entre a pressão do fluido e a pressão atmosférica através do desnível do mercúrio nos ramos do tubo.

## Atividade 2

A pressão atmosférica e as diferenças de pressão explicam alguns fenómenos do nosso quotidiano.

1. Coloque uma folha de papel liso sobre um copo totalmente cheio de água, de modo a não haver ar entre a água e o papel. Vire cuidadosamente a boca do copo para baixo. Interprete o que observa.
2. Um modo de tirar gasolina do depósito de um automóvel (para abastecer outro) é utilizar um tubo que funcione como sifão. Pesquise o que é um sifão e explique o seu modo de funcionamento. Construa um sifão em casa e ponha-o a funcionar tal como mostra a figura.





**Fig. 31** A pressão exercida no êmbolo da seringa é transmitida ao líquido.



**Fig. 32** A Lei de Pascal deve-se ao francês Blaise Pascal (séc. XVII).

## 1.3.4 Lei de Pascal

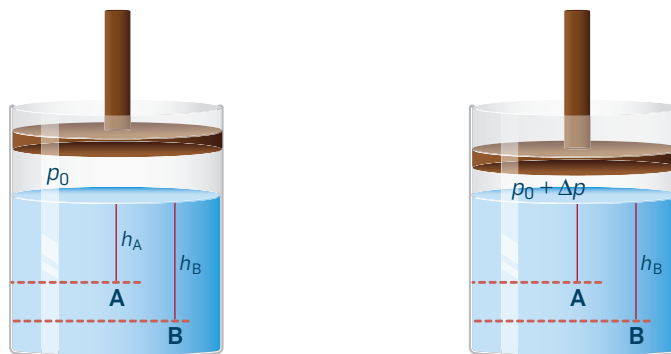
Quando se dá uma injeção, é preciso pressionar o êmbolo da seringa para que o líquido nela contido saia pela agulha (**Fig. 31**). Sobre o êmbolo exerce-se uma pressão que vai ser transmitida a todos os pontos do líquido, o que o obriga a sair pela agulha.

Este comportamento dos fluidos exemplifica a ideia do francês Blaise Pascal (**Fig. 32**), que, com base nas suas experiências e mesmo sem conhecer a Lei Fundamental da Hidrostática, formulou o que é hoje conhecido por **Lei de Pascal**.

### Lei de Pascal

Uma variação de pressão provocada num ponto de um fluido em repouso transmite-se a todos os pontos do fluido e às paredes que o contém.

A Lei de Pascal é uma consequência da Lei Fundamental da Hidrostática, como se mostra na **Fig. 33**:



Pressões nos pontos **A** e **B**:

$$p_A = p_0 + \rho g h_A$$

$$p_B = p_0 + \rho g h_B$$

Ocorreu uma variação de pressão  $\Delta p$  no cimo do recipiente. As novas pressões nos pontos **A** e **B** são:

$$p'_A = p_0 + \Delta p + \rho g h_A = p_A + \Delta p$$

$$p'_B = p_0 + \Delta p + \rho g h_B = p_B + \Delta p$$

**Fig. 33** A variação de pressão no êmbolo transmite-se a todos os pontos do fluido.

### Questão resolvida 6

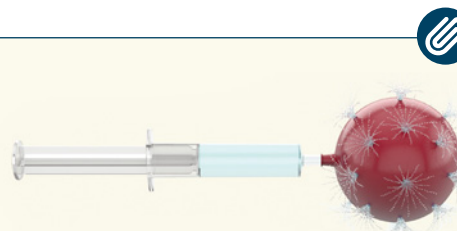
Uma piscina está quase cheia de água mas sem banhistas. O que prevê para a pressão no fundo da piscina quando vários banhistas se põem a boiar na piscina?

**?** A atmosfera exerce pressão sobre a superfície da água. A pressão no fundo da piscina, com água até a uma altura  $h$ , será  $p = p_0 + \rho g h$ . Se os banhistas boiarem, exercem uma pressão adicional sobre a água,  $\Delta p$ , que é transmitida a todos os pontos da água de acordo com a Lei de Pascal. No fundo da

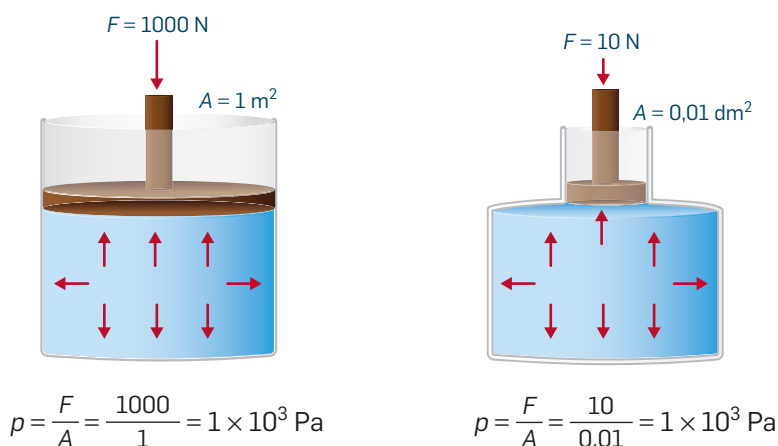
piscina, a pressão passa a ser  $p' = p_0 + \rho g h + \Delta p$ . Podemos chegar à mesma conclusão se pensarmos que o nível da água sobe quando os banhistas entram na piscina. Como a altura de água é maior, será também maior a pressão no fundo da piscina.

## Atividade 3

Arranje um balão, faça furos nele e tape-os com plasticina. Encha o balão com água. Adapte uma seringa à boca do balão e empurre o seu êmbolo. Interprete o que observa.



A Lei de Pascal tem aplicações que se baseiam no facto de se poder obter a mesma pressão exercendo forças diferentes num fluido. Para isso basta que as forças atuem em êmbolos de áreas diferentes, em contacto com o fluido, como se mostra nos exemplos da **Fig. 34**. A pressão exercida nos êmbolos é transmitida a todos os pontos do fluido.



**Fig. 34** A mesma pressão pode ser obtida com diferentes forças que atuam em êmbolos de áreas diferentes.

Uma das aplicações mais comuns da Lei de Pascal é a **prensa hidráulica**, que é um sistema de vasos comunicantes: dois recipientes cilíndricos, de diâmetros diferentes e que comunicam entre si, são preenchidos por um líquido viscoso (normalmente óleo) e tapados por êmbolos (**Fig. 35**).

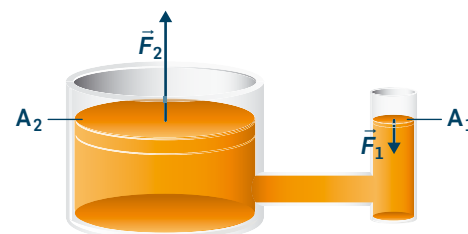
Se for aplicada uma força de intensidade  $F_1$  no êmbolo menor, de área  $A_1$ , de uma prensa hidráulica (**Fig. 35**), esta força será transmitida ao fluido, fazendo surgir neste o acréscimo de pressão de  $\Delta p = \frac{F_1}{A_1}$ .

Pela Lei de Pascal, esse acréscimo de pressão será transmitido a todos os pontos do fluido e das paredes, incluindo o êmbolo maior. Este ficará, por isso, sujeito a uma força adicional de intensidade  $F_2 = A_2 \Delta p$ , capaz de o pôr em movimento. Substituindo na expressão  $F_2 = A_2 \Delta p$  o valor de  $\Delta p$ , vem:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \text{ ou } \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

Como o quociente  $F/A$  é constante, as intensidades das forças exercidas em cada êmbolo serão diretamente proporcionais às respectivas áreas. Por exemplo, se a razão entre as áreas dos êmbolos for 100, a força exercida pelo fluido no êmbolo maior será 100 vezes maior do que a exercida no êmbolo menor.

**Prensa hidráulica:** atua como um «multiplicador de forças» porque as forças exercidas sobre cada êmbolo são diretamente proporcionais às respectivas áreas.

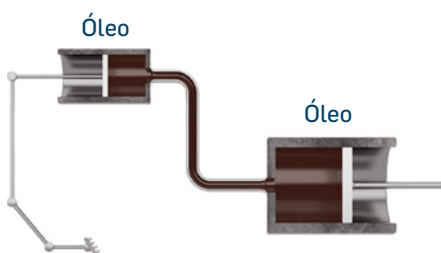


**Fig. 35** Esquema de prensa hidráulica:  $\vec{F}_1$  é a força exercida sobre o êmbolo menor, sendo igual à força que este exerce sobre o fluido;  $\vec{F}_2$  é a força exercida pelo fluido sobre o êmbolo maior.

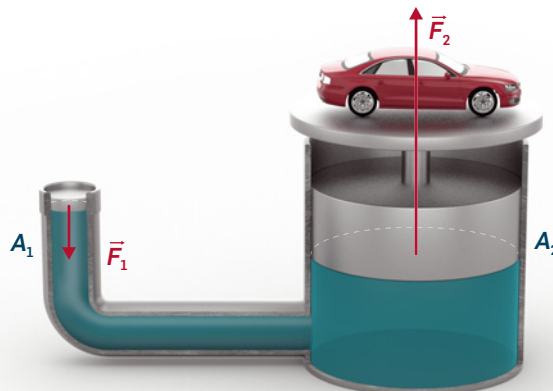
A prensa hidráulica atua, pois, como «multiplicador de forças».

Os elevadores hidráulicos de automóveis das oficinas têm uma prensa hidráulica: exerce-se uma pequena força no êmbolo menor e o fluido exerce uma força muito superior no êmbolo maior, capaz de o pôr em movimento (**Fig. 36**).

**Fig. 36** Elevador hidráulico de automóveis e respetivo esquema.



**Fig. 37** Esquema de um sistema de travões.



Este sistema também se usa nos travões e embraiações de muitos veículos. No caso de um automóvel, a força exercida no pedal é «amplificada» devido a um circuito hidráulico num tubo de secção com área variável (**Fig. 37**).

### Questão resolvida 7



Um elevador hidráulico de uma oficina é acionado por um cilindro de 30 cm de diâmetro. O elevador funciona por aplicação de uma força num outro cilindro de 10 cm de diâmetro. Um automóvel de 1,0 t é elevado a velocidade constante. Despreze o peso dos êmbolos.

- Qual é a intensidade da força exercida no êmbolo menor capaz de elevar o automóvel?
- Mostre que os deslocamentos dos êmbolos são inversamente proporcionais às respetivas áreas.
- Determine a energia necessária para elevar o automóvel 10 cm, e verifique que a «economia de força» não se traduz em «economia de energia», pois são iguais os trabalhos das forças exercidas nos êmbolos.

- a)** A intensidade da força exercida pelo fluido no êmbolo maior é igual ao peso do automóvel (a resultante das forças sobre o êmbolo é nula porque este se move com velocidade constante):  $F_2 = P = 1000 \times 10 = 1,0 \times 10^4$  N.

$$\text{Aplicando a expressão } \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1}, \text{ obtém-se } \frac{1,0 \times 10^4}{\pi \times \left(\frac{0,30}{2}\right)^2} = \frac{F_1}{\pi \times \left(\frac{0,10}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{1,0 \times 10^4}{0,30^2} = \frac{F_1}{0,10^2} \Leftrightarrow F_1 = 1,1 \times 10^3 \text{ N}$$

- b)** Como o líquido é incompressível e o volume de fluido deslocado junto de cada êmbolo é o mesmo, vem  $V_1 = V_2$ , com

$V = Ad$  ( $A$  é a área e  $d$  o deslocamento de cada êmbolo); então,  $A_1 d_1 = A_2 d_2$ , relação que traduz a proporcionalidade inversa.

- c)** A energia é dada pelo trabalho da força que o fluido exerce no êmbolo maior,  $\vec{F}_2$ , e que eleva o automóvel:

$$W_{\vec{F}_2} = 1,0 \times 10^4 \times 0,10 \times \cos 0^\circ = 1,0 \times 10^3 \text{ J}$$

O deslocamento do êmbolo menor é:

$$A_1 d_1 = A_2 d_2 \Rightarrow \pi 0,05^2 d_1 = \pi 0,15^2 \times 0,10 \Rightarrow d_1 = 0,90 \text{ m}$$

O trabalho da força sobre o êmbolo menor é

$$W_{\vec{F}_1} = 1,1 \times 10^3 \times 0,90 \times \cos 0^\circ = 1,0 \times 10^3 \text{ J}$$

Logo,  $W_{\vec{F}_1} = W_{\vec{F}_2}$

## 1.3.5 Impulsão e Lei de Arquimedes; equilíbrio de corpos flutuantes

Conta a lenda que Arquimedes descobriu a lei que ficou com o seu nome quando, no banho, sentiu que o seu peso parecia menor (Fig. 38). De facto, o peso é o mesmo, mas quando um corpo se encontra imerso num líquido fica sujeito a outra força vertical, dirigida de baixo para cima: a **impulsão** (símbolo  $\vec{I}$ ). É esta força que explica, por exemplo, a flutuação dos corpos (Fig. 39).

Qual é a origem desta força?

A impulsão é a resultante das forças de pressão exercidas pelo fluido sobre um corpo nele imerso, parcial ou totalmente (Fig. 40). Só haverá impulsão se a superfície inferior do corpo for banhada pelo fluido, pois só assim existirá uma resultante vertical a apontar para cima.

A intensidade da impulsão depende do volume de fluido que é deslocado pelo corpo, que é igual ao volume imerso do corpo,  $V_i$  (Fig. 40).

A intensidade da impulsão é igual à intensidade do peso de fluido deslocado pelo corpo. Como a intensidade do peso de um corpo homogéneo de massa volúmica  $\rho_c$  e volume  $V_c$  é dada por

$$P = mg = \rho_c V_c g$$

o peso do fluido deslocado terá uma expressão semelhante. Se  $\rho_f$  for a massa volúmica do fluido e  $V_i$  o volume imerso do corpo (igual ao volume de fluido por ele deslocado), a intensidade da impulsão será

$$I = \rho_f V_i g$$

Podemos, então, caracterizar a impulsão e enunciar a Lei de Arquimedes:

**Impulsão,  $\vec{I}$ : resultante das forças de pressão que um fluido exerce sobre um corpo nele imerso**

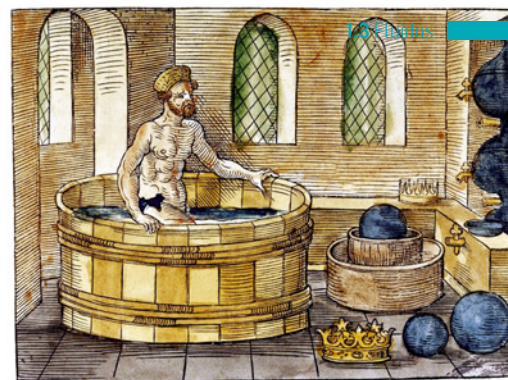
**Lei de Arquimedes**

Qualquer corpo total ou parcialmente imerso num fluido sofre por parte deste uma força vertical, dirigida de baixo para cima, de intensidade igual à do peso do fluido deslocado pelo corpo:

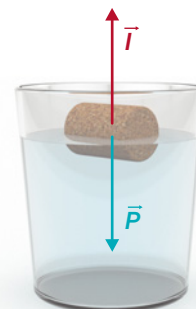
$$I = \rho_f V_i g \quad \begin{matrix} \text{N} \\ \text{kg m}^{-3} \quad \text{m}^{-3} \end{matrix} \quad \text{m s}^{-2}$$

$\rho_f$ : massa volúmica do fluido     $V_i$ : volume imerso do corpo

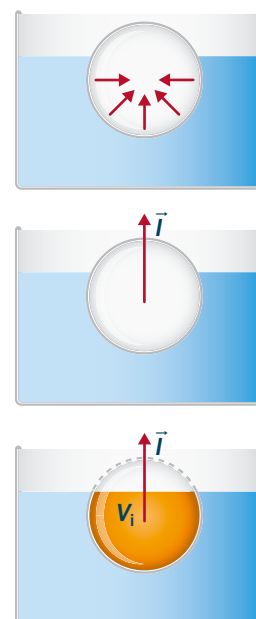
Quanto maior for a massa volúmica do fluido e o volume imerso do corpo, maior será a impulsão.



**Fig. 38** Segundo a lenda, Arquimedes (séc. III a.C.) chegou à lei com o seu nome durante o banho.



**Fig. 39** Um corpo pode flutuar devido à impulsão exercida pelo fluido.



**Fig. 40** A impulsão,  $\vec{I}$ , é a resultante das forças de pressão sobre o corpo e depende do volume imerso do corpo.



A intensidade da impulsão pode ser determinada com uma experiência simples (Fig. 41). Enche-se um recipiente, que tem uma saída lateral, com água até ao nível dessa saída; introduz-se um corpo no seu interior e recolhe-se a água que sai do recipiente. Com uma balança, mede-se a massa dessa água e calcula-se a intensidade do seu peso, que é igual à intensidade da impulsão.



Fig. 41 Procedimento experimental para medir a intensidade da impulsão.



Fig. 42 Navio e casas flutuantes: o peso é equilibrado pela impulsão.

Numa situação de equilíbrio, como a flutuação dos corpos (Fig. 42), o peso equilibra a impulsão, verificando-se a condição:  $\vec{P} + \vec{I} = \vec{0} \Rightarrow P = I$ .

Mesmo corpos com elevado peso, como um icebergue ou um grande navio, podem flutuar, bastando que o volume imerso proporcione a impulsão necessária para equilibrar o peso. Os icebergues têm 90% do seu volume debaixo de água. A forma do corpo é importante: para aumentar o volume imerso à medida que a carga aumenta, os navios mercantes têm um casco com forma de cunha.

O que ocorre quando um corpo é largado na superfície livre de um líquido? Pode afundar, manter-se em equilíbrio dentro do líquido ou subir até ficar a flutuar à sua superfície, dependendo da relação entre as intensidades do peso e da impulsão, a qual está relacionada com as massas volúmicas do fluido e do corpo, como se mostra na Fig. 43.

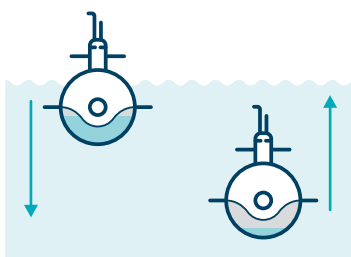
<p><b>O corpo afunda</b></p> $P > I \Leftrightarrow \rho_c V_c g > \rho_f V_i g$ <p>Como <math>V_c = V_i</math>, vem: <math>\rho_c &gt; \rho_f</math></p>		<p><b>O corpo flutua totalmente imerso</b></p> $P = I \Leftrightarrow \rho_c V_c g = \rho_f V_i g$ <p>Como <math>V_c = V_i</math>, vem: <math>\rho_c = \rho_f</math></p>	
<p><b>O corpo sobe no líquido acabando por flutuar à sua superfície</b></p> <p>Inicialmente, a impulsão tem uma intensidade superior à do peso e o corpo sobe no líquido:</p> $P < I \Leftrightarrow \rho_c V_c g < \rho_f V_i g$ <p>Como <math>V_c = V_i</math>, vem: <math>\rho_c &lt; \rho_f</math></p>		<p>O corpo sobe até à superfície e emerge parte dele até se verificar a condição de flutuação: <math>P = I</math>.</p>	

Fig. 43 Comportamento de corpos quando largados à superfície de um líquido e relação entre as massas volúmicas do corpo e do líquido.

As conclusões anteriores podem aplicar-se em situações diversas. Por exemplo, para saber se um ovo está fresco basta pô-lo em água: se ele se afundar significa que a sua massa volúmica média é maior do que a da água, pois está bem cheio, ou seja, é fresco; um ovo estragado flutua na água (Fig. 44).

Os corpos podem flutuar num só líquido ou simultaneamente em dois (Fig. 45), desde que a impulsão (ou soma das impulsões) equilibrem o seu peso.

Os crocodilos abocanham pedras para se afundarem na água e deitam-nas fora para virem à superfície da água, alterando assim o seu peso. Os submarinos funcionam de modo semelhante: têm depósitos onde se faz entrar água, ou de onde se retira água, com o auxílio de bombas (Fig. 46). Quando entra água no submarino a intensidade do seu peso fica superior à da impulsão e o submarino submerge. Quando se remove a água, ocorre o contrário e o submarino emerge até que a impulsão equilibre o peso.



Note-se que um barco pode não flutuar mesmo que o peso e a impulsão se anulem. O peso está aplicado no centro de massa do corpo, mas a impulsão está aplicada no centro de massa da porção do líquido deslocado. E esses pontos, geralmente, não coincidem. O barco permanece estável quando os dois pontos estão na mesma vertical e o centro de massa está abaixo do ponto de aplicação da impulsão, equilibrando-se o peso e a impulsão (Fig. 47).

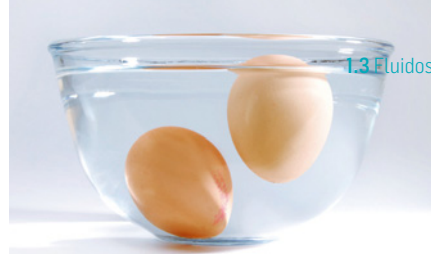


Fig. 44 Só os ovos frescos afundam na água.



Fig. 45 Corpos a flutuar em líquidos imiscíveis: o corpo vermelho sofre impulsão por parte de dois líquidos.

Fig. 46 Os submarinos alteram o seu peso para se moverem verticalmente.

Fig. 47 A igualdade das intensidades do peso e da impulsão não garante o equilíbrio de um barco.

### Questão resolvida 8

Mostre que os icebergs são um perigo para a navegação a partir da determinação da sua fração do volume imerso. A massa volúmica da água salgada é  $1,024 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  e a do gelo é  $0,92 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ .

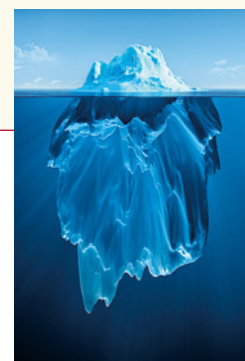


Se o icebergue está a flutuar, a resultante das forças é nula:  $\vec{P} + \vec{I} = \vec{0} \Rightarrow P = I$ .

Como  $P = \rho_c V_c g$  e  $I = \rho_f V_f g$ , então,  $\rho_c V_c g = \rho_f V_f g$  ou  $\rho_c V_c = \rho_f V_f$ . A fração de volume imerso é

$$\frac{V_f}{V_c} = \frac{\rho_c}{\rho_f} = \frac{0,92 \times 10^3}{1,024 \times 10^3} = 0,90 = 90\%$$

Ou seja, 90% do seu volume está escondido debaixo de água!





**Fig. 48** A atmosfera oferece uma força de resistência ao movimento de um corpo.

**Força de resistência** exercida num corpo em movimento num fluido: opõe-se à velocidade do corpo e depende desta.

## 1.3.6 Movimento de corpos em fluidos; viscosidade

Já estudámos movimentos de corpos em fluidos, como a queda de corpos, geralmente desprezando a força de resistência do ar. Mas um corpo que se move dentro de um fluido pode sofrer por parte deste uma força de resistência apreciável em percursos grandes (**Fig. 48**). No 11.º ano analisámos o movimento de um paraquedista, com e sem paraquedas, e vimos que sem essa força seria impossível a prática de paraquedismo.

Quando um corpo se move num fluido fica sujeito a uma **força de resistência** que depende da velocidade do corpo. Se o corpo for pequeno e se mover com velocidade baixa através de um fluido, a força de resistência que o fluido exerce sobre ele opor-se-á à direção da velocidade, sendo a sua intensidade diretamente proporcional ao módulo da velocidade:

$$\vec{F}_{\text{resist}} = -k\vec{v} \Rightarrow F_{\text{resist}} = kv \quad (\text{velocidades baixas})$$

A constante  $k$  depende de características do corpo, como a forma e dimensões, e do fluido, como a viscosidade. O óleo dos automóveis (**Fig. 49**), por exemplo, é mais viscoso do que a água. Um fluido muito viscoso oferece uma maior força de resistência ao movimento de um corpo do que outro menos viscoso, para a mesma velocidade.

Foi o britânico George Stokes quem primeiro estudou as forças de resistência ao movimento em fluidos para pequenas velocidades, no século XIX. Concluiu que, para uma pequena esfera que se move num fluido, a intensidade da força de resistência depende do raio da esfera,  $r$ , do módulo da velocidade,  $v$ , e do chamado coeficiente de viscosidade do fluido,  $\eta$ :

$$F_{\text{resist}} = 6\pi r\eta v$$

A expressão anterior é conhecida por **Lei de Stokes**. A **Tab. 3** indica os coeficientes de viscosidades de alguns fluidos, cuja unidade é o pascal segundo (Pa s).

Substância	Temperatura / °C	Coefficiente de viscosidade / Pa s
Água	10	$1,31 \times 10^{-3}$
Água	20	$1,00 \times 10^{-3}$
Água	100	$0,28 \times 10^{-3}$
Sangue	37	$3 \times 10^{-3}$ a $4 \times 10^{-3}$
Plasma	37	$1,5 \times 10^{-3}$
Ar	20	$0,018 \times 10^{-3}$
Óleo lubrificante	30	$80 \times 10^{-3}$ a $200 \times 10^{-3}$
Glicerina	20	1,41
Glicerina	25	0,934
Glicerina	30	0,612

**Tab. 3** Coeficiente de viscosidade de alguns fluidos.



**Fig. 49** O óleo dos automóveis é um fluido mais viscoso do que a água.

Quando uma pequena esfera cai num fluido viscoso sobre ela atuam o peso,  $\vec{P}$ , a impulsão,  $\vec{I}$  (cuja intensidade é inferior à do peso, uma vez que o corpo cai), e a força de resistência exercida pelo fluido,  $\vec{F}_{\text{res}}$  (Fig. 50).

À medida que a esfera cai vai adquirindo maior velocidade e aumenta a intensidade da força de resistência, por ser diretamente proporcional à velocidade. Por isso, a resultante das três forças passa, a certa altura, a ser nula:

$$\vec{P} + \vec{I} = \vec{F}_{\text{res}} = \vec{0} \Rightarrow P = I + F_{\text{res}}$$

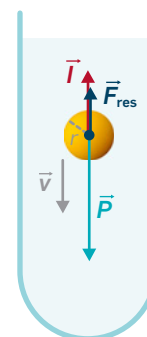
O movimento passa a ser uniforme e a **velocidade** diz-se **terminal**.

No caso de corpos de maiores dimensões ou que se movam no ar com velocidades elevadas, como gotas de chuva, um paraquedista ou um automóvel (Fig. 51), a intensidade da **força de resistência** é proporcional ao quadrado da velocidade:

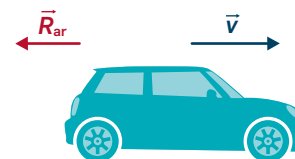
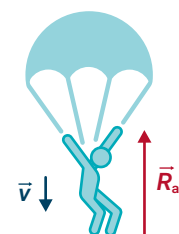
$$F_{\text{res}} = k'v^2 \quad (\text{velocidades elevadas})$$

A constante  $k'$  depende de características do corpo e do fluido.

As gotas de chuva que caem de nuvens a vários quilómetros de altura estão sujeitas à resistência do ar. Se não fosse essa força atingiriam a superfície terrestre com velocidades enormes e causariam graves danos. Mas a velocidade terminal das gotas de chuva é relativamente pequena: para uma gota de 1 mm de diâmetro o módulo da velocidade terminal é cerca de  $4,3 \text{ m s}^{-1}$ .



**Fig. 50** Forças sobre uma esfera em queda num fluido viscoso.



**Fig. 51** A resistência do ar é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade dos corpos quando estes se movem com velocidades elevadas.

### Questão resolvida 9



A força de resistência sobre um paraquedista varia com o quadrado da velocidade, de acordo com  $F_{\text{res}} = k'v^2$ .

Calcule o valor da constante de proporcionalidade, sabendo que a primeira velocidade terminal de um paraquedista de 70 kg é  $180 \text{ km h}^{-1}$ .



Podemos desprezar o efeito da impulsão do ar que é muito menor do que o peso do paraquedista.

Quando se atinge a velocidade terminal tem-se

$$\vec{P} + \vec{F}_{\text{resist}} = \vec{0}, \text{ ou seja, } mg = k'v_{\text{term}}^2$$

Como  $180 \text{ km h}^{-1} = 50 \text{ m s}^{-1}$  vem

$$k' = \frac{mg}{v_{\text{term}}^2} = \frac{70 \times 10}{50^2} = 0,28 \text{ kg m}^{-1}$$

**+** QUESTÕES p. 132

**AL 1.4** p. 127

A Atividade Laboratorial 1.4, «Coeficiente de viscosidade de um líquido», permitirá determinar o coeficiente de viscosidade de um fluido.





## RESUMO

- **Massa volúmica de um material:**  $\rho = \frac{m}{V}$ ; unidade SI:  $\text{kg m}^{-3}$ .
- **Densidade relativa de um material,  $d$ :** compara a massa volúmica do material com a de um material padrão, ou seja,  $d = \frac{\rho}{\rho_{\text{padrão}}}$ ; não tem unidades.
- **Pressão,  $p$ :** intensidade da componente perpendicular da força exercida numa superfície por unidade de área, ou seja,  $p = \frac{F_{\perp}}{A}$ ; unidade SI: Pa.
- **Forças de pressão:**  $F = pA$ ; num fluido em repouso (equilíbrio hidrostático), essas forças exercem-se perpendicularmente nas superfícies.
- **Lei Fundamental da Hidrostática (Lei de Stevin):** num líquido incompressível e em repouso, a diferença de pressão entre dois pontos no seu interior é a exercida pela coluna de líquido de altura igual ao desnível vertical dos dois pontos, sendo dada por  $\Delta p = \rho gh$ ; essa diferença de pressão é independente da forma do recipiente; pontos do líquido ao mesmo nível têm pressões iguais; a pressão aumenta com a profundidade do líquido.
- **Pressão absoluta:**  $p = p_0 + \rho gh$ , sendo  $p_0$  a pressão atmosférica e  $\rho gh$  a pressão devida exclusivamente ao fluido, chamada pressão manométrica. Esta pressão diz-se manométrica porque é medida por manómetros.
- **Barómetro:** mede a pressão atmosférica; um barómetro de mercúrio baseia-se na experiência de Torricelli, aplicando-se a Lei Fundamental da Hidrostática.
- **Vasos comunicantes:** recipientes que contêm um líquido e que comunicam entre si; o líquido fica ao mesmo nível em todos eles qualquer que seja a sua forma, de acordo com a Lei Fundamental da Hidrostática.
- **Lei de Pascal:** uma variação de pressão provocada num ponto de um fluido em repouso transmite-se a todos os pontos do fluido e às paredes do recipiente que o contém.
- **Prensa hidráulica:** sistema de vasos comunicantes; atua como um «multiplicador de forças»: as forças exercidas sobre cada êmbolo são diretamente proporcionais às respetivas áreas, ou seja,  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$ .
- **Impulsão,  $\vec{I}$ :** resultante das forças de pressão que um fluido exerce sobre um corpo nele imerso; a sua intensidade depende da massa volúmica do fluido,  $\rho_f$ , e do volume imerso do corpo,  $V_i$ , sendo dada por  $I = \rho_f V_i g$ .
- **Força de resistência exercida num corpo em movimento num fluido:** opõe-se à velocidade do corpo e depende desta. No caso de uma esfera depende do raio da esfera,  $r$ , da sua velocidade,  $v$ , e da viscosidade do fluido,  $\eta$ , sendo a sua intensidade dada por  $F_{\text{resist}} = 6\pi r\eta v$  (Lei de Stokes).





## ATIVIDADE LABORATORIAL 1.4

### Coeficiente de viscosidade de um líquido

A viscosidade de um líquido torna-o mais ou menos apropriado para certos fins.

Como determinar a viscosidade de um líquido deixando cair esferas nesse líquido? Que relação há entre a velocidade terminal dessas esferas e a viscosidade do líquido?



#### Questões pré-laboratoriais

- Uma esfera de metal (como as esferas de rolamento) cai num líquido viscoso, contido numa proveta grande, após ter sido largada à sua superfície (Fig. 52).
  - Que forças atuam sobre a esfera?
  - Como variam essas forças quando a velocidade da esfera aumenta?
  - Preveja o tipo de movimento da esfera desde que é largada até atingir o fundo da proveta, indicando como variam qualitativamente os módulos da resultante das forças e da aceleração.
- Num líquido viscoso, a esfera pode acabar por atingir a velocidade terminal no seu movimento de queda.
  - Por que razão a esfera atinge a velocidade terminal?
  - Mostre que a expressão da velocidade terminal de uma esfera de raio  $r$  é  $v = \frac{2(\rho_m - \rho_f)g}{9\eta} r^2$ , sendo  $\rho_m$  e  $\rho_f$  as massas volúmicas do metal e do fluido,



**Fig. 52** Uma esfera de rolamento cai num líquido viscoso.

respetivamente, e  $\eta$  o coeficiente de viscosidade do líquido. Admita que a intensidade da força de resistência do fluido é dada pela Lei de Stokes:  $F_{\text{res}} = 6\pi r\eta v$ .

- Como poderá determinar experimentalmente as massas volúmicas do metal e do fluido?
- Após a esfera atingir a velocidade terminal, como poderá medi-la?
- Pretende determinar-se experimentalmente o coeficiente de viscosidade de um líquido, com base na expressão da velocidade terminal de esferas que se largam nesse líquido. Possuem-se conjuntos de três esferas, com seis diâmetros diferentes, que sucessivamente se vão largar. Construa uma tabela que lhe permita registar e tratar os dados.
- Por que razão se deve medir a temperatura do líquido a que se realiza a experiência?
- Nos automóveis, nas regiões frias, usa-se um óleo menos viscoso no inverno e um óleo mais viscoso no verão. Formule uma hipótese que permita fundamentar esta prática.





## ATIVIDADE LABORATORIAL 1.4 (cont.)

### Trabalho laboratorial



Nesta atividade determina-se, por análise gráfica, o coeficiente de viscosidade de um fluido viscoso, largando-se esferas de diferentes raios nesse fluido e calculando-se as respectivas velocidades terminais.

**Material:** proveta de 2 l (ou recipiente com mais de 45 cm de altura e mais de 6 cm de diâmetro, que possa conter, no mínimo, 1 l de um líquido muito viscoso, como glicerina ou detergente de loiça); esferas de rolamentos, do mesmo aço, com pelo menos seis diâmetros diferentes (os mais pequenos que existirem, por exemplo, de 1,0 mm a 6,0 mm de diâmetro); cronómetro digital; fita adesiva; provetas pequenas (25 ml ou 50 ml); balança; régua ou fita métrica; craveira; termómetro; íman (para puxar as esferas do fundo da proveta no final da experiência); pinça (Fig. 53).



**Fig. 53** Material para a determinação do coeficiente de viscosidade de um líquido.

- 1.** Faça as medições necessárias para determinar as massas volúmicas das esferas e do líquido.
- 2.** Largue a esfera maior no líquido (o mais perto possível do eixo da proveta, evitando que toque nas paredes) e, quando lhe parecer que o movimento é uniforme, assinala com fita adesiva essa posição na proveta. Faça outra marca próxima do fundo da proveta. Para que servirão estas marcas?
- 3.** Meça os diâmetros das esferas com uma craveira. Faça as medições necessárias para calcular a velocidade terminal de cada esfera: meça três vezes o tempo (use três esferas iguais) para minimizar a incerteza experimental. Repita o procedimento para todas as esferas. Registe os valores na tabela.
- 4.** Meça a temperatura do líquido.

### Questões pós-laboratoriais



- 1.** Complete a tabela com os dados registados e com os valores da velocidade terminal de cada esfera.
- 2.** Que conjunto de esferas atingiu mais rapidamente a velocidade terminal? Porquê?
- 3.** Justifique a escolha da posição das marcas na proveta para determinar a velocidade terminal.
- 4.** Construa um gráfico que relacione a velocidade terminal com o raio das esferas, de modo a ter uma relação linear, e obtenha a reta de regressão.
  - a)** O que representa o declive dessa reta? Obtenha, a partir dele, o coeficiente de viscosidade do líquido.
  - b)** Compare o resultado obtido com os dos outros grupos, assim como a precisão das medições.
- 5.** A temperatura do líquido influencia o valor da velocidade terminal de uma determinada esfera. Preveja, justificando, como deverá variar a velocidade terminal das esferas com o aumento da temperatura.
- 6.** Se as esferas tivessem sido deixadas cair na água, a sua velocidade terminal seria maior. Porquê?
- 7.** Considere que a outra temperatura a viscosidade diminui para metade, mantendo-se a sua densidade. Determine o aumento percentual da velocidade terminal de uma esfera nesse líquido a essa temperatura, comparada com a velocidade terminal nas condições da experiência.



## QUESTÕES

### Nota

Na resolução das questões, considere os seguintes valores:

$$\rho_{\text{água}} = 1,0 \text{ g cm}^{-3}$$

$$\rho_{\text{mercúrio}} = 13,6 \text{ g cm}^{-3}$$

$$1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$$

### 1.3.1 Fluidos, massa volúmica, densidade relativa e pressão

1. A maior parte do corpo humano é água, embora a sua percentagem varie com a idade. Portanto, é uma boa aproximação supor que a massa volúmica do nosso corpo é semelhante à da água. Considere uma pessoa de 70 kg.

a) Que volume, em litros, ocupa a pessoa?

b) O sangue, de densidade  $1060 \text{ kg m}^{-3}$ , corresponde a cerca de 7% da massa de um ser humano. O volume de sangue daquela pessoa é, em  $\text{dm}^3$ , cerca de:

(A)  $\frac{1,060}{0,07 \times 70}$

(C)  $\frac{0,07 \times 1,060}{70}$

(B)  $\frac{0,07 \times 70}{1,060}$

(D)  $\frac{70}{0,07 \times 1,060}$

2. A massa volúmica do ferro é  $7,9 \text{ g cm}^{-3}$ .

a) A densidade do ferro, em  $\text{kg m}^{-3}$ , é:

(A)  $7,9 \times 10^3$

(C)  $7,9 \times 10^9$

(B)  $7,9 \times 10^{-3}$

(D)  $7,9 \times 10^{-9}$

b) Qual é a densidade relativa do ferro e o que significa esse valor?

c) A massa de um cubo oco de ferro, com 4,0 cm de aresta, é 0,20 kg. Qual é o volume da parte oca do cubo?

3. Um quarto num segundo andar tem dimensões 4,0 m por 4,5 m e altura 3,0 m. O ar do quarto está à pressão atmosférica normal, 1 atm, e a  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ . Nessas condições, a densidade do ar é  $1,18 \text{ kg m}^{-3}$ .

a) Qual é a massa de ar dentro do quarto? Explícite as aproximações realizadas.

b) Um elefante adulto tem uma massa de 4,0 a 6,0 t. Determine a área do chão do quarto em que o ar exerce uma força igual ao peso de um elefante de 5,0 t.

c) Qual é a força exercida pelo ar no chão do quarto? Quantos elefantes, de 5,0 t, teriam um peso equivalente a essa força?

d) Se aquele número de elefantes pudesse entrar no quarto, o chão colapsaria. Explique por que razão o chão do quarto não colapsa apenas devido à força de pressão.

e) Imagine o mesmo quarto completamente cheio de água. Que pressão seria exercida sobre o chão apenas devido ao peso da água?

### 1.3.2 Forças de pressão em fluidos

4. A força de pressão que um fluido em repouso exerce em qualquer superfície de área  $A$  é:

(A) perpendicular a essa superfície.

(B) paralela a essa superfície.

(C) independente da área  $A$ .

(D) inversamente proporcional à área  $A$ .

5. De um recipiente aquecido, deixou-se sair algum vapor. Após arrefecer, para retirar a tampa lateral, de área  $200 \text{ cm}^2$ , é necessário exercer uma força de 80 N. Considere a pressão atmosférica normal, 1 atm. Qual é a pressão do ar, em Pa, no interior da caixa?

### 1.3.3 Lei Fundamental da Hidrostática

6. A densidade de um líquido pode considerar-se constante. Classifique, justificando, as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas.

A. A pressão num ponto de um líquido ideal em equilíbrio cresce linearmente com a profundidade mas não varia ao longo de um plano horizontal.

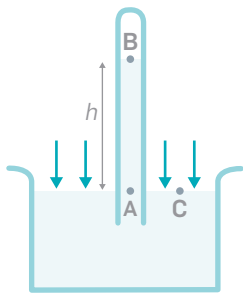
B. As forças exercidas pela parede do recipiente num líquido ideal em equilíbrio nele contido são paralelas à própria parede.

C. A diferença de pressão entre dois pontos de um líquido ideal em equilíbrio é diretamente proporcional ao desnível entre eles.

D. A pressão num ponto de um líquido ideal em equilíbrio depende apenas da profundidade.

7. Se a densidade do líquido referido na questão anterior aumentasse com a profundidade, as afirmações dessa questão teriam o mesmo valor lógico? Justifique.

8. A experiência de Torricelli permitiu, pela primeira vez, reconhecer a pressão atmosférica. Torricelli encheu com mercúrio um tubo de vidro, de cerca de 1 m (ver figura); tapou a abertura, invertiu-o numa tina com mercúrio e destapou novamente a abertura; o mercúrio desceu no tubo mas não escoou todo para a tina, permanecendo uma coluna de mercúrio de altura  $h$ , com vapor de mercúrio por cima, a uma pressão quase nula.



a) A altura  $h$  não depende de:

- (A) densidade do mercúrio.
- (B) aceleração da gravidade.
- (C) área de secção reta do tubo.
- (D) pressão atmosférica.

b) A pressão em **A** é:

- (A) maior do que a pressão em **C**.
- (B) menor do que a pressão atmosférica.
- (C) maior do que a pressão em **B**.
- (D) nula.

c) Convencionou-se designar por pressão atmosférica normal a que corresponde a  $h = 76,0$  cm, num local onde o módulo da aceleração gravítica seja  $9,81$  m s<sup>-2</sup>. Determine, em Pa, a pressão atmosférica normal.

9. Numa transfusão de sangue, insere-se uma agulha numa veia onde a pressão é superior em 2,00 kPa à pressão atmosférica. Considere a densidade do sangue  $1,06$  g cm<sup>-3</sup> e o módulo da aceleração gravítica  $9,8$  m s<sup>-2</sup>.

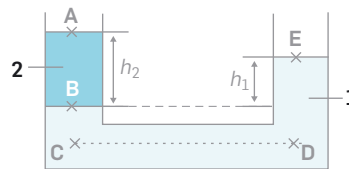
- a) Qual é a altura mínima, em cm, acima da veia, onde se deve colocar o nível máximo do sangue na bolsa?
- b) Determine a pressão na veia em mmHg (1 mmHg é a pressão exercida por uma coluna de mercúrio de 1 mm de altura).

10. Um mergulhador faz imersões no oceano. Suponha que a densidade da água é constante e igual a  $1,0$  g cm<sup>-3</sup>.

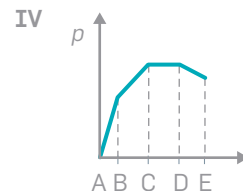
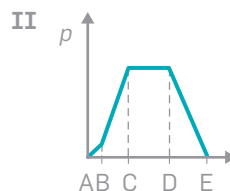
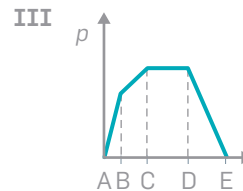
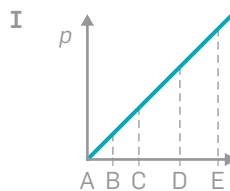
- a) A que profundidade terá de mergulhar para que o aumento de pressão seja igual à pressão atmosférica normal, 1 atm?
- b) Respirando por um tubo, cuja extremidade superior está à superfície do oceano, não pode mergulhar a mais do que 6,0 m, pois os pulmões não aguentam a diferença de pressão. Explique essa diferença e determine-a.

11. Uma zona de moradias pode ser alimentada pela água de um reservatório cujo nível superior está a 70 m de altura. Os canos só suportam pressões de 4,0 atm e um barómetro marca 75,0 cmHg. Poderá fazer-se a ligação?

12. A figura mostra líquidos não miscíveis em equilíbrio em vasos comunicantes.

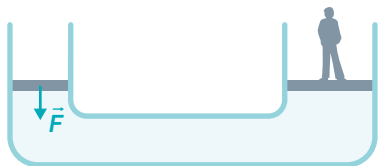


- a) Os líquidos **1** e **2** têm massas volúmicas  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , respetivamente, sendo  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1,8$ . Determine  $\frac{h_1}{h_2}$ .
- b) Qual dos gráficos traduz a pressão exercida apenas pelo líquido com a profundidade, quando se percorrem sucessivamente os pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E** da figura anterior?



### 1.3.4 Lei de Pascal

13. Os êmbolos de uma prensa hidráulica, de peso desprezável, têm áreas de  $4,0 \text{ cm}^2$  e  $120,0 \text{ cm}^2$ . Aplica-se uma força  $\vec{F}$  de módulo  $40 \text{ N}$  no êmbolo menor, ficando um homem em equilíbrio sobre o outro êmbolo.



- Relacione as variações de pressão nos êmbolos como resultado da aplicação da força  $\vec{F}$ .
- Determine a massa do homem.
- Se o líquido da prensa fosse mais denso, a intensidade da força  $\vec{F}$  para manter o homem em equilíbrio seria maior, igual ou menor do que  $40 \text{ N}$ ? Fundamente a resposta.

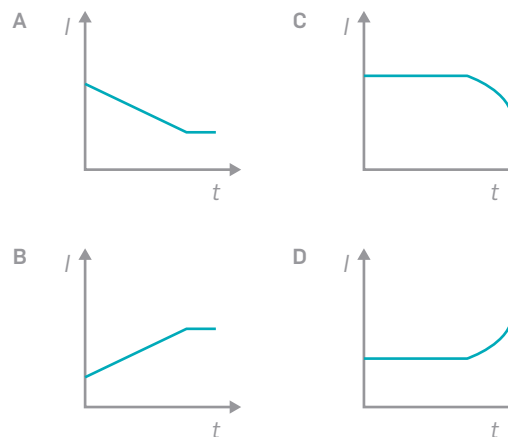
### 1.3.5 Impulsão e Lei de Arquimedes; equilíbrio de corpos flutuantes

14. Uma gota de óleo de  $0,365 \text{ g}$  e volume  $0,400 \text{ cm}^3$  está imóvel no interior de um líquido **X**, com o qual não se mistura.

- O módulo da impulsão exercida sobre a gota de óleo é:
  - maior do que o peso da gota de óleo.
  - igual ao peso de  $0,400 \text{ cm}^3$  de água.
  - igual ao peso de  $0,400 \text{ cm}^3$  do líquido **X**.
  - maior do que o peso de  $0,400 \text{ cm}^3$  de óleo.
- Qual é a massa volúmica do líquido **X**?
- Uma pequena esfera de aço, com o mesmo volume da gota de óleo, é introduzida no líquido **X**, afundando-se. A impulsão exercida sobre a esfera de aço:
  - é menor do que a exercida na gota de óleo.
  - não depende da profundidade.
  - é simétrica do seu peso.
  - não depende da densidade do líquido **X**.

15. Uma esfera de plástico de  $30 \text{ dm}^3$  pesa  $70 \text{ N}$ . Imerge-se a bola numa piscina, larga-se e ela sobe até à superfície da água.

- Calcule os módulos das forças que atuam na esfera antes de entrar na água e quando está nela totalmente imersa.
- Qual dos gráficos pode traduzir a impulsão que atua sobre a esfera, em função do tempo, desde que é largada até ficar em equilíbrio à superfície da água?

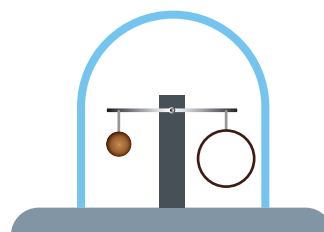


- Qual é a resultante das forças de pressão exercidas na bola quando está em equilíbrio à superfície da água?
- Qual é o volume imerso da bola após ficar em equilíbrio à superfície da água?

16. Na Serra de Estrela, uma rapariga de  $50,0 \text{ kg}$  pretende colocar-se sobre uma placa cúbica gelada que flutua na Lagoa de Viriato. Considere  $\rho_{\text{gelo}} = 0,92 \text{ g cm}^{-3}$ .

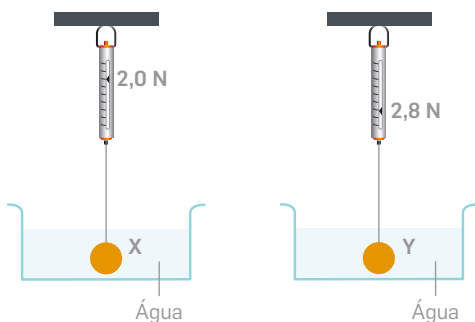
- Que percentagem do volume da placa está imersa antes de a rapariga ficar sobre ela?
- Qual deve ser o volume mínimo da placa para a rapariga ter segurança?

17. Numa balança de braços iguais suspendeu-se uma esfera grande e oca numa extremidade da alavanca e um pequeno corpo metálico na outra, de modo a equilibrar a balança. O sistema foi colocado no interior de uma câmara de onde se extraiu o ar com uma bomba de vácuo. Preveja, fundamentando, o que deverá ter ocorrido.





18. Observe a figura seguinte (que não está à escala): dois corpos maciços de igual massa, **X** e **Y**, são mergulhados totalmente em água quando estão suspensos de dinamômetros, os quais marcam os valores indicados.



- a) Pode concluir-se que:
- (A) a força gravítica exercida sobre **X** é menor do que a exercida sobre **Y**.
- (B) a impulsão exercida sobre **X** é maior do que a exercida sobre **Y**.
- (C) a resultante das forças que atuam em **Y** é maior do que a resultante das forças que atuam em **X**.
- (D) as forças exercidas pelos fios sobre **X** e **Y** são iguais.
- b) Qual é a diferença, em  $\text{cm}^3$ , entre os volumes de **X** e de **Y**?
- c) O corpo **X** é de alumínio, cuja densidade é  $2,7 \text{ g cm}^{-3}$ . Determine a densidade do material que constitui **Y**.

### 1.3.6 Movimento de corpos em fluidos; viscosidade

19. Descreva o movimento de uma gota de chuva caracterizando:
- a) as forças que atuam sobre ela.
- b) a aceleração.
- c) o tipo de movimento.
20. Determine a velocidade terminal de uma esfera de ferro, de raio  $r = 1,0 \text{ mm}$ , que cai num líquido com coeficiente de viscosidade  $\eta = 0,20 \text{ Pa s}$  e densidade  $\rho = 1,2 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . Considere que a força de resistência ao movimento da esfera que se move com velocidade de módulo  $v$  é  $F_{\text{resist}} = 6\pi\eta rv$  e que  $\rho_{\text{ferro}} = 7,9 \text{ g cm}^{-3}$ .

### Atividade laboratorial

21. Um grupo de alunos determinou o coeficiente de viscosidade da glicerina a partir da medição da velocidade terminal de pequenas esferas em queda nesse líquido, procedendo do seguinte modo:
- encheu uma proveta de 1,5 l com glicerina e mediu a temperatura,  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ;
  - deixou cair na proveta esferas de raios,  $r$ , diferentes, do mesmo aço de densidade  $7,85 \text{ g cm}^{-3}$ , e mediu o intervalo de tempo,  $\Delta t$ , que cada esfera levou a percorrer a distância  $d = 0,350 \text{ m}$  entre duas marcas onde as esferas pareciam cair com velocidade constante de módulo  $v_t$ ;
  - determinou a densidade da glicerina, medindo a massa de 20 ml de glicerina: 24,59 g.

Os resultados foram registados na tabela:

$r / \text{mm}$	$\Delta t / \text{s}$	$v_t / \text{m s}^{-1}$
1,60	14,51	14,16
2,45	5,03	0,0669
3,20	3,28	0,1115
3,90	2,06	0,1699
4,95	1,47	0,2365

O valor tabelado para o coeficiente de viscosidade da glicerina a  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  é  $1,41 \text{ Pa s}$ .

- a) Qual é densidade da glicerina, no SI?
- b) Qual é o valor mais provável de **X** (velocidade terminal de uma esfera de raio  $1,60 \text{ mm}$ )?
- c) Antes de atingir a velocidade terminal, a aceleração da esfera:
- (A) mantém-se constante.
- (B) aumenta ao longo do tempo.
- (C) diminui ao longo do tempo.
- (D) é nula.
- d) Considerando que a força de resistência ao movimento de uma esfera de raio  $r$ , que se move com velocidade constante de módulo  $v$  num líquido com coeficiente de viscosidade  $\eta$ , é  $F_{\text{resist}} = 6\pi\eta rv$ , mostre que o módulo da velocidade terminal da esfera,  $v_t$ , é dada por  $v_t = \frac{2(\rho_{\text{aço}} - \rho_{\text{glicerina}})gr^2}{9\eta}$ .

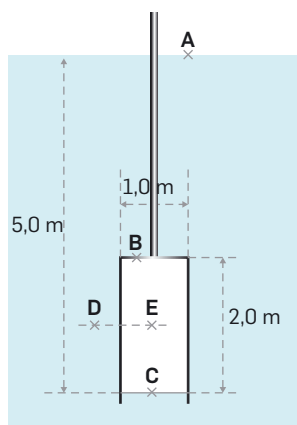
- e) A partir da equação de regressão linear que traduz a velocidade terminal em função do quadrado do raio, calcule o coeficiente de viscosidade da glicerina e o respetivo erro percentual. Considere  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

## Questões globais

22. Explique as seguintes situações:

- Os crocodilos abocanham pedras para se afundarem na água.
- Uma chaleira deve ter o bico de saída à altura da sua parte superior.
- Um caixote dentro de uma canoa fá-la-ia afundar-se, por isso é transportado debaixo de água preso à parte inferior da canoa.
- O ar consegue sustentar objetos muito pesados, tais como os dirigíveis.

23. Uma campânula cilíndrica de aço, sem fundo, é imersa em água, a partir da superfície, tal como mostra a figura. O diâmetro da base da campânula é 1,0 m. O desnível entre os pontos **A** e **C** é 5,0 m e entre os pontos **B** e **C** é 2,0 m. A pressão atmosférica é 1,0 atm.



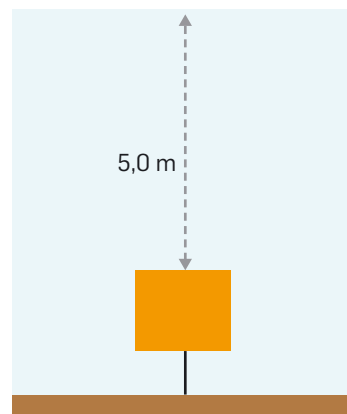
- Selecione a opção correta.  
(A)  $p_C = p_E$    (B)  $p_D > p_C$    (C)  $p_A > p_B$    (D)  $p_D = p_E$
- Determine a resultante das forças de pressão exercidas na superfície superior da base da campânula.
- Qual é a impulsão exercida sobre a campânula?

- Preveja, justificando, o que deverá suceder ao volume de ar no interior da campânula à medida que ela desce.

24. Um cubo de madeira de 10,0 cm de aresta flutua completamente imerso num recipiente que contém água e óleo, cuja massa volúmica é  $0,91 \text{ g cm}^{-3}$ . A face inferior do cubo está mergulhada em água até a uma altura de 2,0 cm.

- Qual é a densidade relativa da madeira?
- Determine a pressão exercida ao nível da face inferior do cubo exclusivamente devida aos líquidos, sabendo que a face superior do cubo está a rasar a superfície livre do óleo.

25. Um cubo, de densidade  $8,0 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}$ , encontra-se preso por um fio ao fundo de um lago com água. A superfície superior do cubo encontra-se a 5,0 m de profundidade. O módulo da tensão no fio é 250 N. Considere a pressão atmosférica  $1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$ .



- Determine a pressão na face superior do cubo.
- Determine o volume do cubo.
- Corta-se o fio e o cubo sobe ficando em equilíbrio à superfície do lago.
  - Como varia a impulsão durante a subida do cubo?
  - Quanto tempo demoraria o cubo a atingir a superfície se fosse desprezável a força de resistência da água?
  - Que fração do volume do cubo ficará fora de água ao ficar em equilíbrio?





2

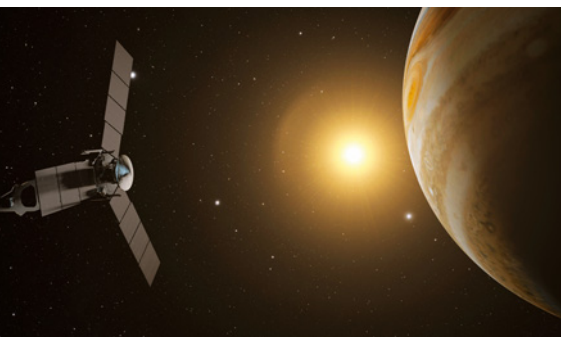
CAMPOS DE FORÇAS



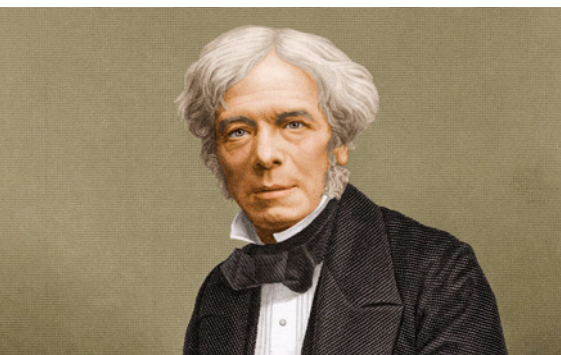




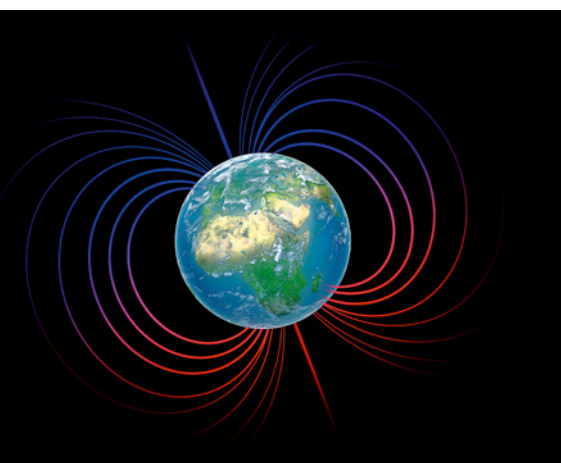
# O FASCINANTE MUNDO DOS CAMPOS DE FORÇAS



**Fig. 1** A sonda Juno, da NASA, e o planeta Júpiter.



**Fig. 2** Michael Faraday, que propôs a noção de campo.



**Fig. 3** O campo magnético terrestre tem origem em correntes elétricas no seu interior.

Dizemos que existe um campo quando está presente uma força numa certa região do espaço. Vivemos no seio do campo gravítico terrestre, pois caminhamos sobre a Terra e qualquer objeto que seja largado cairá para a superfície da Terra. Já na física do 11.º ano estudámos o campo gravítico, assim como outros, como o campo elétrico e o campo magnético. A Terra tem à sua volta, além de um campo gravítico, um campo magnético, que é revelado pela agulha de uma bússola.

O campo gravítico da Terra é revelado, por exemplo, por uma maçã, que cai para a Terra porque esta a atrai. O nosso planeta cria um campo gravítico em seu redor e a força gravítica sobre a maçã é o resultado do campo criado pela Terra. O campo gravítico em todo o Sistema Solar é o resultado da ação do Sol, dos planetas e dos satélites. O campo num dado ponto varia porque os astros estão em movimento. Como conhecemos as leis físicas que permitem obter o campo gravítico num dado ponto do espaço em qualquer instante, podemos, por exemplo, planear uma missão de uma sonda espacial da Terra até Júpiter, como é o caso da sonda Juno.

A noção de campo foi proposta por Faraday na segunda década do século XIX no contexto do estudo dos fenómenos elétricos e magnéticos. Ele pretendia compreender uma interação à distância. Uma partícula com carga elétrica atrai ou repele uma outra partícula, também com carga elétrica, situada na sua proximidade. Mas essas forças já serão menores se a segunda partícula estiver mais afastada. Faraday concebeu que a primeira carga modificava as propriedades do espaço à sua volta, ao criar um campo elétrico variável no espaço. A segunda carga «sentia» esse campo e, em consequência, ficava sujeita a uma força.

O efeito dos campos elétricos sobre cargas elétricas, por exemplo, eletrões, é hoje bem conhecido, o que permite todas as tecnologias associadas a circuitos elétricos. Também um íman atrai ou repele outros ímanes à sua volta porque cria um campo magnético. A Terra é um gigantesco íman que faz mexer o pequeno íman que é a agulha de uma bússola. Um circuito elétrico pode funcionar como um íman e, de facto, o campo magnético terrestre deve-se à circulação de correntes elétricas no interior do nosso planeta.

Vamos «mergulhar» nos campos.



# 2.1 CAMPO GRAVÍTICO

---

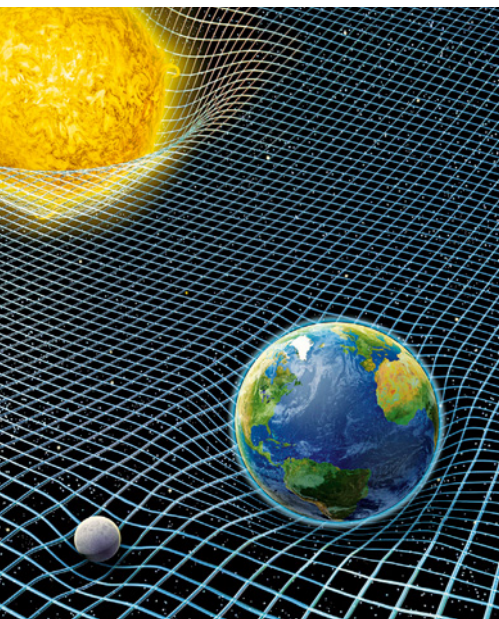
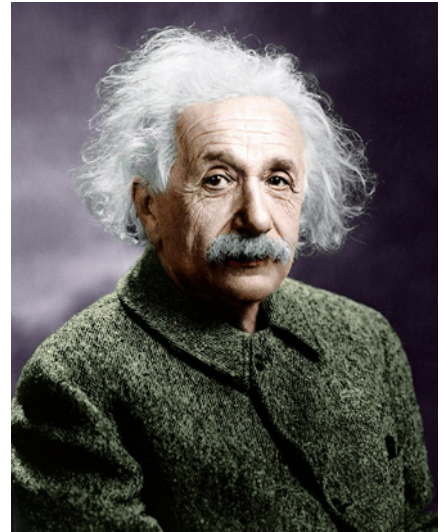
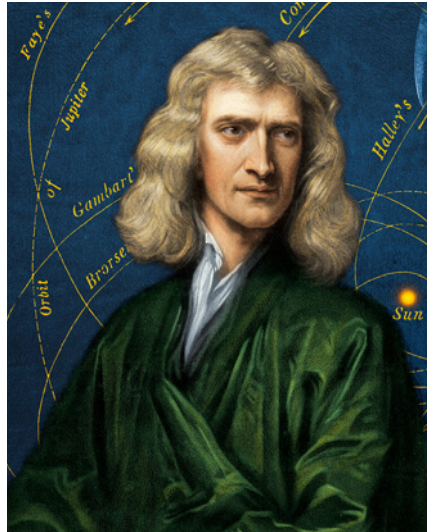


- 2.1.1 Leis de Kepler
- 2.1.2 Lei de Newton da Gravitação Universal
- 2.1.3 Campo gravítico
- 2.1.4 Energia potencial gravítica; conservação da energia no campo gravítico

Uma maçã cai para a Terra devido à força gravítica. Também a Lua roda em volta da Terra devido à força gravítica. A força gravítica é, portanto, uma força que se exerce à distância.

**Forças gravíticas:** foram explicadas por Newton e Einstein. A teoria de Einstein explica um maior número de fenómenos.

**Fig. 1** Newton e Einstein, autores das principais teorias das interações gravitacionais.



**Fig. 2** Na Teoria da Relatividade Geral, as forças gravíticas são explicadas com base na deformação do espaço-tempo, aqui representada em visão artística.

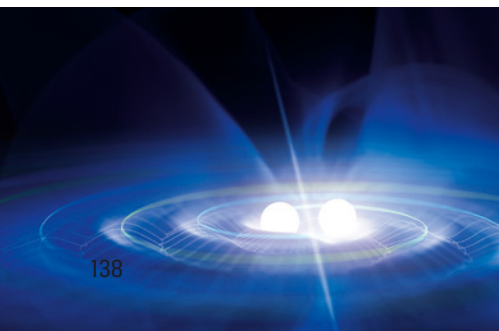
A teoria de Einstein não eliminou as ideias de Newton, que continuam a aplicar-se num certo limite, em particular para a generalidade dos fenómenos que ocorrem perto de nós.

A Lei da Gravitação Universal de Newton explica bem, por exemplo, as interações entre a maçã e a Terra, entre a Lua e a Terra, ou ainda entre o Sol e os planetas do Sistema Solar. Mas falha na descrição dos primeiros instantes do Universo e na previsão da evolução de estrelas compactas, como as estrelas de neutrões e os buracos negros. Nestes casos é necessária a Teoria da Relatividade Geral de Einstein. As ondas gravitacionais (**Fig. 3**), cuja deteção foi anunciada em 2016, foram previstas com base na Teoria da Relatividade Geral cem anos antes.

Assim como, há cerca de cem anos, Einstein melhorou as ideias de Newton, pode ser que alguém, um dia, melhore as de Einstein. De facto, os físicos trabalham hoje para criar uma teoria melhor...

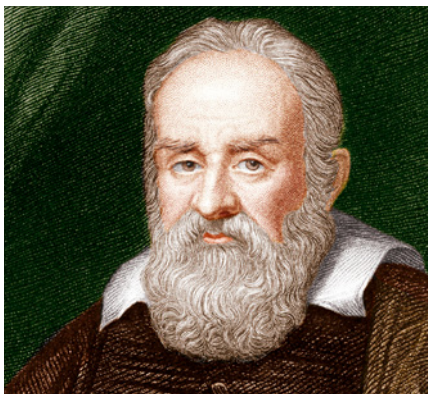
Seguindo uma abordagem histórica, vamos aprofundar as ideias de Newton sobre a gravitação, já introduzidas em anos anteriores.

**Fig. 3** Colisão de dois grandes buracos negros originando ondas gravitacionais (simulação).





## 2.1.1 Leis de Kepler



**Fig. 4** Galileu e Kepler, os «gigantes» a cujos ombros Newton subiu.

Foi com base nos trabalhos de Galileu e Kepler (Fig. 4) que Newton, no século XVII, chegou à Lei da Gravitação Universal. O próprio reconheceu a sua dívida para com Galileu e Kepler ao afirmar que «se pude ver mais longe foi porque estava aos ombros de gigantes». Newton foi ele próprio um «gigante», aos ombros de quem Einstein haveria de subir no século passado.

Galileu, baseado nas suas observações astronómicas, defendeu que a Terra não estava no centro do Universo. A ideia do Sol como centro do mundo tinha sido proposta pelo polaco Nicolau Copérnico (Fig. 5). Uma das razões que levaram Copérnico a formular o seu sistema heliocêntrico, no século XVI, foi a simplicidade que resultava na descrição dos dados da observação. O sistema heliocêntrico opunha-se ao sistema geocêntrico do grego Ptolomeu (Fig. 6), proposto no século II com base em ideias anteriores.

No século XVI, o astrónomo dinamarquês Tycho Brahe efetuou numerosas observações das posições de estrelas e de planetas ao longo de mais de vinte anos (sem dispor de telescópio, que ainda não tinha sido inventado), mas morreu sem ter estudado todos os seus registos. Coube essa tarefa ao seu discípulo Johannes Kepler, astrónomo alemão, que confirmou o sistema heliocêntrico e chegou a conclusões corretas sobre os movimentos dos planetas do Sistema Solar.

As leis que se aplicam ao movimento dos planetas em torno do Sol são conhecidas por **Leis de Kepler**.



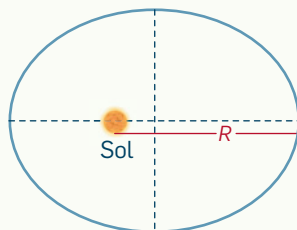
**Fig. 5** O polaco Nicolau Copérnico formulou um sistema heliocêntrico, no séc. XVI, contrariando o sistema geocêntrico de Ptolomeu.



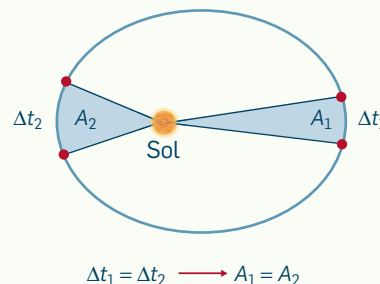
**Fig. 6** Sistema geocêntrico de Ptolomeu (à esquerda) e sistema heliocêntrico de Copérnico (à direita).

## Leis de Kepler: descrevem os movimentos dos planetas à volta do Sol

1. Lei das Órbitas: a órbita de um planeta é elíptica, ocupando o Sol um dos focos da elipse.



2. Lei das Áreas: o vetor posição do planeta, com origem no Sol, «varre» áreas iguais em intervalos de tempo iguais.



3. Lei dos Períodos: o cubo do semieixo maior da elipse e o quadrado do período do movimento do planeta são diretamente proporcionais, o que pode exprimir-se por:

$$\frac{m R^3}{s T^2} = K \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

(K é uma constante para todos os planetas do Sistema Solar)

Estas leis foram igualmente confirmadas para os movimentos das luas mais próximas de Júpiter descobertas por Galileu.

Foi Newton quem explicou a causa dos movimentos descritos pelas Leis de Kepler: a força da gravidade.

## Questão resolvida 1



A distância entre a Terra e o Sol é cerca de 150 milhões de quilómetros, ou uma unidade astronómica (símbolo ua). A distância média de Plutão ao Sol é cerca de 40 ua.

Qual é a duração do ano naquele planeta-anão?



Sabendo que  $T_T = 1$  ano,  $R_T = 1$  ua e  $R_P = 40$  ua, se aplicarmos a Terceira Lei de Kepler,  $\frac{R^3}{T^2} = K$ , podemos escrever:

$$\frac{R_T^3}{T_T^2} = \frac{R_P^3}{T_P^2} \Leftrightarrow T_P = T_T \sqrt{\left(\frac{R_P}{R_T}\right)^3}$$

Substituindo valores, determina-se

$$T_P = 1 \times \sqrt{\left(\frac{40}{1}\right)^3} = 2,5 \times 10^2 \text{ anos}$$

De facto, o valor exato é 248,4 anos (note-se que tomámos a distância média de Plutão ao Sol em vez do comprimento do semieixo maior da órbita elíptica).



## 2.1.2 Lei de Newton da Gravitação Universal

A excentricidade da órbita da Terra, tal como a da generalidade dos planetas do Sistema Solar, é pequena. Em boa aproximação, a Terra move-se ao longo de uma órbita circular (uma elipse com eixos iguais é uma circunferência), com movimento uniforme. Também a Lua tem uma órbita praticamente circular em torno da Terra, sendo o seu movimento uniforme.

A aceleração no movimento circular uniforme só tem componente centrípeta. Newton calculou o valor dessa componente para a Lua a partir de  $a = \frac{v^2}{R}$  (com  $v$  o módulo da velocidade da Lua e  $R$  é a distância entre os centros da Terra e da Lua). Como o módulo da velocidade da Lua é constante, designando por  $T$  o período da Lua, tem-se  $v = \frac{2\pi R}{T}$  e o módulo da sua aceleração é  $a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ .

Newton fez os cálculos e obteve para o módulo da aceleração (nas atuais unidades SI)  $a = 2,7 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ , muito inferior a  $9,8 \text{ m s}^{-2}$ , o módulo da aceleração gravítica junto da superfície terrestre, que já era conhecido na época (Fig. 7). Esta diferença entre os valores das acelerações levou Newton a pensar que a aceleração e, portanto, a força que a Terra exercia sobre os objetos, dependia da distância, quer eles estivessem junto ou longe da Terra!

Procurou então relacionar as forças exercidas pelo Sol sobre os planetas com os raios das respetivas órbitas que, por simplicidade, considerou circulares (Fig. 8). Partindo da Segunda Lei de Newton e substituindo a expressão da aceleração centrípeta, a intensidade da força que o Sol exerce sobre um planeta qualquer de massa  $m$  é:

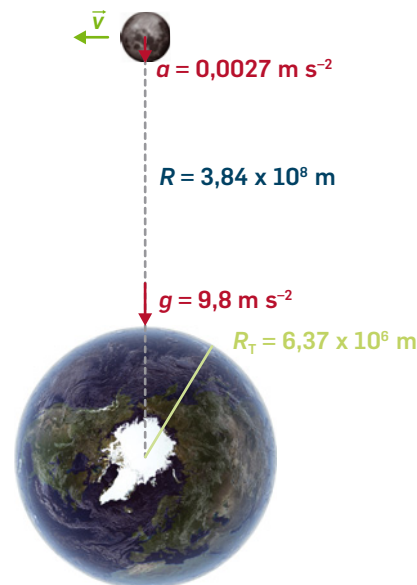
$$F = m \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

onde  $R$  é o raio da órbita do planeta e  $T$  o seu período.

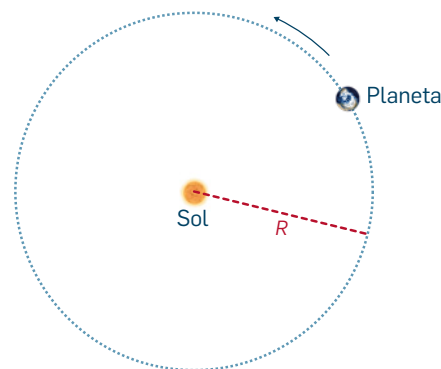
Com base na Terceira Lei de Kepler,  $\frac{R^3}{T^2} = K$  (sendo  $K$  uma constante), substituindo  $T^2$  por  $R^3/K$ , a intensidade da força vem:

$$F = 4\pi^2 K \frac{m}{R^2}$$

Esta expressão mostra que a intensidade da força exercida pelo Sol é proporcional à massa do planeta e ao inverso do quadrado da distância entre os astros. A constante  $K$  tem o mesmo valor para todos os planetas do Sistema Solar, mas depende do astro central que exerce a força: o Sol, no caso dos planetas do Sistema Solar, a Terra no caso da Lua, Júpiter para as suas luas, etc.



**Fig. 7** A aceleração da Lua é muito inferior à dos corpos que caem perto da superfície da Terra.



**Fig. 8** As órbitas dos planetas são aproximadamente circulares.

A expressão anterior pode ser generalizada para a força que um objeto **A**, de massa  $m_A$ , exerce sobre um objeto **B**, de massa  $m_B$ , que está à distância  $r$  (**Fig. 9**):

$$F_{A/B} = 4\pi^2 K_A \frac{m_B}{r^2}$$



**Fig. 9** As forças  $\vec{F}_{B/A}$  e  $\vec{F}_{A/B}$  formam um par ação-reação

Da mesma maneira, a força que **B** exerce sobre **A** é dada por:

$$F_{B/A} = 4\pi^2 K_B \frac{m_A}{r^2}$$

Mas, de acordo com a Terceira Lei de Newton,  $F_{B/A} = F_{A/B}$ , donde:

$$\frac{4\pi^2 K_B}{r^2} m_A = \frac{4\pi^2 K_A}{r^2} m_B \quad \text{ou} \quad \frac{4\pi^2 K_B}{m_B} = \frac{4\pi^2 K_A}{m_A}$$

Daqui se conclui que  $\frac{4\pi^2 K}{m}$  tem o mesmo valor para quaisquer dois corpos em interação gravítica. Este valor comum,  $G = \frac{4\pi^2 K_A}{m_A} = \frac{4\pi^2 K_B}{m_B}$  chama-se **constante de gravitação universal**.

A intensidade da força de atração entre dois corpos, que é a força gravítica, é então expressa pela **Lei de Newton da Gravitação Universal**:

$$F_g = G \frac{m_A m_B}{r^2}$$

Esta expressão foi já apresentada em anos anteriores mas, como se mostrou, obtém-se a partir da Terceira Lei de Kepler seguindo o raciocínio de Newton.

### Questão resolvida 2



Um dia, o ser humano chegará a Marte. Relacione as intensidades das forças que Terra e Marte exercem sobre um astronauta quando ele se encontra à superfície desse planeta. A massa de Marte é 0,107 vezes a massa da Terra e o seu raio é 0,53 vezes o raio da Terra.



A força à superfície da Terra é  $F_g = G \frac{m_T m}{R_T^2}$

À superfície de Marte, é

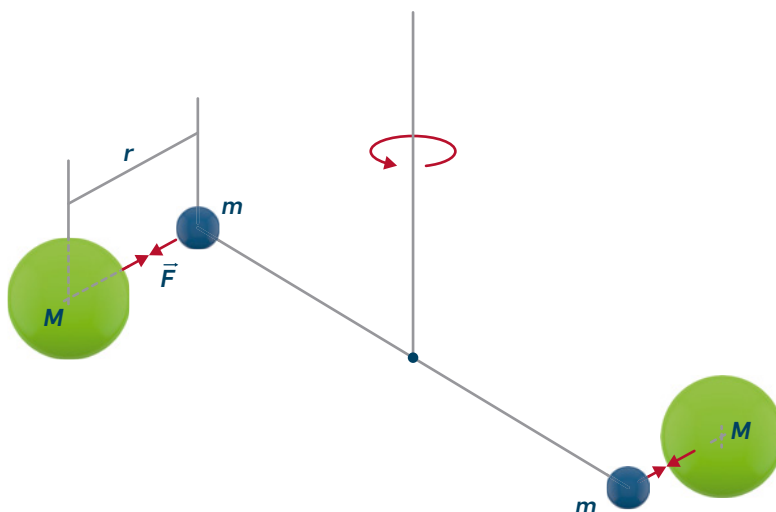
$$F_g' = G \frac{m_M m}{R_M^2} = G \frac{0,107 m_T m}{(0,53 R_T)^2} = \frac{0,107}{0,281} G \frac{m_T m}{R_T^2} \Rightarrow F_g' = 0,38 F_g$$

### Constante de gravitação universal e experiência de Cavendish

Os dados obtidos depois de Newton confirmavam a dependência da força com o inverso do quadrado da distância, mas faltava determinar o valor da constante de gravitação universal,  $G$ . Não era possível obter o valor de  $G$  a partir unicamente da constante  $K$  que aparece na Terceira Lei de Kepler.

Só no final do século XVIII é que o inglês **Henry Cavendish** confirmou experimentalmente a Lei da Gravitação Universal de Newton (**Fig. 10**).

Cavendish usou um dispositivo constituído por uma haste muito leve, na extremidade da qual estavam duas pequenas esferas metálicas de massas iguais ( $m = 0,780$  kg). A haste, de dois metros, ficava horizontal, suspensa por um fio, podendo todo o sistema rodar, torcendo o fio (**Fig. 11**). Estando o sistema em equilíbrio, fixou outras duas esferas de massas iguais mas muito maiores ( $M = 158$  kg) e mediu a distância entre cada uma das esferas pequenas e a grande mais próxima (**Fig. 11**). Verificou que a haste rodava de um certo ângulo e mediu-o.



Essa rotação devia-se às forças de atração gravítica entre cada esfera pequena e a esfera grande mais próxima (**Fig. 11**). O valor da força sobre cada uma das bolas presas à haste podia ser medido diretamente a partir da torção do fio.

Por outro lado, esse valor teria de ser igual a  $F_g = G \frac{mM}{r^2}$ , de acordo com a Lei da Gravitação Universal. Para além do valor de  $F_g$ , Cavendish conhecia os valores de  $M$ ,  $m$  e  $r$ , o que lhe permitiu confirmar no laboratório a dependência da força com a distância e com as massas e obter o valor de  $G$ .

A **constante de gravitação universal** vale, no SI:

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

A **Fig. 12** mostra um dispositivo moderno para realizar a experiência de Cavendish num laboratório escolar.



**Fig. 10** Réplica do dispositivo usado por Henry Cavendish para determinar o valor da constante de gravitação universal,  $G$ .

**Fig. 11** Esquema da experiência de Cavendish. Quando o sistema roda, o fio torce.

**Constante de gravitação universal:** foi determinada por Cavendish, permitindo confirmar a Lei da Gravitação Universal.



**Fig. 12** Dispositivo moderno para realizar a experiência de Cavendish.

Conhecido o valor de  $G$ , os dados astronómicos permitiram obter a massa do Sol, dos planetas, das luas, etc., por aplicação direta da Lei da Gravitação Universal. Este é, aliás, o método hoje usado para determinar as massas de muitas estrelas. Também a massa da Terra foi obtida a partir do valor de  $G$ , da aceleração da gravidade,  $g$ , e do raio da Terra. De facto, se igualarmos a força de atração exercida pela Terra sobre um corpo,  $F_g = G \frac{m_{\text{Terra}} m}{R_{\text{Terra}}^2}$ , ao peso desse corpo,  $P = mg$ , encontraremos:

$$g = G \frac{m_{\text{Terra}}}{R_{\text{Terra}}^2}$$

Esta expressão permite obter a massa da Terra, conhecendo os valores das restantes grandezas. Foi assim que Cavendish determinou, pela primeira vez, a massa da Terra: aproximadamente  $6 \times 10^{24}$  kg.

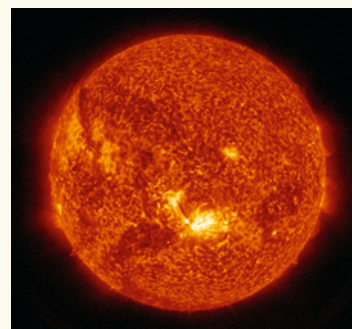
### Questão resolvida 3



A massa de um corpo celeste pode ser determinada com base nas características do movimento orbital de qualquer um dos seus satélites (período de translação e raio da órbita) e no valor da constante de gravitação universal,

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

Determine a massa do Sol com base no movimento de translação da Terra. Considere o movimento de translação da Terra circular com raio  $1,496 \times 10^8$  km.



A Terra, de massa  $m_T$ , move-se em torno de Sol, de massa  $m_S$ , numa órbita aproximadamente circular, de raio  $r$ , sujeita unicamente à força gravítica exercida pelo Sol de intensidade  $F_g$ . Numa órbita circular, a resultante das forças – a força gravítica – é centrípeta e, portanto, o módulo da velocidade,  $v$ , é constante (como a força gravítica é perpendicular à velocidade não existe componente da resultante das forças na direção da velocidade).

A massa do Sol pode obter-se da aplicação da Segunda Lei de Newton ao movimento da Terra em torno do Sol:

$$F_g = m_T a \Rightarrow G \frac{m_T m_S}{r^2} = m_T \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{m_S}{r} = v^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_S = \left( \frac{2\pi r}{T} \right)^2 \times \frac{r}{G} \Rightarrow m_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

em que  $T$  é o período do movimento de translação da Terra. Substituindo os valores numéricos na expressão anterior, determina-se a massa do Sol:

$$m_S = \frac{4\pi^2 (1,496 \times 10^{11})^3}{6,67 \times 10^{-11} \times (365,25 \times 24 \times 60 \times 60)^2} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

### Atividade 1



A partir de dados relativos à Terra, confirme, a partir da expressão de  $g$  acima, que a aceleração da gravidade é, aproximadamente,  $9,8 \text{ m s}^{-2}$ . Encontre os dados relativos

a vários planetas do Sistema Solar e a estrelas de vários tipos (do Sol às estrelas de neutrões) e determine a aceleração da gravidade à sua superfície.



## 2.1.3 Campo gravítico

Sabemos por que razão uma maçã, ao desprender-se da macieira, cai: a Terra exerce uma força gravítica sobre ela. Podemos compreender esta força à distância como uma interação local, usando a noção de campo, que já surgiu no 11.º ano a propósito de interações magnéticas e elétricas.

Recordemos que um íman atrai certos objetos. Podemos pensar que o íman cria à sua volta um campo magnético que é uma espécie de «mediador» entre o íman e os objetos que com ele interagem. Em redor do íman, o campo magnético será tanto maior quanto maior for a força que se exerce sobre um dado objeto. Também as cargas elétricas criam no espaço um campo elétrico. Uma carga elétrica colocada numa região onde exista um campo elétrico fica sujeita a uma força elétrica. Podemos representar os campos elétricos e magnéticos através de linhas de campo (**Fig. 13**).

De um modo análogo, consideremos uma partícula de massa  $M$  fixa num ponto do espaço. Se colocarmos uma partícula de massa  $m$  perto dela, a primeira partícula exerce uma força gravítica sobre a segunda (**Fig. 14**). Dizemos que a segunda partícula «sente» o campo gravítico criado pela primeira.

A força gravítica que a partícula de massa  $M$  exerce sobre a partícula de massa  $m$ , colocada num ponto  $P$  à distância  $r$  (**Fig. 14**), é dada por

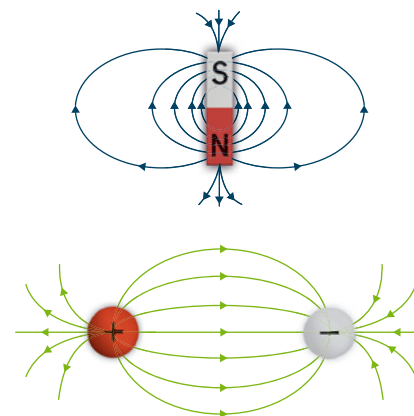
$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r$$

onde  $\vec{e}_r$  é o vetor unitário na direção e sentido do vetor posição  $\vec{r}$ . O sinal negativo indica que a força tem sentido oposto a  $\vec{e}_r$ , ou seja, é atrativa.

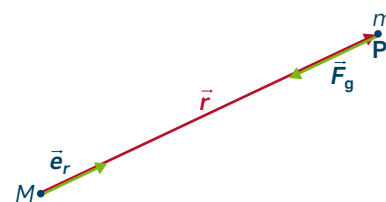
Para caracterizar a ação gravítica da partícula de massa  $M$ , independentemente da massa  $m$  das partículas que sofrem a força, define-se o campo gravítico como:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

A unidade de campo gravítico é, por isso, e no SI, newton por quilograma ( $\text{N kg}^{-1}$ ). O campo gravítico é diferente na Terra e na Lua (**Fig. 15**).



**Fig. 13** Representação do campo magnético (em cima) e do campo elétrico (em baixo) por linhas de campo.



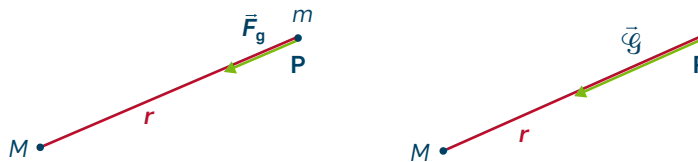
**Fig. 14** Força gravítica que a partícula de massa  $M$  exerce sobre a partícula de massa  $m$  colocada no ponto  $P$ .



**Fig. 15** A Terra e a Lua.

O campo gravítico representa a interação local, pois define-se em cada ponto. Como a massa é uma grandeza sempre positiva, os vetores  $\vec{\mathcal{G}}$  e  $\vec{F}_g$  têm sempre a mesma direção e sentido (**Fig. 16**).

**Fig. 16** Força gravítica que a partícula de massa  $M$  exerce sobre a partícula de massa  $m$  (à esquerda) e campo gravítico, no ponto onde se situa a massa  $m$ , criado pela partícula de massa  $M$  (à direita).



Note-se que o campo gravítico não depende da massa  $m$  sobre a qual se exerce a força gravítica, pois, se substituirmos, na equação  $\vec{\mathcal{G}} = \frac{\vec{F}_g}{m}$ ,  $\vec{F}_g$  pela expressão da Lei da Gravitação Universal obtemos:

$$\vec{\mathcal{G}} = -G \frac{M}{r^2} \vec{e}_r$$

Conhecendo o campo gravítico num dado ponto podemos calcular a força gravítica exercida sobre uma partícula de massa  $m$  aí colocada pela expressão  $\vec{F}_g = m \vec{\mathcal{G}}$ .

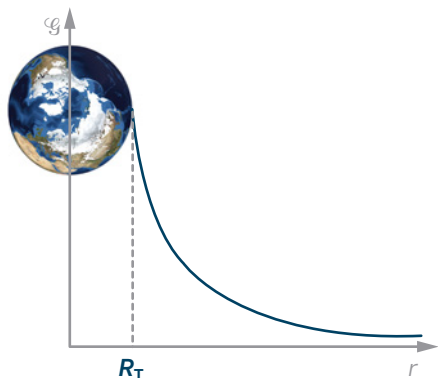
Caracterizemos então o campo gravítico:

### Campo gravítico

O módulo do campo gravítico criado por uma partícula de massa  $M$  é:

$$\text{N kg}^{-1} \mathcal{G} = G \frac{M \text{ kg}}{r^2 \text{ m}} \quad \text{N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

- É definido num ponto.
- Depende apenas da massa que cria o campo e da sua distância ao ponto.
- É diretamente proporcional a essa massa (no mesmo ponto) e inversamente proporcional ao quadrado da distância da massa ao ponto (para uma massa constante).
- Manifesta-se pela força gravítica exercida sobre partículas, de massa  $m$ , colocadas no ponto:  $\vec{F}_g = m \vec{\mathcal{G}}$ .



**Fig. 17** O campo gravítico terrestre é inversamente proporcional ao quadrado da distância ao centro da Terra para distâncias superiores ao raio da Terra.

A expressão anterior aplica-se ao campo gravítico criado por um planeta, à sua superfície e no seu exterior, sendo  $r$  a distância ao centro do planeta (**Fig. 17**).

Sendo a força gravítica a resultante das forças,  $\vec{F}_R = \vec{F}_g$ , segue-se da Segunda Lei de Newton que  $\vec{F}_g = m \vec{g}$ , em que  $\vec{g}$  é a aceleração gravítica. Assim, próximo da superfície da Terra,  $\vec{\mathcal{G}}$  coincide com a aceleração gravítica  $\vec{g}$  (a sua unidade SI é o metro por segundo quadrado, equivalente a newton por quilograma).

Tal como para os campos elétrico e magnético, é útil representar graficamente o vetor campo gravítico criado por uma massa pontual como na **Fig. 18**.

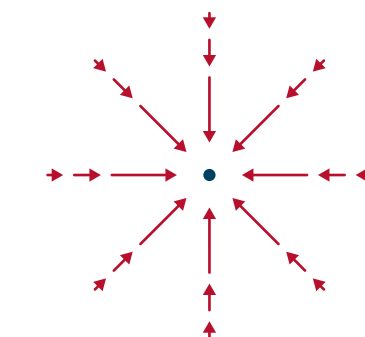
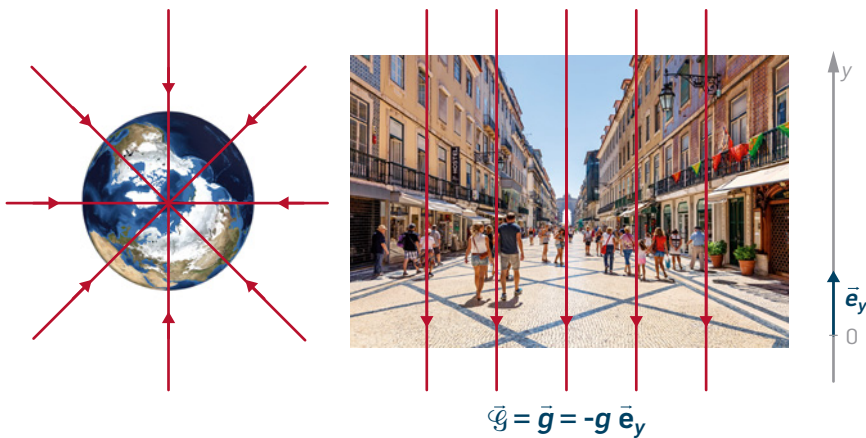
Outra maneira de representar o campo gravítico é através das **linhas de campo**, que indicam a direção e o sentido do campo em cada ponto. A **Fig. 19** mostra o campo criado por uma partícula pontual: as linhas são radiais e apontam para o centro.

As características das linhas de campo já foram estudadas para os campos elétrico e magnético no 11.º ano:

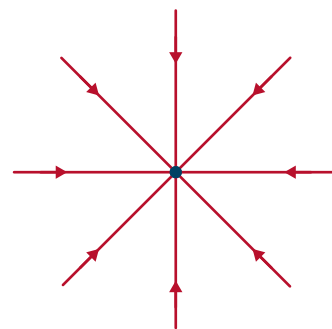
### Linhas de campo gravítico

- São sempre tangentes ao vetor campo gravítico e orientadas segundo o seu sentido.
- Nunca se cruzam.
- Terão maior densidade onde o campo for mais intenso (o número de linhas que atravessa uma superfície plana de área unitária perpendicular ao campo é proporcional à intensidade do campo nesse ponto).

Numa região limitada próxima da superfície da Terra, as linhas de campo gravítico são aproximadamente paralelas e o campo é uniforme: tem sempre o mesmo módulo e aponta sempre na mesma direção. Quer dizer, a aceleração gravítica não varia de ponto para ponto numa região próxima da superfície terrestre (**Fig. 20**).



**Fig. 18** Representação do campo gravítico criado por uma partícula em vários pontos.



**Fig. 19** Linhas do campo gravítico criado por uma partícula.

**Fig. 20** Globalmente o campo gravítico é radial, mas localmente pode ser considerado uniforme: as linhas de campo são paralelas e igualmente espaçadas.

### Questão resolvida 4



Um satélite artificial de Marte está a uma altura da sua superfície de 6000 km. A massa de Marte é de  $6,42 \times 10^{23}$  kg e o seu raio é 3390 km. Qual é o módulo do campo gravítico a essa altitude?

Como o raio da órbita é  $r = (6,000 + 3,390) \times 10^6$  m, então:

$$g = G \frac{m_M}{r^2} \Rightarrow g = 6,67 \times 10^{-11} \frac{6,42 \times 10^{23}}{(9,390 \times 10^6)^2} = 0,486 \text{ N kg}^{-1}$$

## 2.1.4 Energia potencial gravítica; conservação da energia no campo gravítico

No 10.º ano associámos aos corpos uma energia potencial gravítica por estarem num campo gravítico. De facto, a energia não pertence apenas ao corpo mas refere-se ao sistema *corpo-Terra* porque resulta da interação gravítica entre o corpo e a Terra.

**Campo gravítico:** é conservativo (a força gravítica é conservativa).

**Energia potencial gravítica:** a expressão  $E_{pg} = mgy$  só é válida para campos gravíticos uniformes.

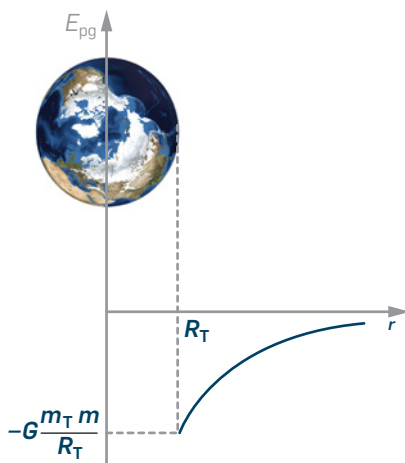
O **campo gravítico** diz-se conservativo porque o trabalho da força gravítica entre dois pontos quaisquer não depende da trajetória entre eles mas apenas das posições inicial e final. Se o **campo gravítico** for uniforme, o peso (identificado aqui com a força gravítica) será constante e a **energia potencial gravítica** será dada por:

$$E_{pg} = mgy$$

em que  $m$  é a massa do corpo,  $g$  o módulo do campo gravítico e  $y$  a posição sobre o eixo vertical relativamente a um nível de referência onde se toma a energia potencial nula.

Mas, no caso geral (campo não uniforme), a expressão anterior não é válida. A energia potencial de interação entre duas partículas, uma de massa  $M$  e a outra de massa  $m$ , separadas por uma distância  $r$ , tem uma referência que vamos fixar do seguinte modo: a energia potencial é nula ( $E_{pg} = 0$ ) quando a separação entre as partículas é infinita ( $r \rightarrow \infty$ ). Mas a escolha da referência para a energia potencial é arbitrária.

Podemos, então, caracterizar a **energia potencial gravítica**:



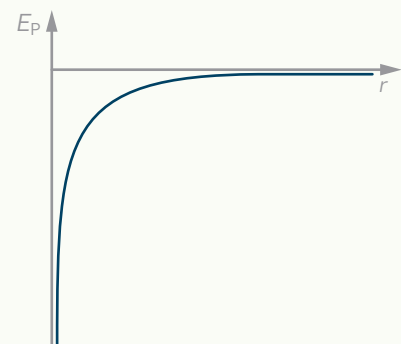
**Fig. 21** Energia potencial gravítica do sistema *corpo-Terra* em função da distância ao centro da Terra.

### Energia potencial gravítica de interação entre duas partículas

Define-se para duas partículas, de massa  $M$  e  $m$ , separadas de  $r$ , do seguinte modo:

$$E_{pg} = -G \frac{Mm}{R}$$

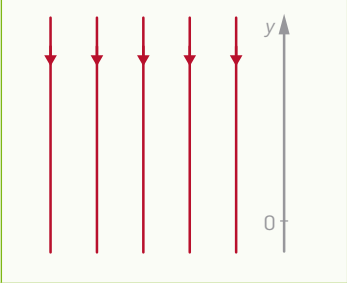
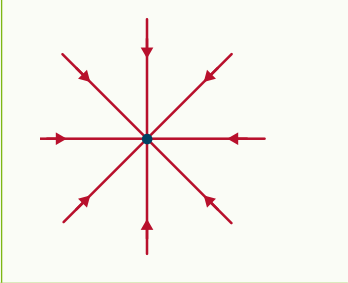
- É sempre negativa.
- Aumenta à medida que as partículas se afastam (será nula quando estiverem infinitamente afastadas).



A **Fig. 21** mostra como varia a energia potencial do sistema *corpo-Terra* para distâncias superiores ao raio da Terra.



A **Fig. 22** resume, para um campo de forças gravíticas uniforme e radial, as linhas de força e as respetivas expressões da força e da energia potencial gravíticas.

	Campo uniforme	Campo radial
Força	$\vec{F}_g = m g \vec{e}_y$	$\vec{F}_g = -G \frac{M m}{r^2} \vec{e}_r$
Linhas de campo		
Energia potencial gravítica	$E_{pg} = m g y$	$E_{pg} = -G \frac{M m}{r}$

**Fig. 22** Força gravítica e energia potencial gravítica para os campos gravíticos uniforme e radial.

A força gravítica é uma força conservativa. Por isso, o trabalho realizado ao longo de um percurso qualquer entre dois pontos é simétrico da variação de energia potencial entre esses dois pontos:

$$W_{Fg} = -\Delta E_{pg}$$

Se um corpo tiver um movimento num campo gravítico, sujeito apenas às forças gravíticas, como estas são conservativas, a energia mecânica conservar-se-á:

$$E_m = E_c + E_p = \text{constante}$$


sendo:

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M m}{r}$$

### Questão resolvida 5

Um satélite, de massa  $m$  considerada constante, ligado a um foguetão, está inicialmente em órbita terrestre à altitude  $h$ , passando depois para a altitude  $2h$ .

a) Determine o trabalho da força gravítica.

 a) A força gravítica é conservativa: o trabalho desta força é igual ao simétrico da variação da energia potencial:

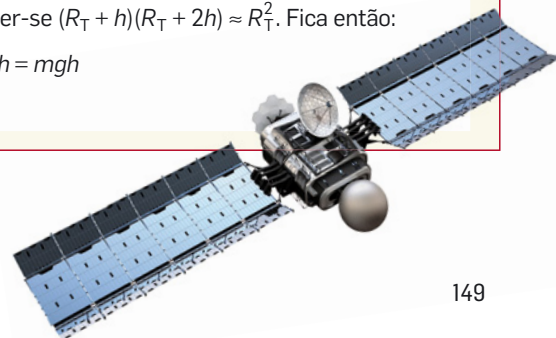
$$W_{Fg} = -\Delta E_{pg} = -\left[ \frac{G m_T m}{R_T + 2h} - \left( -\frac{G m_T m}{R_T + h} \right) \right] = -\frac{G m_T m h}{(R_T + h)(R_T + 2h)}$$

b) Se, em vez de um satélite, estivéssemos a estudar o movimento de um corpo próximo da superfície da Terra, a altura

b) Mostre que para um corpo de massa  $m$ , próximo da superfície da Terra, a energia potencial gravítica pode ser escrita como  $mgh$ , em que  $g$  é o módulo do campo gravítico e  $h$  a altura em relação a um nível de referência.

$h$  seria muito pequena quando comparada com o raio da Terra,  $h < R_T$ . Neste caso, os  $h$  no denominador da expressão anterior podem ser desprezados, passando simplesmente a escrever-se  $(R_T + h)(R_T + 2h) \approx R_T^2$ . Fica então:

$$\Delta E_{pg} \approx \frac{G m_T}{R_T^2} m h = m g h$$



Terra	11,2
Lua	2,4
Sol	618
Júpiter	60
Marte	5,0
Vénus	10,4

**Tab. 1** Valores da velocidade de escape, para vários astros, em  $\text{km s}^{-1}$ .



**Fig. 23** A existência de atmosfera de um planeta é influenciada pela velocidade de escape.



**Fig. 24** A velocidade de lançamento dos foguetões é inferior à velocidade de escape.

### Velocidade de escape e velocidade de um satélite em órbita

Se lançarmos um corpo verticalmente para cima ele subirá mas tornará a descer. E se quiséssemos que ele escapasse à atração gravítica? Teríamos de o lançar com uma velocidade mínima, chamada **velocidade de escape** (velocidade mínima para o corpo subir mas não voltar a descer). Esta é a velocidade com que se deve lançar um corpo (na ausência de resistência do ar) para que ele atinja um ponto no infinito com energia cinética nula.

A energia mecânica no infinito é nula, uma vez que a energia potencial é nula. Aplicando a conservação da energia mecânica, vem

$$\frac{1}{2}mv_{\text{escape}}^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$$

donde se obtém a **velocidade de escape**:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

A **Tab. 1** indica valores de algumas velocidades de escape.

Os valores da velocidade de escape à superfície de um planeta influenciam a existência ou não de atmosfera e a sua composição (**Fig. 23**). A energia cinética média das moléculas de um gás depende da temperatura do gás. As mais leves, como as de hidrogénio e hélio, atingem velocidades mais elevadas do que as mais pesadas, como as de oxigénio e azoto. Para que um gás não escape da atração gravítica de um planeta é necessário que as suas moléculas tenham uma velocidade média bastante inferior à velocidade de escape nesse planeta. É por isso que a Lua não tem, praticamente, atmosfera e a atmosfera da Terra não tem hidrogénio e hélio, enquanto a atmosfera de Júpiter tem bastante hidrogénio.

Os satélites não são lançados por foguetões com a velocidade de escape (**Fig. 24**), mas com velocidades inferiores, pois ficam a orbitar a Terra.

A Segunda Lei de Newton e a Lei da Gravitação permitem determinar o módulo da velocidade do satélite em órbita,  $v_{\text{órbita}}$ . Como a força resultante tem apenas componente centrípeta, que é a força gravítica, podemos escrever

$$m\frac{v_{\text{órbita}}^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2}$$

sendo  $r$  o raio da órbita do satélite ( $r = R_T + h$ , com  $R_T$  o raio da Terra e  $h$  a altitude da órbita).

O módulo da velocidade em órbita vem:

$$v_{\text{órbita}} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

A energia mecânica de um satélite em órbita (**Fig. 25**) é sempre negativa devido à escolha do zero da energia potencial no infinito. A qualquer órbita fechada corresponde uma energia mecânica negativa. Se a energia fosse positiva, o corpo escaparia para longe...

As grandezas definidas para o campo gravítico estão resumidas no quadro da **Fig. 26**:

Campo gravítico	
Força gravítica: grandeza vetorial que se define para duas massas.	$F_g = G \frac{Mm}{r^2}$
Campo gravítico criado por uma massa: grandeza vetorial que se define num ponto.	$\mathcal{G} = G \frac{M}{r^2}$
Energia potencial gravítica: grandeza escalar que se define para duas massas.	$E_{pg} = -G \frac{Mm}{r}$



**Fig. 25** A energia mecânica de um sistema *Terra + satélite* (como a ISS – Estação Espacial Internacional) é sempre negativa.

**Fig. 26** Grandezas definidas para o campo gravítico.

### Questão resolvida 6



- a) Mostre que a energia mecânica de um satélite, de massa constante  $m$ , em órbita circular é negativa.
- b) Determine a expressão algébrica do módulo da velocidade com que deve ser lançado um satélite, à superfície da Terra, para ele ficar em órbita de raio  $r$ .

Designe a massa da Terra por  $m_T$  e o seu raio por  $R_T$ . Despreze a resistência do ar.

**a)** A energia mecânica do sistema *satélite-Terra* é  $E_m = \frac{1}{2} m v_{\text{orb}}^2 - G \frac{m_T m}{r}$ .

Vimos que  $v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$ . Portanto,  $E_m = \frac{1}{2} m G \frac{m_T}{r} - G \frac{m_T m}{r}$ ,

ou seja,  $E_m = -\frac{1}{2} G \frac{m_T m}{r}$ , que é uma quantidade negativa.

- b)** A velocidade que é necessário imprimir a um corpo na superfície da Terra para que ele atinja uma órbita de raio  $r > R_T$  pode obter-se a partir da conservação da energia mecânica.

À superfície da Terra:  $E_m = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m_T m}{R_T}$

Em órbita:  $E_m = -\frac{1}{2} G \frac{m_T m}{r}$

Igualando as duas energias,  $\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m_T m}{R_T} = -\frac{1}{2} G \frac{m_T m}{r}$ , obtém-se

$$v = \sqrt{\frac{Gm_T}{rR_T} (2r - R_T)}$$

**Nota:** Desprezamos a energia cinética do satélite, quando é lançado, devida à rotação da Terra. Na realidade, esta energia é importante e, por isso, os satélites são, em geral, lançados próximo do equador e não dos polos.

### + QUESTÕES p. 155





## RESUMO

- **Leis de Kepler:** descrevem os movimentos dos planetas à volta do Sol. Primeira Lei – Lei das Órbitas: a órbita de um planeta é elíptica, ocupando o Sol um dos focos da elipse. Segunda Lei – Lei das Áreas: o vetor posição do planeta, com origem no Sol, «varre» áreas iguais em intervalos de tempo iguais. Terceira Lei – Lei dos Períodos: o cubo do semieixo maior da elipse (para uma órbita circular, o raio,  $R$ ) é diretamente proporcional ao quadrado do período,  $T$ , do planeta, ou seja,  $\frac{R^3}{T^2} = K$ .

- **Lei de Newton da Gravitação Universal:**  $F_g = G \frac{m_A m_B}{r^2}$ ; as forças gravíticas são sempre atrativas e têm origem na massa dos corpos.

- **Campo gravítico,  $\vec{\mathcal{G}}$ :** define-se num ponto; tem origem na massa de um corpo,  $M$ , dependendo a sua intensidade dessa massa e da sua distância,  $r$ , ao ponto onde se define:  $\mathcal{G} = G \frac{M}{r^2}$ ; manifesta-se pela força gravítica exercida sobre uma partícula, de massa  $m$ , colocada no ponto:  $\vec{F}_g = m\vec{\mathcal{G}}$ ; é um vetor que aponta sempre para a massa  $M$  que cria o campo gravítico;  $\vec{\mathcal{G}}$  coincide com a aceleração gravítica  $\vec{g}$ . Unidade SI: newton por quilograma ( $\text{N kg}^{-1}$ ).

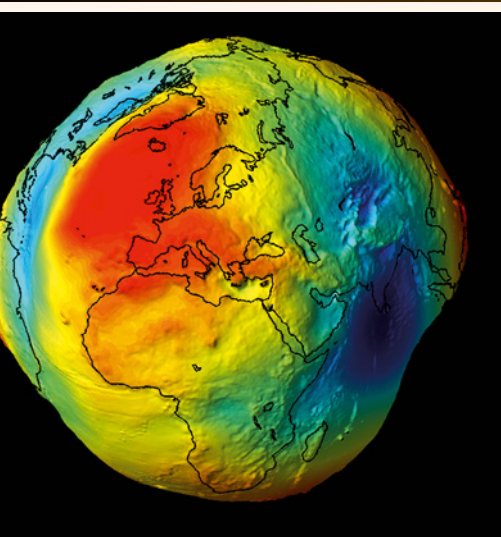
- **Linhas de campo gravítico:** são tangentes ao vetor campo gravítico e têm o seu sentido; nunca se cruzam; têm maior densidade onde o campo for mais intenso.

- **Energia potencial gravítica de interação entre duas partículas:**  $E_{pg} = -G \frac{Mm}{r}$ ; depende da massa das partículas e da distância entre elas; é sempre negativa e aumenta quando essa distância aumenta (é nula quando as partículas estiverem infinitamente afastadas).

- **Campo gravítico:** é um campo conservativo, pois a força gravítica é conservativa, pelo que,  $W_{\vec{F}_g} = -\Delta E_{pg}$ , e a energia mecânica conserva-se, ou seja,  $E_m = \frac{1}{2} mv^2 - G \frac{Mm}{r} = \text{constante}$ .

- **Velocidade de escape:** velocidade mínima de lançamento de um corpo à superfície de um planeta para que ele escape da sua atração gravítica; depende da massa,  $M$ , e do raio,  $R$ , do planeta:  $v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ . A existência de atmosfera num planeta depende do valor da velocidade de escape nesse planeta.

- **Velocidade de um satélite em órbita circular:**  $v_{\text{órbita}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ ; depende da massa,  $M$ , do planeta e do raio,  $r$ , da órbita; não depende da massa do satélite.





## QUESTÕES

### Nota

Na resolução das questões, considere os seguintes valores:

$$g = 10 \text{ m s}^{-2} \text{ e } G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}.$$

### 2.1.1 Leis de Kepler

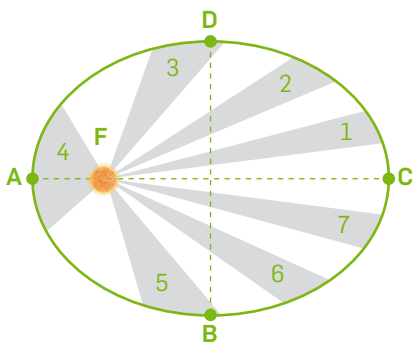
1. Johannes Kepler descobriu um conjunto de regularidades no movimento dos planetas do Sistema Solar que hoje são conhecidas por Leis de Kepler.

A Primeira Lei de Kepler, ou Lei das Órbitas, diz respeito ao tipo de trajetória de um planeta em redor do Sol, bem como à posição que este ocupa.

- Que tipo de órbita têm os planetas e que posição ocupa o Sol?
- Indique o significado da seguinte afirmação: «A excentricidade das órbitas dos oito planetas do Sistema Solar é muito pequena.»

2. A figura representa uma órbita elíptica de um cometa em torno do Sol, que se encontra num dos focos da elipse, **F**.

O cometa é representado em quatro posições, **A**, **B**, **C** e **D**, coincidentes com as extremidades dos eixos da elipse. As regiões sombreadas, numeradas de 1 a 7, são áreas «varridas» pelo segmento de reta que une o Sol ao cometa em intervalos de tempos iguais.



- Relacione as áreas das regiões sombreadas.
- Justifique, com base na Segunda Lei de Kepler, o facto de o movimento do cometa não ser uniforme.
- Conclua, justificando, em que parte da elipse, das sete regiões numeradas, é menor a velocidade média do cometa.

3. Quando a Terra está mais próxima do Sol (no chamado periélio) tem maior velocidade do que quando está mais longe (no chamado afélio). Justifique esta propriedade com base nas Leis de Kepler.

4. A distância média de Júpiter ao Sol é 5,22 vezes a distância da Terra ao Sol. Considere a distância média de Júpiter ao Sol aproximadamente igual ao semieixo maior da elipse descrita por este planeta em torno do Sol. Qual é, em anos, o período de translação de Júpiter?

5. Os maiores satélites naturais de Júpiter – Europa, Ganimedes, Io e Calisto – foram descobertos por Galileu Galilei sendo, por isso, designados por luas galileanas. Das luas galileanas, Io é a que tem menor período orbital, 1,77 d, e Calisto a que tem maior, 16,69 d. Admitindo órbitas circulares, Io com raio  $r_{Io}$  e Calisto com raio  $r_{Calisto}$ , pode concluir-se que o quociente dos raios das suas órbitas,  $\frac{r_{Calisto}}{r_{Io}}$ , é cerca de:

- |          |          |
|----------|----------|
| (A) 4,46 | (C) 29,0 |
| (B) 9,43 | (D) 88,9 |

### 2.1.2 Lei de Newton da Gravitação Universal

6. A Lei da Gravitação Universal é uma das maiores conquistas da ciência.

- Porque é tão importante essa lei?
- Quem a descobriu e como o fez?

7. O cientista britânico Henry Cavendish realizou, em 1797-1798, uma famosa experiência que permitiu determinar a massa da Terra,  $m_T$ .

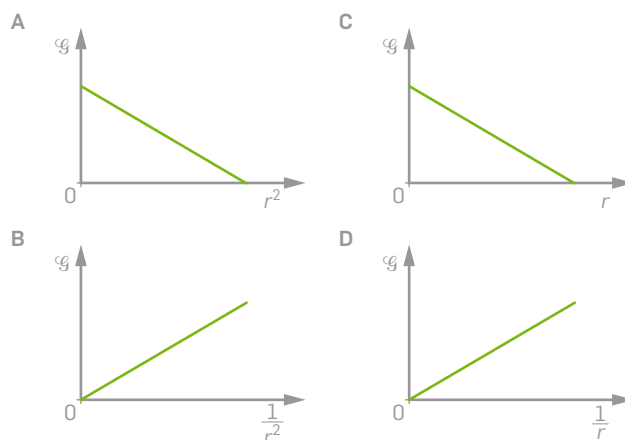
- Explique, sucintamente, como é que Cavendish determinou a constante de gravitação universal.
- Obtenha uma expressão algébrica para a massa da Terra,  $m_T$ , em função do módulo da aceleração da gravidade à superfície da Terra,  $g$ , do raio da Terra,  $R_T$ , e da constante de gravitação universal,  $G$ .
- O valor da constante de gravitação universal obtido por Cavendish foi  $6,64 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ . Qual foi o erro relativo, expresso em percentagem, cometido por Cavendish?

8. Dois satélites, **A** e **B**, orbitam a Terra em trajetórias circulares com velocidades de módulos  $v_A$  e  $v_B$ , respetivamente. O satélite **A** orbita a Terra a uma altitude  $h_A = 2R_T$  e o satélite **B** a uma altitude  $h_B = 4R_T$ , onde  $R_T$  é o raio da Terra.
- a) Justifique, sem efetuar cálculos, a seguinte afirmação: «As acelerações destes satélites são menores do que  $10 \text{ m s}^{-2}$ .»
- b) Relacione os módulos das acelerações dos dois satélites.
- c) Qual é o quociente dos módulos da velocidade destes satélites,  $\frac{v_A}{v_B}$ ?
- (A)  $\sqrt{2}$                       (C)  $\sqrt{\frac{5}{3}}$
- (B) 2                              (D)  $\frac{5}{3}$
- d) Mostre, a partir da Lei da Gravitação Universal e da Segunda Lei de Newton, que o quadrado da velocidade angular orbital de um satélite da Terra é inversamente proporcional ao cubo do raio da sua órbita.

### 2.1.3 Campo gravítico

9. Duas estrelas de neutrões iguais, de massa  $3,0 \times 10^{30} \text{ kg}$  e raio  $8,0 \times 10^3 \text{ m}$ , estão separadas de  $1,0 \times 10^{10} \text{ m}$ .
- a) Caracterize as forças de atração gravítica a que estão sujeitas.
- b) Determine o módulo do campo gravítico à superfície das estrelas de neutrões.
10. Considere um satélite geoestacionário. A massa da Terra é  $5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$  e o seu raio  $6,4 \times 10^6 \text{ m}$ .
- a) Determine a altitude desse satélite.
- b) Qual é o módulo do campo gravítico a essa altitude?
- c) Que força atua sobre um corpo de  $50 \text{ kg}$  aí colocado?

11. O campo gravítico na Lua é um sexto do da Terra e o raio da Lua é  $0,27$  vezes o raio da Terra. Determine a relação entre as massas volúmicas médias da Terra e da Lua.
12. Qual dos gráficos traduz corretamente a dependência entre o módulo do campo gravítico,  $g$ , criado por uma massa pontual num ponto **P**, e a distância  $r$  de **P** à massa pontual?

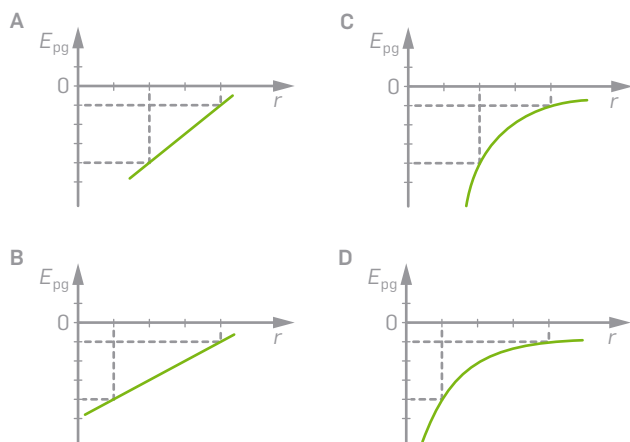


13. O planeta Júpiter, de raio  $7,15 \times 10^7 \text{ m}$  e massa  $1,90 \times 10^{27} \text{ kg}$ , apresenta um período de translação em torno do Sol igual a  $11,86$  anos. O seu centro encontra-se a uma distância média do centro do Sol igual a  $7,78 \times 10^{11} \text{ m}$ . Despreze a excentricidade da órbita de Júpiter.
- a) Determine o módulo do campo gravítico:
- i) de Júpiter, num ponto à sua «superfície».
- ii) do Sol, num ponto da órbita de Júpiter.
- b) Se o planeta Júpiter tivesse a mesma massa e a mesma órbita, mas fosse mais denso, qual das seguintes grandezas se alteraria?
- (A) Aceleração centrípeta no movimento de translação de Júpiter.
- (B) Velocidade orbital de Júpiter.
- (C) Campo gravítico à «superfície» de Júpiter.
- (D) Força gravítica exercida sobre Júpiter pelo Sol.

14. Procure uma simulação na internet que permita visualizar o tipo de trajetórias possíveis de um corpo sujeito à gravitação do Sol, consoante a velocidade inicial comunicada ao corpo. Verifique que há trajetórias circulares ou elípticas e que, se a velocidade for demasiado elevada, as trajetórias deixarão de ser fechadas, passando a ser abertas (parábolas ou hipérbolas).

### 2.1.4 Energia potencial gravítica; conservação da energia no campo gravítico

15. A energia potencial gravítica de um corpo de massa  $m$  sujeito à força gravítica de um planeta de massa  $M$  depende da distância  $r$  entre o corpo e o centro do planeta. Qual dos gráficos representa corretamente a energia potencial gravítica do sistema *corpo-planeta*,  $E_{pg}$ , em função da distância,  $r$ ? Considere que  $r$  é maior do que o raio do planeta.



16. Um corpo, de massa  $m$ , a uma determinada distância  $r$  do centro de um planeta de massa  $M$ , fica sujeito ao campo gravítico desse planeta,  $\vec{g}$ , e tem uma determinada velocidade de escape,  $v_e$ . A velocidade de escape,  $v_e$ , não depende de:

- (A)  $m$       (B)  $r$       (C)  $M$       (D)  $\vec{g}$

17. A atmosfera da Lua é tão rarefeita que, se a compararmos com a atmosfera da Terra, podemos considerar que se trata de vácuo. O gás mais abundante dessa atmosfera é o argón, cuja massa molar é  $40 \text{ g mol}^{-1}$  (a constante de Avogadro é  $6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ). A temperatura da Lua oscila consoante a região é, ou não, iluminada pelo Sol, mas a face iluminada pode atingir 400 K. À temperatura  $T$ , a energia cinética média,  $E_{c, m}$ , dos átomos de argón é, em unidades SI, dada pela expressão:

$$E_{c, m} = 2,07 \times 10^{-23} T \quad (T \text{ em kelvin})$$

A uma determinada temperatura, nem todos os átomos têm a mesma velocidade e os mais rápidos podem escapar para o espaço se a sua velocidade for maior do que a velocidade de escape.

Verifica-se que a maioria dos átomos se escapará da atmosfera de um planeta se a velocidade «média» for maior do que 15% da velocidade de escape.

A massa da Lua é  $7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$  e o seu raio  $1,74 \times 10^6 \text{ m}$ . Tendo em conta a informação anterior, fundamente o facto de a atmosfera na Lua ser praticamente inexistente.

18. Represente graficamente, em função da distância do centro da Terra a um satélite, a energia cinética desse satélite, em órbita circular, assim como as energias potencial gravítica e mecânica do sistema *satélite-Terra*.
19. No romance de Júlio Verne, «Da Terra à Lua» (1865), três aventureiros são disparados por um canhão em direção à Lua. Considere desprezável a resistência do ar. Determine uma expressão algébrica, em função da constante de gravitação universal  $G$ , da massa da Terra,  $m_T$ , e do seu raio,  $R_T$ , para o módulo da velocidade,  $v_0$ , com que deveriam ser disparados para:
- atingirem uma altitude igual ao raio da Terra.
  - ficarem em órbita a essa altitude.
  - escaparem da ação do campo gravítico terrestre.

## Questões globais

- 20.** Suponha que o centro de massa da Lua descreve um movimento circular uniforme em torno da Terra. Nestas condições, pode afirmar-se que:
- (A) O momento linear é constante.
  - (B) A aceleração e a energia cinética são constantes.
  - (C) O campo gravítico é nulo num ponto equidistante dos centros de massa da Terra e da Lua.
  - (D) A energia potencial gravítica do sistema *Lua-Terra* é constante.
- 21.** Um projétil é lançado verticalmente da superfície de um planeta de massa  $M$  e raio  $R$  com velocidade de módulo  $\sqrt{\frac{GM}{R}}$ . Determine a distância máxima ao centro do planeta, em função de  $R$ , a que ele subirá.
- 22.** Um corpo orbita a Terra, com movimento circular uniforme, a uma altitude igual ao raio da Terra.
- a) Que trabalho realiza a força gravítica quando o corpo descreve uma órbita completa?
  - b) Se o corpo passasse a mover-se numa órbita a uma altitude três vezes maior, que alteração existiria:
    - i) na força gravítica que atuaria sobre ele?
    - ii) na sua velocidade orbital?
    - iii) no seu período?
    - iv) na energia potencial gravítica do sistema *corpo-Terra*?
- 23.** Um corpo orbita a uma altitude igual a dois raios terrestres. Determine uma expressão algébrica, em função da constante de gravitação universal  $G$ , da massa da Terra,  $m_T$ , do seu raio,  $R_T$ , e da massa do corpo,  $m$ :
- a) para a energia cinética que é necessário fornecer ao corpo, à superfície da Terra, de modo que ele fique nessa órbita.
  - b) para o trabalho realizado pela força gravítica quando o corpo passa dessa órbita para outra cuja altitude é apenas um raio terrestre.
- 24.** Marte tem dois satélites: Fobos, que se move numa órbita circular de raio 9377 km e tem um período de 7,66 h, e Deimos, que tem órbita circular de raio 23 460 km. Determine o período de Deimos.
- 25.** O CoRoT-7b é um exoplaneta rochoso, uma espécie de «super-Terra». Estima-se que a sua massa seja cinco vezes a massa da Terra e que o seu raio seja 60% maior do que o raio terrestre. Estabeleça uma relação numérica entre:
- a) o módulo do campo gravítico na superfície da Terra e o módulo do campo gravítico na superfície do CoRoT-7b.
  - b) a energia potencial do sistema *corpo-Terra* e a energia potencial do sistema *corpo-CoRoT-7b* quando o mesmo corpo é colocado à superfície de cada planeta.
  - c) o módulo da velocidade de escape na Terra e o módulo da velocidade de escape no CoRoT-7b.
- 26.** Um satélite de 750 kg encontra-se, inicialmente, em órbita circular em torno da Terra ( $m_T = 5,97 \times 10^{24}$  kg e  $R_T = 6,37 \times 10^3$  km) a uma altitude de 400 km. Devido às forças de resistência do ar, acaba por cair na Terra com velocidade  $3,0 \text{ km s}^{-1}$ .
- a) Justifique, sem efetuar cálculos, a seguinte afirmação: «A energia mecânica inicial do sistema *satélite-Terra* é negativa.»
  - b) Determine a energia dissipada durante a queda (considere o satélite uma partícula).
- 27.** Faça uma pesquisa sobre o modo como são lançados os satélites. Apresente os resultados à turma, recorrendo às tecnologias de informação e comunicação.



# 2.2 CAMPO ELÉTRICO

---

**2.2.1** Interações entre cargas elétricas e Lei de Coulomb

**2.2.2** Campo elétrico

**2.2.3** Condutor em equilíbrio eletrostático.  
Campo elétrico à superfície e no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático.  
Efeito das pontas

**2.2.4** Energia potencial elétrica. Potencial elétrico e superfícies equipotenciais

**2.2.5** Condensadores.  
Descarga de um condensador num circuito  $RC$

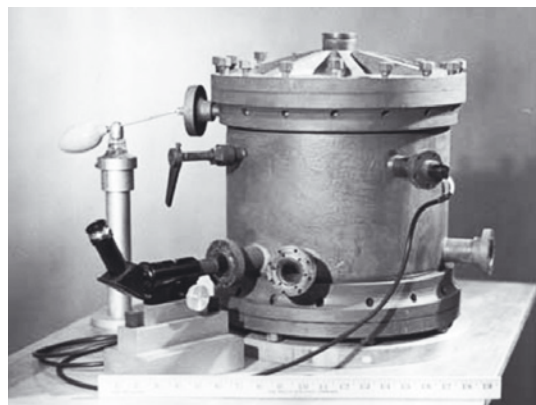
**AL 2.1** Campo elétrico e superfícies equipotenciais

**AL 2.2** Construção de um relógio logarítmico

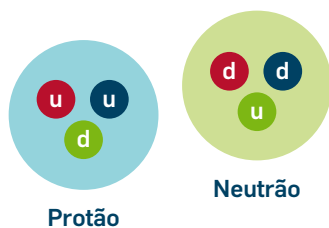


**Fig. 1** Um pedaço de âmbar friccionado numa pele atrai corpos leves, como uma pena, tal como um pente previamente friccionado atrai pequenos pedaços de papel.

**Fig. 2** Robert Millikan e o aparelho que serviu para realizar a sua experiência da gota de óleo. Millikan recebeu o Prémio Nobel da Física em 1923.



**Carga elétrica:** em módulo é um múltiplo da carga elementar,  $e$ .



**Fig. 3** Estrutura do protão, com dois *quarks up* ( $u$ , carga  $\frac{2}{3}e$ ), e um *quark down* ( $d$ , carga  $-\frac{1}{3}e$ ), e de um neutrão com um *quark up* e dois *quarks down*.

**Princípio da Conservação da Carga Elétrica:** a carga elétrica de um sistema isolado (soma de todas as cargas) é constante.

A descrição mais antiga de fenómenos elétricos deve-se ao filósofo grego Tales, que viveu em Mileto, na atual Turquia, nos séculos VII e VI a.C. Tales observou que, quando friccionava um pedaço de uma resina fósil, o âmbar, numa pele animal, ela atraía pequenos corpos leves como cabelos, tufo de algodão ou penas (**Fig. 1**). Hoje observa-se o mesmo fenómeno com objetos de uso corrente, como um pente ou uma esferográfica: se esfregarmos um destes objetos numa peça de lã ou de seda, ele atrairá pequenos pedaços de papel ou de esferovite (**Fig. 1**).

Sabemos hoje que a **carga elétrica** de um corpo se deve à troca, com outros corpos, de partículas de carga negativa, os eletrões, que são partículas fundamentais da matéria. A sua descoberta foi feita pelo físico inglês Joseph John Thomson em 1897. A carga elétrica do eletrão (designada por  $-e$ ) foi determinada em 1909, numa experiência famosa, pelo físico norte-americano Robert Millikan (**Fig. 2**). Millikan mostrou que a carga elétrica de uma pequena gota de óleo é sempre múltipla do módulo da carga do eletrão, ou seja, a gota de óleo pode receber ou ceder carga elétrica, mas sempre de forma descontínua.

A unidade de carga elétrica no SI é o coulomb (C). A carga de um protão, simétrica da do eletrão,  $e = 1,602 \times 10^{-19}$  C, é a **carga elementar**.

Ao contrário do eletrão, um protão não é uma «partícula elementar» pois é constituída por três partículas: os *quarks*. Os *quarks* têm cargas fracionárias ( $-\frac{1}{3}e, +\frac{2}{3}e$ ) mas, até hoje, nunca foram observados isolados. Por isso, a carga livre que existe na natureza, nos objetos carregados, é múltipla da carga elementar. O neutrão também é constituído por três *quarks* (**Fig. 3**). A carga do protão é  $2 \times \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e = e$  e a carga do neutrão é  $2 \times \left(-\frac{1}{3}e\right) + \frac{2}{3}e = 0$  (**Fig. 3**).

A conservação da carga elétrica é um facto experimental. O **Princípio da Conservação da Carga Elétrica** afirma que a carga elétrica de um sistema isolado (soma algébrica das cargas positivas e negativas) é constante. Mas esse princípio não proíbe a criação de cargas elétricas num sistema isolado: se for criada uma carga positiva, deverá aparecer no sistema uma carga negativa, simétrica da primeira. Por exemplo, um fóton (partícula de luz que é neutra) de alta energia pode, em certas condições, criar um par de partículas com cargas simétricas, como um eletrão e um antieletrão (ou positrão).

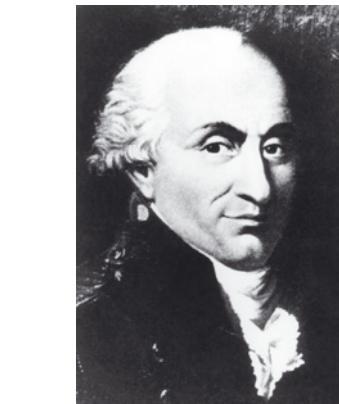
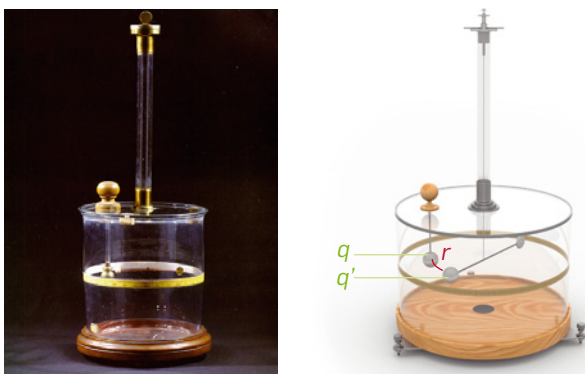


## 2.2.1 Interações entre cargas elétricas e Lei de Coulomb

No século XVIII estava já confirmada a existência de dois tipos de carga elétrica, que viriam a ser designados de positiva e negativa. Sabia-se também que cargas do mesmo tipo se repeliam e cargas de tipos diferentes se atraíam.

No final desse século, o físico francês Charles Coulomb (**Fig. 4**) determinou a dependência da força elétrica entre duas cargas elétricas, consideradas pontuais e em repouso, com os módulos dessas cargas e a distância entre elas.

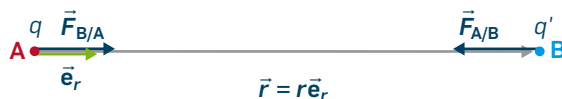
Utilizando uma balança de torção (**Fig. 5**), semelhante à que Cavendish usaria para verificar a Lei da Gravitação Universal, Coulomb mostrou que a intensidade da força de atração ou de repulsão entre dois pequenos corpos carregados com cargas  $q$  e  $q'$  é proporcional ao módulo dessas cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas,  $r$ , afirmação que passou a ser conhecida por **Lei de Coulomb**.



**Fig. 4** Charles Coulomb, físico francês do século XVIII, formulou a lei de interação entre cargas elétricas, que hoje tem o seu nome.

**Fig. 5** Balança de torção de Coulomb (Museu da Ciência da Universidade de Coimbra) e respetivo esquema.

Consideremos duas cargas pontuais de sinais opostos,  $q$  e  $q'$ , a uma distância  $r$ , e as forças elétricas entre elas, que constituem um par ação-reação (**Fig. 6**).



**Fig. 6** As forças entre duas cargas pontuais,  $\vec{F}_{A/B}$  e  $\vec{F}_{B/A}$ , formam um par ação-reação.

Se a posição da carga  $q'$ , colocada em **B**, em relação à carga  $q$ , colocada em **A**, for definida pelo vetor  $\vec{r}$ , a força que  $q$  exerce sobre  $q'$  será dada por

$$\vec{F}_{A/B} = k \frac{qq'}{r^2} \vec{e}_r$$

onde  $\vec{e}_r$  é o vetor unitário que aponta de **A** para **B** e  $k$  uma constante.

A sua intensidade é dada pela expressão

$$F_{A/B} = F_{B/A} = k \frac{|q||q'|}{r^2}$$

**Permitividade elétrica,  $\epsilon$ :** característica do meio; tem o valor mínimo no vácuo.

A permitividade elétrica relativa,  $\epsilon_r$ , indica quantas vezes a permitividade de um meio material é superior à do vácuo.

Meio	$\epsilon / \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$	$\epsilon_r / \epsilon_0$
Vácuo	$8,8542 \times 10^{-12}$	1,0000
Ar	$8,8595 \times 10^{-12}$	1,0005
Polietileno	$20 \times 10^{-12}$	2,26
Etanol (25 °C)	$2,2 \times 10^{-10}$	24,9
Água (25 °C)	$7,1 \times 10^{-10}$	80,2

**Tab. 1** Permitividade elétrica e permitividade elétrica relativa de alguns meios.

Verifica-se experimentalmente que a constante de proporcionalidade,  $k$ , depende do meio onde se encontram as cargas. No vácuo  $k = 9,0 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2}$ , sendo no ar aproximadamente igual.

No SI, em vez de  $k$  usa-se muitas vezes a **permitividade elétrica,  $\epsilon$** , uma característica do meio que é inversamente proporcional a  $k$ :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

A unidade SI de permitividade elétrica é o farad por metro ( $\text{F m}^{-1}$ ), que é equivalente a  $\text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$  (veremos que o farad é a unidade SI da grandeza física capacidade). A permitividade elétrica dos meios materiais é sempre superior à do vácuo, que é  $\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ . Por isso, a constante na Lei de Coulomb,  $k$ , tem nesses meios valores inferiores ao do vácuo, o que significa que as mesmas cargas colocadas à mesma distância, num meio e no vácuo, ficam sujeitas a forças mais fracas no primeiro caso.

Para comparar facilmente as permitividades elétricas de um meio e do vácuo, define-se a permitividade elétrica relativa,  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  (**Tab. 1**).

As conclusões anteriores são descritas pela Lei de Coulomb:

#### Lei de Coulomb

- A intensidade das forças de atração ou de repulsão entre duas cargas elétricas,  $q$  e  $q'$ , à distância  $r$  uma da outra, é dada por

$$F = k \frac{|q| |q'|}{r^2}$$

$\text{N}$        $\text{C}$     $\text{C}$   
 $\text{N m}^2 \text{C}^{-2}$     $\text{m}$

É diretamente proporcional aos módulos das cargas (para a mesma distância) e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas (para as mesmas cargas).

- A constante de proporcionalidade,  $k$ , depende do meio. No vácuo (e, aproximadamente, no ar)  $k = 9,0 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2}$ .



**Fig. 7** Dispositivo para medir a força elétrica entre duas pequenas esferas com cargas simétricas.

A **Fig. 7** mostra um dispositivo moderno para medir a força elétrica entre duas pequenas esferas com cargas simétricas.

Note-se que o átomo existe devido às forças elétricas de atração entre elétrons e núcleo. No núcleo, as forças elétricas de repulsão entre prótons são muito intensas, pois a distância média entre eles é muito pequena. Contudo, os núcleos existem porque, a esta distância da ordem de  $10^{-15} \text{ m}$ , estão também presentes as forças nucleares fortes. Estas são fortemente atrativas, sendo a sua intensidade muito superior à das forças elétricas de repulsão, o que assegura a coesão nuclear.

Quando comparamos as leis de Coulomb e de Newton, deparamos com semelhanças entre as duas. A **Fig. 8** resume essas semelhanças mas também as diferenças entre a Lei de Coulomb e a Lei de Newton da Gravitação Universal.



	Força gravítica	Força elétrica
<b>Diferenças</b>	Tem origem na massa	Tem origem na carga elétrica
	Não depende do meio	Depende da permitividade elétrica do meio
	É sempre atrativa	Pode ser atrativa ou repulsiva
<b>Semelhanças</b>	Varia inversamente com o quadrado da distância entre as massas	Varia inversamente com o quadrado da distância entre as cargas
	É diretamente proporcional às massas	É diretamente proporcional ao módulo das cargas

As semelhanças entre as duas leis levaram alguns físicos a pensar que a força gravítica e a força elétrica obedeceriam a um princípio comum, isto é, podiam ser «unificadas». Faraday estava convencido de que assim era e, por isso, levou a cabo experiências com vista a gerar eletricidade a partir da queda de corpos. Não teve êxito. Também Einstein passou muitos anos da sua vida à procura de uma **teoria unificada** que englobasse a gravitação e o eletromagnetismo. Os seus trabalhos foram inconclusivos. Contudo, eles abriram caminho para que outros continuassem essa busca da unificação. A questão ainda hoje não está resolvida: é um assunto de investigação atual.

**Fig 8** Diferenças e semelhanças entre as forças gravítica e elétrica.

**Teoria unificada:** apesar das semelhanças entre as forças elétricas e gravíticas, Faraday e Einstein tentaram, sem sucesso, construir uma teoria que as unificasse, uma questão ainda hoje não resolvida.

### Questão resolvida 1

Num átomo de hidrogénio, a distância média entre o protão e o eletrão é  $5,3 \times 10^{-11}$  m. As massas do protão e do eletrão são, respetivamente,  $1,7 \times 10^{-27}$  kg e  $9,1 \times 10^{-31}$  kg e o

módulo da carga destas partículas é  $1,6 \times 10^{-19}$  C. Compare as forças de atração elétrica e gravítica entre um protão e um eletrão no átomo de hidrogénio. Que conclusão tira?



Pela Lei da Gravitação Universal, vem:

$$F_g = G \frac{m_p m_e}{r^2} = 6,7 \times 10^{-11} \frac{9,1 \times 10^{-31} \times 1,7 \times 10^{-27}}{(5,3 \times 10^{-11})^2} = 3,69 \times 10^{-47} \text{ N}$$

Pela Lei de Coulomb, vem

$$F_e = k \frac{e^2}{r^2} = 9,0 \times 10^9 \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{(5,3 \times 10^{-11})^2} = 8,20 \times 10^{-8} \text{ N}$$

Conclui-se que a força elétrica é

$$\frac{8,20 \times 10^{-8}}{3,69 \times 10^{-47}} = 2,2 \times 10^{39}$$

vezes mais intensa do que a força gravítica!

No átomo de hidrogénio (e em todos os átomos), a força gravítica é desprezável face à força elétrica, podendo ser ignorada quando se estuda a estrutura atómica da matéria.



### Questão resolvida 2

A permitividade elétrica da água é cerca de 80 vezes superior à do ar. Com base neste dado, indique por que

razão o sal de cozinha (NaCl) se dissolve facilmente em água.



O sal de cozinha é um composto iónico, isto é, formado por iões de cargas contrárias. A coesão dos cristais de NaCl deve-se à forte interação elétrica entre os iões positivos ( $\text{Na}^+$ ) e negativos ( $\text{Cl}^-$ ). Como a permitividade elétrica da água,  $\epsilon$ , é cerca de 80 vezes superior à do ar,  $\epsilon_0$ , e

a constante  $k$  é inversamente proporcional a  $\epsilon$ , conclui-se que a interação entre iões numa solução aquosa de NaCl é cerca de 80 vezes mais fraca do que no ar, o que facilita a dissolução dos cristais de NaCl na água.



## 2.2.2 Campo elétrico

Tal como para a interação gravítica, também é útil interpretar a força elétrica recorrendo ao conceito de campo. Neste caso falamos de campo elétrico.

Quando colocamos duas cargas elétricas próximas uma da outra, estas exercem forças à distância uma sobre a outra. Tal como definimos o campo gravítico num ponto dividindo a força gravítica pela massa que colocamos nesse ponto,  $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$ , também definimos campo elétrico num ponto dividindo a força elétrica que se exerce sobre uma carga  $q$ , colocada nesse ponto, por essa carga (força por unidade de carga):

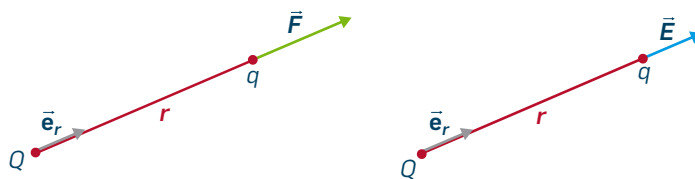
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

No SI, o campo elétrico mede-se em volt por metro ( $\text{V m}^{-1}$ ). O newton por coulomb ( $\text{N C}^{-1}$ ), força por unidade de carga, é uma unidade SI equivalente.

Um campo elétrico pode ser identificado pela força elétrica exercida sobre uma carga colocada num ponto, uma vez que  $\vec{F} = q\vec{E}$  (Fig. 9). Vamos obter uma expressão para o campo elétrico, supondo a interação entre duas cargas pontuais  $Q$  e  $q$ , positivas, à distância  $r$  uma da outra. A carga  $Q$  exerce sobre a carga  $q$  uma força descrita pela Lei de Coulomb

$$\vec{F} = k \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r$$

onde  $\vec{e}_r$  é o vetor unitário que aponta de  $Q$  para  $q$  (Fig. 10, à esquerda).

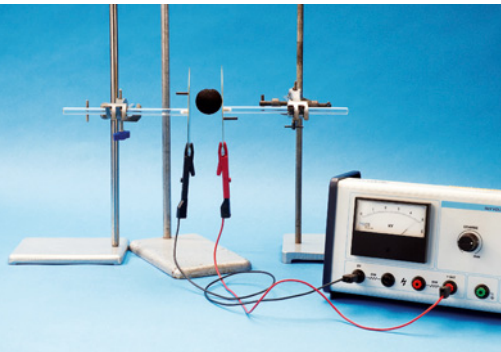


**Fig. 10** Força elétrica que a partícula de carga  $Q$ , positiva, exerce sobre a partícula de carga  $q$ , positiva (à esquerda). Campo elétrico, no ponto onde se situa a carga  $q$ , criado pela partícula de carga  $Q$  (à direita).

Qual é o campo elétrico criado por  $Q$  no ponto onde está a carga  $q$ ? Aplicando a definição de campo elétrico,  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ , obtém-se (Fig. 10, à direita):

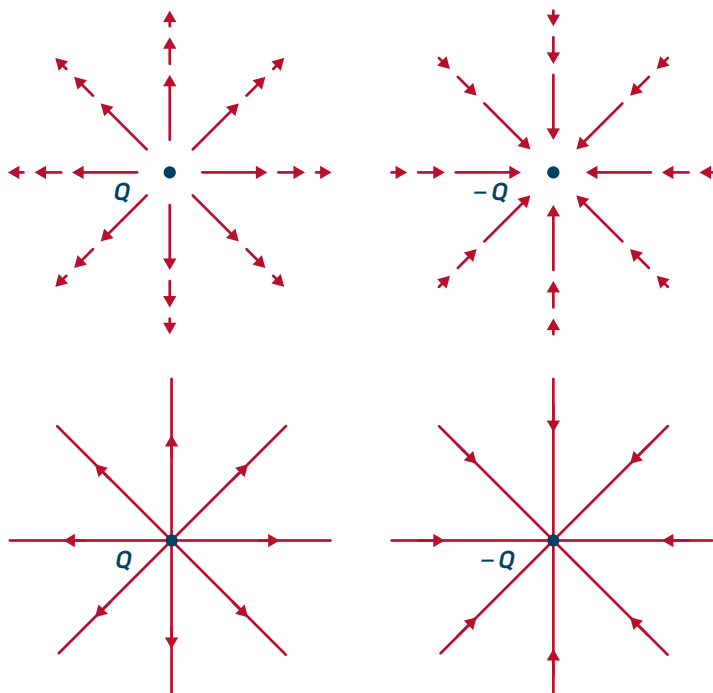
$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

Esta expressão permite concluir que, se a carga  $Q$  for positiva,  $\vec{E}$  apontará na direção e sentido de  $\vec{e}_r$ , ou seja da carga para o ponto onde se define o campo. Se a carga  $Q$  for negativa,  $\vec{E}$  apontará no sentido contrário.



**Fig. 9** Uma esfera eletrizada é atraída para uma de duas placas metálicas devido a um campo elétrico entre elas.

Podemos representar graficamente o campo elétrico criado por uma carga pontual (**Fig. 11**): os vetores campo elétrico e as linhas de campo elétrico divergem da carga que cria o campo se esta for positiva, e convergem para a carga se esta for negativa.



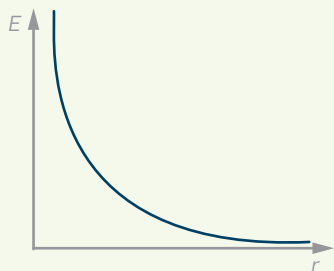
**Fig. 11** Campos criados por uma carga pontual positiva e por uma carga pontual negativa (em cima) e respectivas linhas de campo elétrico (em baixo).

Caracterizemos, então, o campo elétrico:

### Campo elétrico

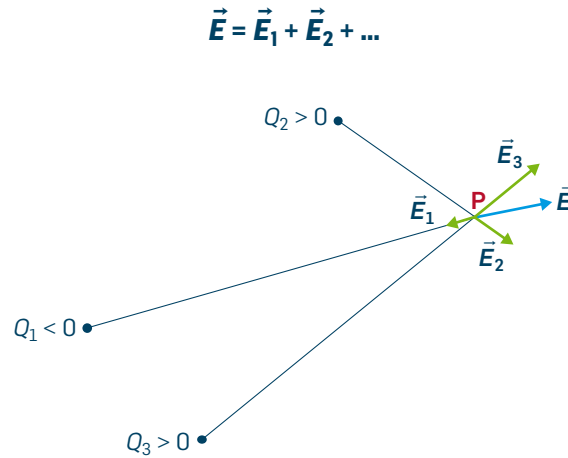
- É definido num ponto: é a força elétrica por unidade de carga ( $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ ).
- O módulo do campo elétrico criado por uma partícula de carga  $Q$  num ponto a uma distância  $r$  dessa carga é

$$N C^{-1} \quad E = k \frac{|Q| C}{r^2 m} \quad N m^2 C^{-2}$$



- Depende da carga que cria o campo, da sua distância ao ponto e do meio onde se encontra a carga.
- É diretamente proporcional a essa carga (no mesmo ponto) e inversamente proporcional ao quadrado da distância da carga ao ponto (para uma carga constante), no mesmo meio.
- Manifesta-se pela força elétrica exercida sobre partículas com carga,  $q$ , colocadas no ponto:  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Os vetores  $\vec{F}$  e  $\vec{E}$  têm a mesma direção; têm o mesmo sentido se  $q > 0$  e sentidos opostos se  $q < 0$ .
- O vetor campo elétrico criado por uma partícula de carga  $Q$  aponta para essa carga se  $Q < 0$ , ou em sentido contrário se  $Q > 0$ .
- As linhas de campo elétrico divergem das cargas positivas e convergem para as cargas negativas.

Verifica-se experimentalmente o **Princípio da Sobreposição** do campo elétrico: o campo elétrico criado por várias cargas pontuais ( $Q_1, Q_2, \dots$ ) é a soma vetorial dos campos criados separadamente por cada uma das cargas individuais (**Fig. 12**):

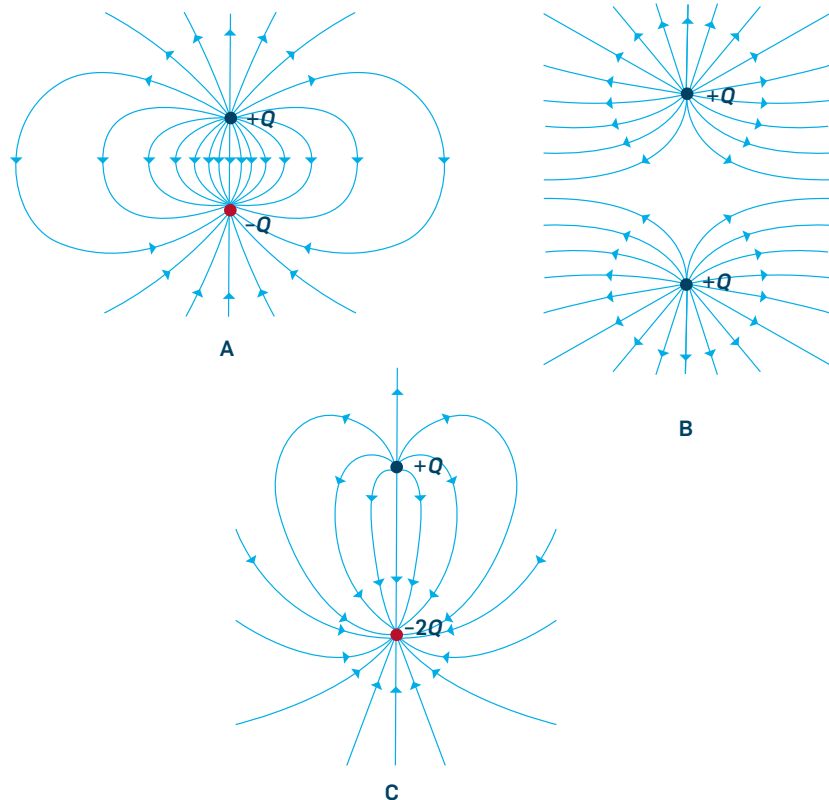


**Fig. 12** O campo criado pelas cargas  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  no ponto  $P$  é a soma vetorial dos campos  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$  e  $\vec{E}_3$  criados separadamente por cada uma delas.

**Linhas de campo:** divergem sempre das cargas positivas e convergem sempre para as cargas negativas.

A **Fig. 13** mostra as **linhas de campo** criadas por distribuições de cargas pontuais. Verifica-se que as linhas divergem sempre das cargas positivas e convergem sempre para as cargas negativas.

No caso das cargas serem iguais ou simétricas (caso **A** e **B**), existe simetria na disposição das linhas. O sistema de duas cargas pontuais simétricas, a pequena distância uma da outra, designa-se por dipolo elétrico (caso **A** da **Fig. 13**).



**Fig. 13** Campo criado por duas cargas simétricas (**A**, dipolo elétrico), por duas cargas iguais positivas (**B**) e por duas cargas de sinais contrários e de módulo diferente (**C**).



### Questão resolvida 3



A Terra possui um campo elétrico. Caracterize o campo elétrico num ponto próximo da superfície da Terra onde uma pequena partícula com massa 2,00 g e carga  $-0,100$  mC se mantém em equilíbrio.



A força elétrica,  $\vec{F}$ , deve equilibrar o peso da partícula.

Logo,  $\vec{F} = -\vec{P} = -m\vec{g} = -0,00200 \times (-10 \vec{e}_y) = 2 \times 10^{-2} \vec{e}_y$ , (N), onde  $Oy$  é um eixo vertical, dirigido para cima. O campo elétrico no ponto onde está a partícula é:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{2 \times 10^{-2} \vec{e}_y}{-0,100 \times 10^{-3}} = -2 \times 10^2 \vec{e}_y \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

### Questão resolvida 4



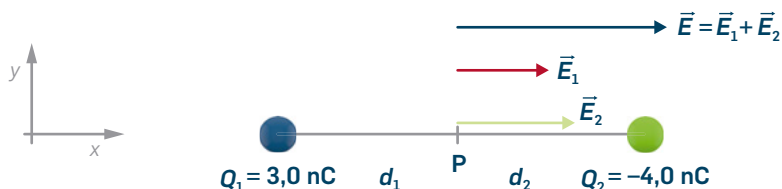
Duas cargas, uma de 3,0 nC e outra de  $-4,0$  nC, são colocadas no ar à distância de 20 cm uma da outra.

- Determine o campo elétrico criado no ponto médio, P, do segmento que as une?
- Caracterize a força que atuaria num eletrão que se encontrasse no ponto P. O módulo da carga do eletrão é  $1,6 \times 10^{-19}$  C.



a) A distribuição de cargas está representada na figura. A carga 3,0 nC cria um campo de módulo  $E_1 = k \frac{|Q_1|}{d_1^2}$  e a carga de  $-4,0$  nC cria um campo de módulo  $E_2 = k \frac{|Q_2|}{d_2^2}$ . Neste caso,  $d_1 = d_2 = d = 0,10$  m. O campo criado no ponto médio P é  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Como os dois vetores têm o mesmo sentido e direção, atendendo ao sistema de eixos definido, vem  $\vec{E} = \frac{k}{d^2} (|Q_1| + |Q_2|) \vec{e}_x$

Substituindo valores, obtemos  $\vec{E} = \frac{9,0 \times 10^9}{0,10^2} (3,0 \times 10^{-9} + 4,0 \times 10^{-9}) \vec{e}_x = 6,3 \times 10^3 \vec{e}_x$  (N).



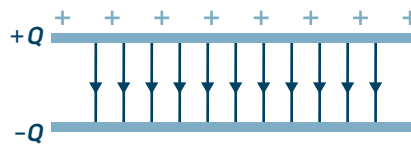
- A força elétrica que atua no eletrão de carga  $q = -1,6 \times 10^{-19}$  C colocado no ponto P onde existe um campo elétrico  $\vec{E} = 6,3 \times 10^3 \vec{e}_x$  (N C<sup>-1</sup>) é:

$$\vec{F} = q\vec{E} = -1,6 \times 10^{-19} \times 6,3 \times 10^3 \vec{e}_x = -1,0 \times 10^{-15} \vec{e}_x \text{ (N)}$$

É exercida sobre o eletrão uma força de  $1,0 \times 10^{-15}$  N na direção do eixo dos  $xx$  e no sentido negativo deste eixo (a força elétrica tem sentido oposto ao campo, visto o eletrão ter carga negativa): esta força resulta do campo que as cargas  $Q_1$  e  $Q_2$  criam no ponto P.

O campo elétrico pode ser **uniforme** numa dada região do espaço: neste caso, tem o mesmo módulo, direção e sentido em todos os pontos.

Para criar um campo uniforme basta eletrizar duas placas metálicas com cargas  $+Q$  e  $-Q$  (distribuídas uniformemente na respetiva placa) e aproximá-las uma da outra, paralelamente, de tal modo que a separação entre elas seja pequena comparada com o seu comprimento e largura. Este dispositivo chama-se **condensador** (Fig. 14).

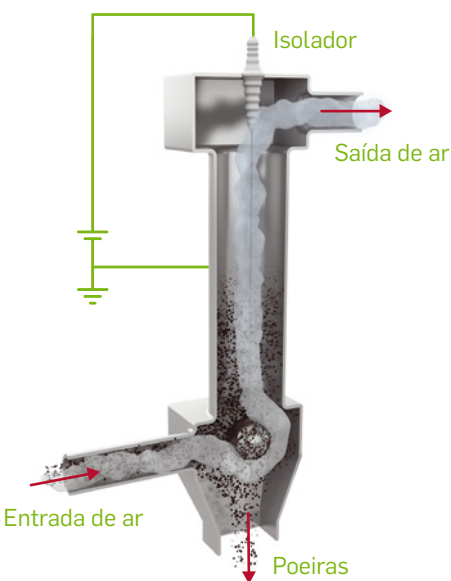
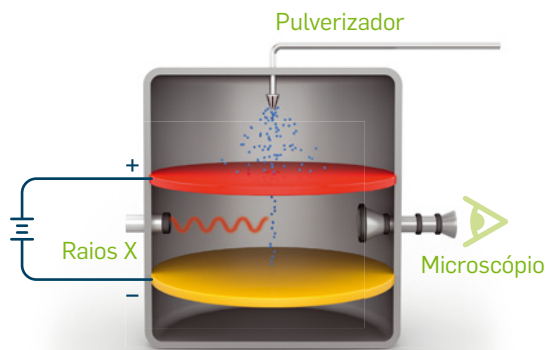


**Fig. 14** Campo elétrico uniforme entre as placas de um condensador.

**Experiência da gota de óleo:** foi realizada por Millikan, permitindo-lhe concluir que a carga elétrica de cada gota era um múltiplo do módulo da carga do eletrão.

A experiência de Millikan, já antes referida – **experiência da gota de óleo** –, consistiu em pulverizar gotas de óleo, de densidade conhecida  $\rho_{\text{óleo}}$ , que entravam através de um orifício numa região de campo elétrico uniforme, de módulo  $E$ , criado por placas planas e paralelas (Fig. 15). Um feixe de raios X ionizava as gotas, eletrizando-as positivamente com carga  $q$ . Era possível criar um campo elétrico tal que a força elétrica sobre uma gota equilibrava o seu peso, a força de impulsão exercida pelo ar, de densidade  $\rho_{\text{ar}}$ , e a força de resistência do ar ao movimento. A partir das velocidades das gotas, Millikan mediu as respetivas cargas. Fez centenas de medições e chegou à conclusão de que as cargas  $q$  medidas eram múltiplas do módulo da carga do eletrão.

**Fig. 15** Esquema da experiência de Millikan.



**Fig. 16** Esquema de precipitador eletrostático usado em fábricas para diminuir a poluição.

As forças elétricas são importantes no dia a dia. A tecnologia de impressão nas fotocopiadoras e nas impressoras *laser* e de jato de tinta tira partido das forças elétricas.

O mesmo ocorre nos precipitadores eletrostáticos usados em chaminés industriais. O fumo, antes de sair para o exterior, passa por um condensador (fio central envolto por uma armadura cilíndrica) onde existe um campo elétrico muito forte (Fig. 16). As poeiras, embora eletricamente neutras, polarizam-se quando passam no condensador e são atraídas (tal como os papelinhos são atraídos por um pente eletrizado) e recolhidas. Por este processo podem recolher-se, numa só fábrica, toneladas de metais e outros resíduos que, de outra forma, contribuiriam para a poluição atmosférica.

## 2.2.3 Condutor em equilíbrio eletrostático. Campo elétrico à superfície e no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático. Efeito das pontas

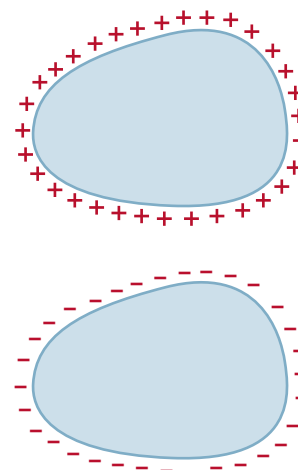
Suponhamos que carregamos negativamente um condutor. Podemos, por exemplo, friccionar em lã uma barra de ebonite (material produzido a partir da borracha) e tocar com a barra no condutor: um certo número de elétrons é transferido da ebonite para o condutor, o qual fica carregado negativamente.

Os elétrons em excesso desse condutor tendem a ficar o mais afastados uns dos outros de modo a minimizar as repulsões entre eles. Por isso, eles distribuem-se na superfície exterior do **condutor**, cessando depois o seu movimento, alcançando o que se designa por **equilíbrio eletrostático**.

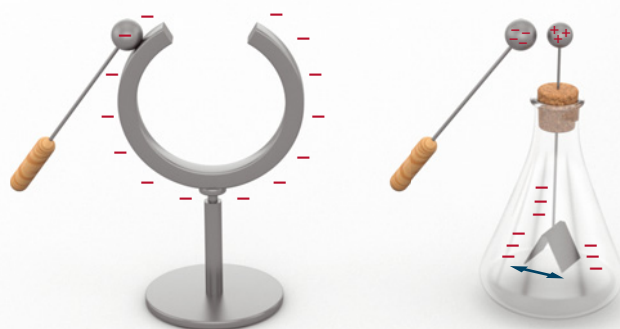
Num condutor em equilíbrio eletrostático, a carga em excesso (qualquer que seja o seu sinal) distribui-se na superfície exterior do condutor (**Fig. 17**).

Podemos verificar experimentalmente esta conclusão. Suponhamos que temos uma taça metálica carregada negativamente como a da **Fig. 18**: se tocarmos com uma esfera metálica (ligada a um cabo isolador) no exterior da taça, alguns elétrons passarão da taça para a esfera, ficando esta eletrizada também negativamente. Se, em seguida, aproximarmos a esfera de um eletroscópio (**Fig. 18**, à direita), sem lhe tocar, os elétrons da esfera repelirão os elétrons do botão metálico do eletroscópio, e estes deslocar-se-ão para as suas folhas na parte inferior. Como essas folhas ficam com excesso de elétrons, repelem-se, afastando-se uma da outra. Embora globalmente a carga total do metal do eletroscópio seja nula, houve uma redistribuição das cargas. Diz-se que o eletroscópio sofreu influência elétrica.

Mas se a esfera tocar na face interna da taça e, de seguida, se aproximar do eletroscópio, já não se observará o afastamento das suas folhas (**Fig. 19**). Das duas experiências conclui-se que só a face externa da taça estava eletrizada.



**Fig. 17** Condutores em equilíbrio eletrostático: o excesso de carga elétrica distribui-se na superfície exterior do condutor, ficando em repouso.

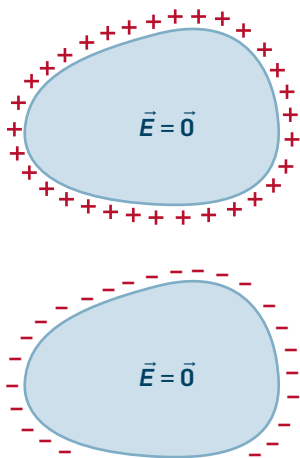


**Fig. 18** Taça em equilíbrio eletrostático: a carga em excesso está distribuída na superfície externa. Uma esfera metálica que toque nessa superfície fica eletrizada.



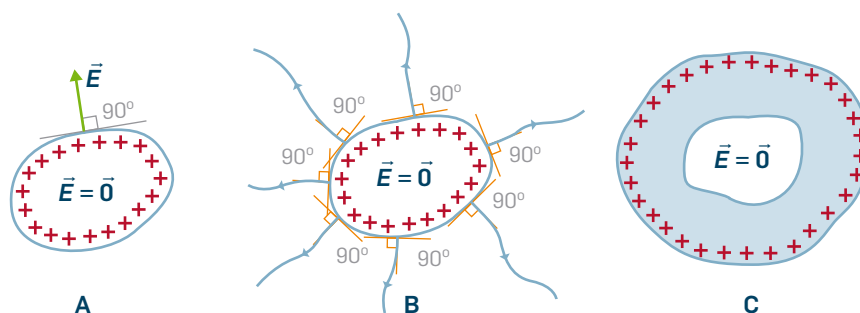
**Fig. 19** A superfície interior da taça não está eletrizada, pelo que uma esfera metálica que toque nessa superfície não fica eletrizada.





**Fig. 20** O campo elétrico é nulo no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático.

**Fig. 21** Condutor em equilíbrio eletrostático: o campo elétrico é perpendicular à superfície (A), assim como as linhas de campo (B). Num condutor com cavidade, estas propriedades mantêm-se (C).



Podemos, então, resumir as propriedades de um condutor em equilíbrio eletrostático:

#### Condutor em equilíbrio eletrostático

Qualquer que seja o condutor, maciço ou oco, e a sua forma:

- a carga elétrica em excesso distribui-se na superfície externa do condutor, de forma a minimizar a repulsão elétrica;
- não há movimento orientado de cargas;
- no interior do condutor o campo elétrico é nulo;
- o campo elétrico é perpendicular à superfície exterior do condutor em cada ponto.



**Fig. 22** Os cabelos orientam-se segundo as linhas de campo elétrico.

Se for depositada uma carga elétrica numa superfície interna de um condutor eletrostático, essa carga transferir-se-á totalmente para a superfície exterior, quer esta já esteja ou não eletrizada.

Esta propriedade é usada na construção do gerador de Van de Graaff. Este gerador, existente em alguns laboratórios escolares, permite demonstrações espetaculares. Por exemplo, uma pessoa que toque na sua cúpula quando ele está ligado, ficará eletrizada: os seus cabelos ficarão «em pé» segundo a direção das linhas de campo elétrico (Fig. 22).



No gerador de Van de Graaff (**Fig. 23**), uma correia de material isolante é colocada em movimento quando, por exemplo, se gira uma manivela. No seu movimento, por fricção com outros materiais, a correia adquire cargas elétricas que transporta até uma esfera condutora (a cúpula do aparelho), transferindo as cargas para a superfície exterior da esfera condutora. Deste modo, pode acumular-se muita carga elétrica na cúpula do gerador.

O facto de o campo elétrico ser nulo no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático foi demonstrado por Faraday: ele construiu uma «gaiola» com rede metálica, colocada sobre suportes isolantes; colocou-se dentro da gaiola, que a seguir foi eletrizada, e nada lhe aconteceu, pois dentro da gaiola o campo elétrico era nulo! A gaiola ficou conhecida por **gaiola de Faraday**.

Pode verificar-se experimentalmente que o campo elétrico no interior de uma gaiola é nulo (**Fig 24**): enrola-se uma rede metálica dando-lhe a forma cilíndrica e coloca-se sobre uma superfície isoladora. Prendem-se pequenos fios com bolas de esferovite no interior e no exterior da rede. Liga-se a rede a um gerador de Van de Graaff, eletrizando-a. Observa-se que os pêndulos colocados no exterior são repelidos pela rede, pois ficam eletrizados com carga do mesmo sinal. Os pêndulos colocados na parte interior permanecem imóveis, pois aí o campo elétrico é nulo, não ocorrendo eletrização.

Alguns dispositivos tiram partido desta propriedade, a qual explica também alguns fenómenos elétricos (**Fig. 25**). Por exemplo, quando há uma descarga elétrica na atmosfera, o interior dos veículos e dos aviões está protegido, pois aí o campo elétrico é nulo: as suas estruturas metálicas constituem gaiolas de Faraday. Pelo mesmo motivo, o rádio de um automóvel funciona mal sem uma antena exterior.

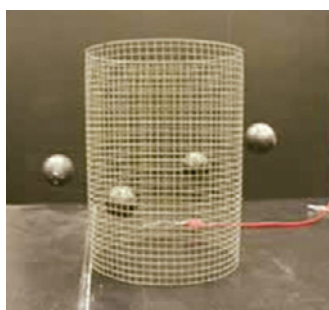
Também se protegem aparelhos de campos elétricos envolvendo-os por uma capa metálica (por exemplo, uma folha de alumínio) ou colocando-os no interior de uma rede metálica. Esta proteção constitui uma **blindagem eletrostática**. Um exemplo são os cabos coaxiais usados nas transmissões de sinais (antenas, ligações de áudio e de redes de computadores, etc.): uma rede metálica protege o condutor interior da ação de campos elétricos (**Fig. 25**).



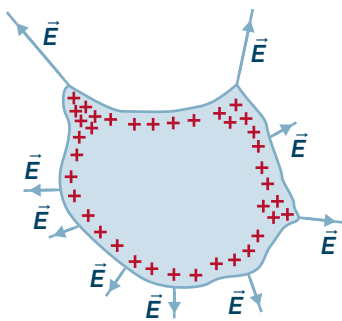
**Fig. 23** Modelo de gerador de Van de Graaff e esquema de funcionamento.



**Fig. 24** No interior da gaiola o campo elétrico é nulo.



**Fig. 25** Réplica da experiência de Faraday, avião sob descarga elétrica e rede metálica num cabo coaxial: no interior das «gaiolas» o campo elétrico é nulo.



**Fig. 26** A carga tende a acumular-se nas regiões onde a superfície é mais pontiaguda, sendo aí o campo elétrico mais intenso.

**Efeito das pontas:** a carga tende a acumular-se nas regiões pontiagudas de um condutor em equilíbrio eletrostático, sendo aí mais intenso o campo elétrico.



**Fig. 27** Para-raios e descarga elétrica na atmosfera.

A distribuição de carga à superfície de um condutor em equilíbrio eletrostático não é, em geral, uniforme. A carga tende a aglomerar-se nas regiões mais pontiagudas do condutor, havendo aí mais carga por unidade de área.

Se um corpo possuir extremidades muito afiadas, o campo elétrico será aí muito intenso (**Fig. 26**), podendo até provocar uma **descarga elétrica**. Chama-se a este fenómeno o **efeito das pontas** ou o poder das pontas.

O efeito das pontas explica por que razão o ar seco, que é isolador, se torna condutor para campos elétricos superiores a cerca de  $3 \times 10^6 \text{ N C}^{-1}$  (chamado campo de ruptura elétrica do ar). Campos elétricos de valor superior ionizam as moléculas do ar, sendo os eletrões e iões fortemente acelerados pelas forças elétricas. No seu trajeto ionizam mais átomos e moléculas do ar. É este processo em cadeia que provoca uma descarga elétrica, normalmente acompanhada de emissão de luz e de um estampido seco.

O efeito das pontas dos condutores tem uma aplicação muito prática: os para-raios, que protegem os edifícios das descargas elétricas quando há trovoadas.

As trovoadas resultam da acumulação de carga elétrica nas nuvens. A descarga elétrica ocorre quando o campo elétrico na região entre duas nuvens, ou entre uma nuvem e a terra, excede o campo de ruptura elétrica do ar, dando-se preferencialmente onde o campo elétrico for mais intenso.

Um para-raios é uma haste metálica ligada à terra que se coloca por cima de edifícios com o objetivo de os proteger das descargas elétricas. Se a nuvem estiver carregada com um certo tipo de carga, positiva, por exemplo, ela atrairá cargas de sinal contrário nos objetos que estiverem próximos. Estas cargas induzidas pela nuvem carregada têm, portanto, sinal contrário ao da nuvem. Quando há uma trovoadas, as cargas induzidas na ponta do para-raios estão em elevada concentração, pois a sua ponta é afiada. Deste modo, graças ao intenso campo elétrico então criado, os raios são atraídos para a ponta do para-raios. A descarga faz-se, então, sem qualquer dano no edifício, através de um cabo metálico ligado à terra (**Fig. 27**).

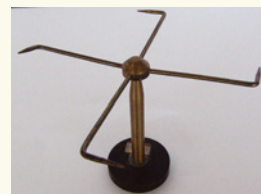
### Atividade 1

Uma rede metálica constitui uma blindagem a campos elétricos e a ondas eletromagnéticas de comprimentos de onda superiores aos orifícios da rede. Envolver um telemóvel com folha de alumínio da cozinha; ligue para o

telemóvel e verifique se o sinal chega ao telemóvel. Repita a experiência envolvendo o telemóvel com redes metálicas com malhas mais ou menos fechadas. Interprete o que observa em cada caso.

### Atividade 2

Observe o torniquete elétrico da figura. Quando colocado numa zona onde o campo elétrico é intenso (por exemplo, ligando-se a haste do torniquete a um dos terminais de um gerador de Van de Graaff), ele roda. Procure explicar o seu funcionamento.



## 2.2.4 Energia potencial elétrica. Potencial elétrico e superfícies equipotenciais

O **campo elétrico**, tal como o campo gravítico, é um campo **conservativo**: o trabalho realizado pela força elétrica no transporte de uma partícula carregada entre dois pontos, situados numa região onde existe um campo elétrico, não depende da trajetória (**Fig. 28**) mas apenas das posições inicial e final.

Por isso, podemos definir uma **energia potencial elétrica**, que resulta da interação dessa carga com a carga ou cargas que criam o campo.

O trabalho realizado pela força elétrica no transporte de uma partícula carregada num percurso qualquer entre dois pontos é simétrico da variação da energia potencial elétrica entre esses pontos:

$$W = -\Delta E_p$$

Ou seja, a diferença de energia potencial  $E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p$  é igual ao trabalho da força elétrica quando a carga é transportada de A para B:

$$E_p(A) - E_p(B) = W^{A \rightarrow B}$$

Então, a energia potencial elétrica no ponto A é:

$$E_p(A) = E_p(B) + W^{A \rightarrow B}$$

Tal como no campo gravítico, costuma tomar-se para zero da energia potencial elétrica um ponto no infinito:  $E_p(\infty) = 0$ . Por convenção, a energia potencial de uma carga  $q$ , colocada num ponto **A**, é igual ao trabalho realizado pela força elétrica no transporte dessa carga do ponto **A** para o infinito (ponto **B**), qualquer que seja a trajetória (**Fig. 29**), ou seja:

$$E_p(A) = W^{A \rightarrow \infty}$$

Consideremos uma carga pontual  $Q$  e o campo elétrico  $\vec{E}$  por ela criado, e uma carga pontual,  $q$ , à distância  $r$  da primeira (**Fig. 29**). Chama-se à carga  $q$  **carga de prova**, porque ela experimenta o campo: a carga sofre uma força elétrica, provando que o campo existe.

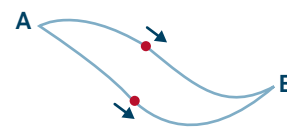
Para determinar a energia potencial elétrica associada à interação entre estas duas cargas, teríamos de calcular o trabalho realizado pela força elétrica quando a carga  $q$  se desloca para o infinito. O resultado é:

$$E_p = k \frac{Qq}{r}$$

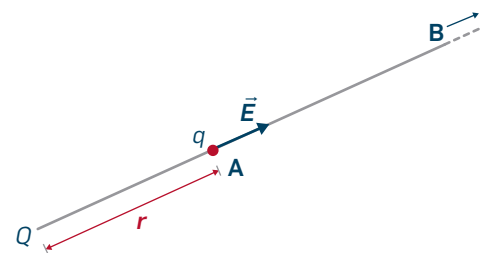
A expressão é semelhante à da energia potencial gravítica,  $E_{pg} = -G \frac{Mm}{r}$ .

Nos dois casos, a energia potencial é inversamente proporcional à distância entre as partículas. Só há que trocar a constante  $G$  por  $k$ , e as massas  $M$  e  $m$  pelas cargas  $Q$  e  $q$ . Mas, enquanto a energia potencial gravítica é sempre negativa porque a interação gravítica é sempre atrativa, a energia potencial elétrica pode ser negativa ou positiva já que a interação elétrica pode ser atrativa ou repulsiva.

**Campo elétrico:** é conservativo (a força elétrica é conservativa).

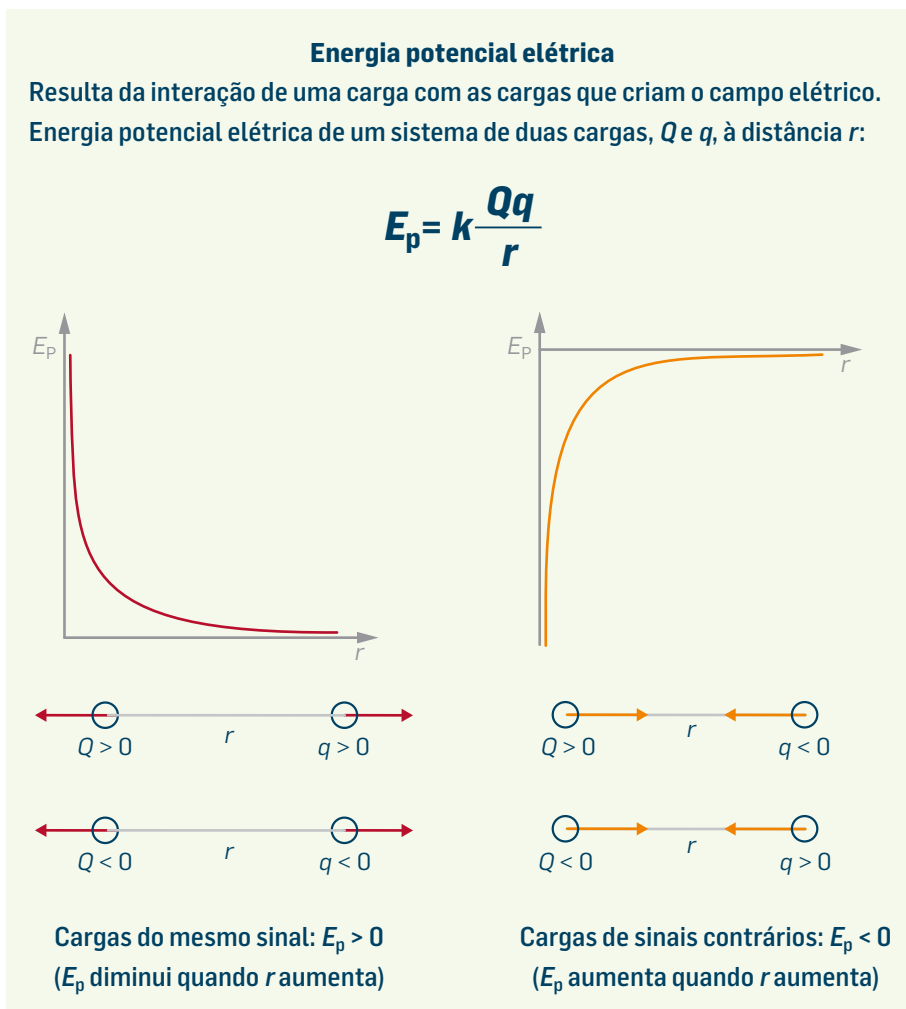


**Fig. 28** O trabalho realizado pela força elétrica que atua sobre uma partícula com carga, quando esta se desloca de A para B, é sempre o mesmo, qualquer que seja a trajetória.



**Fig. 29** Uma carga  $q$  colocada em A tem uma energia potencial elétrica resultante da interação com a carga  $Q$  que cria o campo. Essa energia é igual ao trabalho realizado pela força elétrica no transporte da carga  $q$  de A até ao infinito.

Podemos, pois, caracterizar esta grandeza:



Se dividirmos a energia potencial elétrica,  $E_p$ , associada a uma partícula de carga  $q$  num campo elétrico, pela carga, obtemos o potencial elétrico no ponto onde se localiza essa carga  $q$ :

$$V = \frac{E_p}{q}$$

A unidade SI de potencial elétrico é o volt (V), nome que homenageia o físico italiano Alessandro Volta (**Fig. 30**). Esta unidade é equivalente ao joule por coulomb ( $1 \text{ V} = 1 \text{ J C}^{-1}$ ).

Podemos deduzir-se a expressão do potencial num ponto associado ao campo produzido por uma só carga pontual,  $Q$ . Partindo da definição de potencial,  $V = \frac{E_p}{q}$ , e da expressão da energia potencial elétrica,  $E_p = k \frac{Qq}{r}$  ( $r$  é a distância do ponto à carga  $Q$  que cria o campo), obtém-se

$$V = k \frac{Q}{r}$$



**Fig. 30** Alessandro Volta, físico italiano dos séculos XVIII e XIX que construiu a primeira pilha elétrica.



O potencial não depende da carga  $q$  mas da carga  $Q$  que cria o campo. É o sinal da carga  $Q$  que determina se o potencial é positivo ou negativo. O potencial elétrico é uma grandeza escalar relacionada com o campo elétrico, que é uma grandeza vetorial. Ambas se definem num ponto e não dependem da carga aí colocada. O potencial elétrico criado por uma distribuição de cargas é a soma dos potenciais criados individualmente por cada uma delas:

$$V = V_1 + V_2 + \dots$$

Podemos resumir as características desta grandeza:

### Potencial elétrico

Define-se num ponto: é uma energia potencial elétrica por unidade de carga

( $V = \frac{E_p}{q}$ ). Exprime-se em volt (V) no SI.

Potencial elétrico criado por uma carga pontual  $Q$ , num ponto à distância  $r$ :

$$V = k \frac{Q}{r}$$

$$V > 0 \text{ se } Q > 0 \quad V < 0 \text{ se } Q < 0$$

Potencial elétrico criado por uma distribuição de cargas pontuais:

$$V = V_1 + V_2 + \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow V = k \frac{Q_1}{r_1} + k \frac{Q_2}{r_2} + \dots$$

### Questão resolvida 5

Quatro partículas com igual carga, de  $0,10 \mu\text{C}$ , estão colocadas nos vértices de um quadrado de  $5,0 \text{ cm}$  de lado.

Determine o potencial elétrico e o campo elétrico no centro do quadrado.

O potencial elétrico é a soma dos potenciais criados por cada uma das cargas:  $V = V_1 + V_2 + \dots$ . Como as cargas são todas iguais e estão a igual distância do centro, então:

$$V = k \frac{Q}{r} + k \frac{Q}{r} + k \frac{Q}{r} + k \frac{Q}{r} = 4k \frac{Q}{r}$$

Mas  $r = \frac{\sqrt{\ell^2 + \ell^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\ell}{2}$ , sendo  $\ell$  o lado do quadrado. Logo,

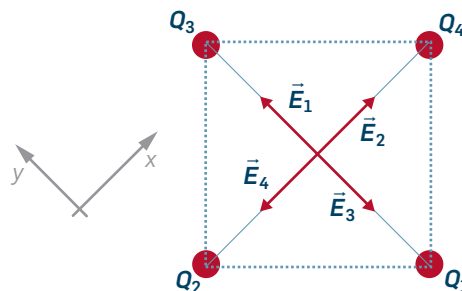
$$V = 8k \frac{Q}{\sqrt{2}\ell} = 8 \times 9,0 \times 10^9 \times \frac{0,10 \times 10^{-6}}{\sqrt{2} \times 0,050} = 1,0 \times 10^5 \text{ V}$$

O campo elétrico é a soma dos campos criados pelas várias cargas. Considerando o referencial da figura, vem:

$$\vec{E} = E_1 \vec{e}_y + E_2 \vec{e}_x - E_3 \vec{e}_y - E_4 \vec{e}_x$$

Mas como as cargas são iguais e a distância de cada

uma delas ao centro do quadrado é a mesma, o módulo dos vários vetores campo são iguais a  $E = k \frac{Q}{r}$ . Por isso, o campo elétrico no centro do quadrado é nulo,  $\vec{E} = \vec{0}$ , embora o potencial não o seja!



Podemos exprimir-se o trabalho realizado pela força elétrica no transporte de uma carga  $q$  de um ponto **A** para um ponto **B** através dos potenciais dos respectivos pontos. Vimos que:

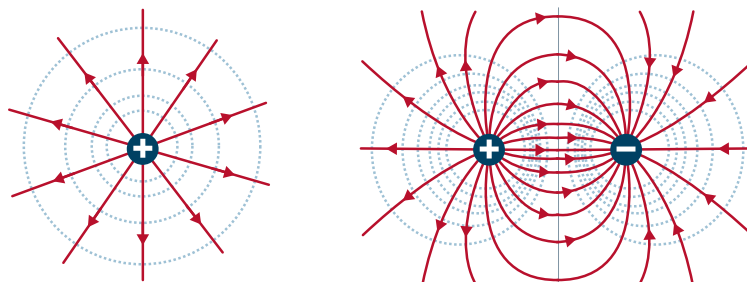
$$W^{A \rightarrow B} = -\Delta E_p = -[E_p(B) - E_p(A)] = E_p(A) - E_p(B)$$

Como os potenciais em **A** e **B** são  $V_A = \frac{E_p(A)}{q}$  e  $V_B = \frac{E_p(B)}{q}$ , respetivamente, vem:

$$W^{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B)$$

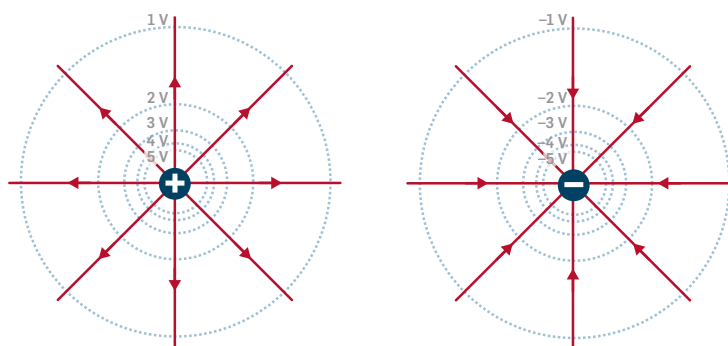
Os campos elétrico e gravítico são campos vetoriais: são caracterizados por uma grandeza vetorial definida num ponto cujas características podem ser representadas pelas linhas de campo. Mas a cada ponto também se pode associar uma grandeza escalar: o potencial elétrico para o campo elétrico e o potencial gravítico para o campo gravítico.

Para representar o potencial elétrico usam-se as **superfícies equipotenciais**, formadas pelos pontos de **igual potencial**. Na **Fig. 31** representam-se linhas azuis (a tracejado) que resultam da interseção das superfícies equipotenciais no espaço tridimensional com o plano do papel – são curvas equipotenciais (são linhas semelhantes às linhas isobáricas que unem pontos de igual pressão).



**Fig 31** Curvas equipotenciais (a azul) e linhas de campo elétrico (a vermelho) num campo criado por uma carga pontual (à esquerda) e por um dipolo elétrico (à direita).

Na **Fig. 32** visualizam-se as curvas equipotenciais do campo elétrico criado por uma carga positiva e por uma carga negativa e as respetivas linhas de campo. Verifica-se que as **linhas de campo** são, em cada ponto, perpendiculares às linhas equipotenciais e, em qualquer caso, apontam no **sentido dos potenciais decrescentes** (dos potenciais maiores para os potenciais menores).



**Fig 32** As linhas de campo apontam no sentido dos potenciais decrescentes e são perpendiculares, em cada ponto, às linhas equipotenciais.

Note-se que, se **A** e **B** forem dois pontos quaisquer de uma superfície equipotencial, como  $V_A = V_B$ , o trabalho da força elétrica no transporte de uma carga  $q$  sobre essa superfície, ao longo de qualquer trajetória entre **A** e **B**, será nulo:  $W^{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B) = 0$ . Como o trabalho só é nulo quando a força é perpendicular ao deslocamento, e como a força elétrica tem a direção do campo elétrico, o campo terá de ser perpendicular, em cada ponto, à superfície equipotencial.

Podemos resumir as características das superfícies equipotenciais:

### Superfícies equipotenciais num campo elétrico

- São formadas por pontos de igual potencial elétrico.
- São perpendiculares, em cada ponto, às linhas de campo elétrico.
- As linhas de campo elétrico apontam no sentido dos potenciais decrescentes.
- O trabalho realizado pela força elétrica no transporte de uma carga elétrica sobre uma superfície equipotencial é nulo.

No quadro da **Fig. 33** faz-se um resumo das grandezas vetoriais e escalares definidas para o campo elétrico.

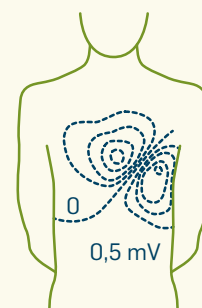
Campo elétrico	
Grandezas vetoriais	Grandezas escalares
Força elétrica, $\vec{F}$ , entre duas cargas pontuais, em módulo: $F = k \frac{ Q  q }{r^2}$	Energia potencial elétrica, $E_p$ , de duas cargas pontuais: $E_p = k \frac{Qq}{r}$
Campo elétrico, $\vec{E}$ , criado por uma carga pontual $Q$ (define-se num ponto), em módulo: $E = k \frac{ Q }{r^2}$	Potencial elétrico, $V$ , criado por uma carga pontual $Q$ (define-se num ponto): $V = k \frac{Q}{r}$
Campo elétrico, $\vec{E}$ , criado por uma distribuição de cargas pontuais $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$	Potencial elétrico, $V$ , criado por uma distribuição de cargas pontuais $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ $V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$
Força elétrica, $\vec{F}$ , exercida na carga $q$ , e campo elétrico, $\vec{E}$ , no ponto onde está essa carga: $\vec{F} = q\vec{E}$	Energia potencial elétrica, $E_p$ , associada à carga $q$ , e potencial elétrico, $V$ , no ponto onde está essa carga: $E_p = qV$
	Trabalho da força elétrica no transporte de uma carga $q$ de um ponto A para um ponto B: $W^{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B)$

**Fig. 33** Grandezas vetoriais e escalares definidas para o campo elétrico.

### Atividade 3

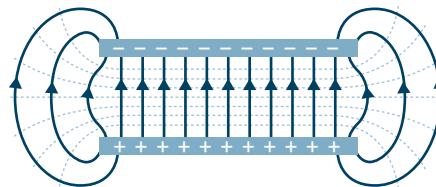
As contrações do músculo cardíaco, que bombeia o sangue, são devidas a impulsos elétricos periódicos. Colocando eletrodos no peito registam-se pequenas diferenças de potencial na região torácica devidas à atividade elétrica do coração.

A figura mostra curvas equipotenciais (em mV) num dado instante no peito de uma pessoa, devidas à atividade elétrica do coração. Faça uma pesquisa em grupo sobre esta técnica (chamada eletrocardiografia) e apresente-a à turma.



Apliquemos os conceitos anteriores ao estudo **do campo elétrico uniforme**. A **Fig. 34** mostra as linhas de campo e as curvas equipotenciais num campo uniforme criado por duas placas condutoras.

**Fig. 34** Linhas de campo e linhas equipotenciais entre duas placas condutoras muito próximas, com cargas de sinal contrário. O campo é aproximadamente uniforme, exceto junto às bordas.



Determinemos o trabalho da força elétrica no transporte de uma carga pontual e positiva  $q$  que se desloca entre dois pontos **A** e **B** nesse campo (**Fig. 35**).

Como o campo elétrico é conservativo, o trabalho é independente da trajetória escolhida: podemos deslocar a partícula de **A** para **C**, segundo uma linha equipotencial, e depois de **C** para **B**, segundo uma linha de campo. O trabalho de **A** para **C** é nulo (linha equipotencial):  $W^{A \rightarrow C} = 0$ . Então vem:

$$W^{A \rightarrow B} = W^{A \rightarrow C} + W^{C \rightarrow B}$$

$$W^{A \rightarrow B} = 0 + Fd \cos 0^\circ = q E d$$

Mas o trabalho da força elétrica também é dado pela expressão:

$$W^{A \rightarrow B} = q (V_A - V_B)$$

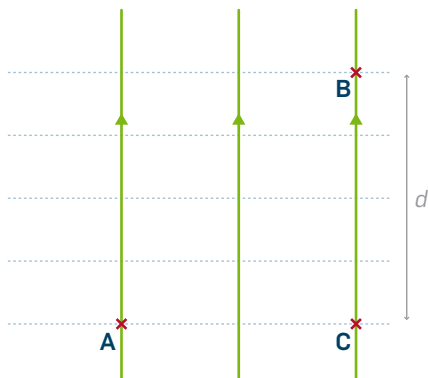
Logo,

$$q E d = q (V_A - V_B) \Rightarrow E = \frac{V_A - V_B}{d}$$

Designando por  $U$  o módulo da diferença de potencial,  $|V_A - V_B| = U$  e sendo  $d$  a distância entre as linhas equipotenciais em que se situam os pontos **A** e **B**, a expressão anterior pode escrever-se como:

$$E = \frac{U}{d}$$

A expressão generaliza-se para qualquer campo elétrico: o módulo do campo elétrico é dado por  $E = \left| \frac{\Delta V}{\Delta x} \right|$ , sendo  $\Delta x$  uma pequena distância segundo uma linha de campo a que corresponde a diferença de potencial  $\Delta V$ . Esta expressão justifica a unidade SI de campo elétrico: volt por metro ( $V m^{-1}$ ).



**Fig. 35** O trabalho realizado pela força elétrica no transporte de uma partícula carregada entre dois pontos, **A** e **B**, é independente da trajetória (o campo é conservativo).

A Atividade Laboratorial 2.1, «Campo elétrico e superfícies equipotenciais», permitirá determinar as características de um campo elétrico uniforme.



Quando uma partícula com carga se move num campo elétrico fica sujeita ao seu peso e à força elétrica, que são ambas forças conservativas. Se não atuarem mais forças ou atuarem forças não conservativas mas que não realizem trabalho, haverá conservação da energia mecânica no movimento.

No movimento de um eletrão podemos desprezar o seu peso. Por exemplo, se um eletrão estiver num campo elétrico uniforme criado por um par de placas carregadas ficará sujeito apenas à força elétrica. Se a diferença de potencial entre as placas for 1 V e o eletrão sair da placa negativa, a 0 V, ele será acelerado até à placa positiva para onde é atraído pela força elétrica. Que energia cinética adquire ao chegar à placa positiva, cujo potencial é 1 V (Fig. 36)?

Aplicando o Princípio da Conservação da Energia entre as posições inicial (i) e final (f) do eletrão, vem:

$$E_{ci} + E_{pi} = E_{cf} + E_{pf}$$

Como parte do repouso, tem-se:

$$E_{cf} = E_{pi} - E_{pf}$$

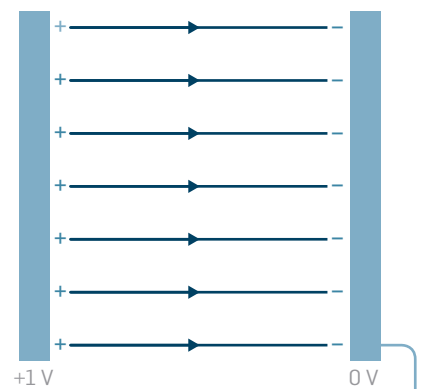
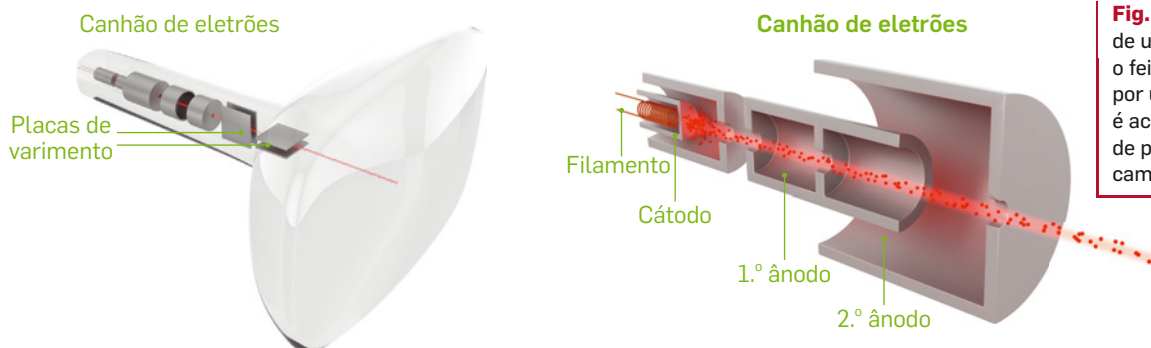
Sendo  $e$  o módulo da carga do eletrão e como  $E_p = qV$ , a expressão anterior pode escrever-se:

$$E_{cf} = E_{pi} - E_{pf} = -e(V_i - V_f) = -1,6 \times 10^{-19} (0 - 1) = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

A esta energia dá-se o nome de **eletrão-volt** (eV):  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .

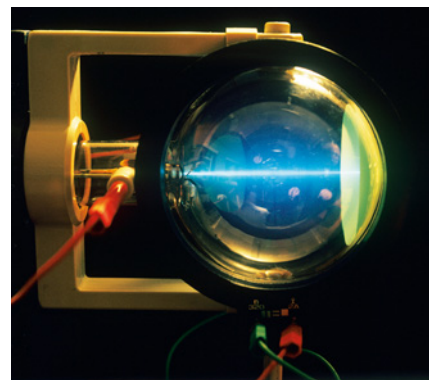
Os movimentos de eletrões em campos elétricos são comuns nos tubos de raios catódicos, conhecidos por CRT – *cathode ray tube* (Fig. 37), existentes em modelos antigos de televisão e osciloscópios. Os raios catódicos são feixes de eletrões emitidos por um cátodo (daí o nome «catódicos»), sendo atraídos para um ânodo, acelerados pela diferença de potencial entre o ânodo e o cátodo.

Numa televisão antiga, um feixe de eletrões é produzido num filamento de tungsténio aquecido (o cátodo), sendo depois acelerado por uma diferença de potencial da ordem de 10 keV (10 000 eV). Em seguida, o feixe de eletrões é defletido nas direções horizontal e vertical por ação de campos elétricos produzidos por um par de placas paralelas vertical e outro par horizontal ou, em alternativa, por campos magnéticos produzidos por dois pares de bobinas. Este processo ocorre no «canhão de eletrões» do tubo (Fig. 38). O feixe de eletrões acaba por colidir com um ecrã fluorescente do tubo produzindo nele um ponto luminoso. É o varrimento do feixe de eletrões nesse ecrã que origina a imagem. Por exemplo, num ecrã de 100 Hz o varrimento faz-se 100 vezes por segundo, o que origina melhor imagem do que num ecrã de 60 Hz.



**Fig. 36** Um eletrão acelerado por uma diferença de potencial de 1 V adquire uma energia de um eletrão-volt.

**Eletrão-volt (eV):** unidade de energia; 1 eV é a energia adquirida por um eletrão quando acelerado por uma diferença de potencial de 1 V;  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .



**Fig. 37** Tubo de raios catódicos: o ar é rarefeito no seu interior e um metal aquecido (cátodo) emite eletrões que são acelerados, produzindo pontos luminosos ao bater num ecrã fluorescente.

**Fig. 38** Canhão de eletrões de um tubo de raios catódicos: o feixe de eletrões emitido por um filamento aquecido é acelerado por uma diferença de potencial e defletido por campos elétricos.

## Questão resolvida 6



Entre as placas de um condensador, que estão a uma distância de 1,00 cm uma da outra, aplica-se uma diferença de potencial de  $2,5 \times 10^3$  V.

O módulo da carga do eletrão é  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C e a sua massa é  $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$  kg.

- a) Um eletrão parte do repouso da placa negativa. Qual é a intensidade do campo elétrico aplicado? Que tipo de trajetória descreve? Com que velocidade chega à outra placa?
- b) Um eletrão é lançado paralelamente às placas com velocidade de módulo  $v = 1,2 \times 10^7$  m s<sup>-1</sup>. Que tipo de trajetória descreve o eletrão? A que distância se aproxima da placa positiva, após ter percorrido 5,0 mm na direção paralela às placas?

a) O módulo do campo é dado por

$$E = \frac{U}{d} = \frac{2,5 \times 10^3}{1,00 \times 10^{-2}} = 2,5 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$$

Como o eletrão parte do repouso e é atraído para a placa positiva pela força elétrica, que é constante, tem movimento retilíneo uniformemente acelerado. Como o campo é conservativo

$$E_{pe\ i} = \frac{1}{2} m_e v^2 + E_{pe\ f}$$

ou

$$qV_i = \frac{1}{2} m_e v^2 + qV_f \Leftrightarrow q(V_i - V_f) = \frac{1}{2} m_e v^2$$

Como  $q = -e$ , vem  $-e(V_i - V_f) = \frac{1}{2} m_e v^2$ , ou seja:

$$v = \sqrt{\frac{2e(V_f - V_i)}{m_e}}$$

Como  $V_f - V_i = 2,5 \times 10^3$  V, vem

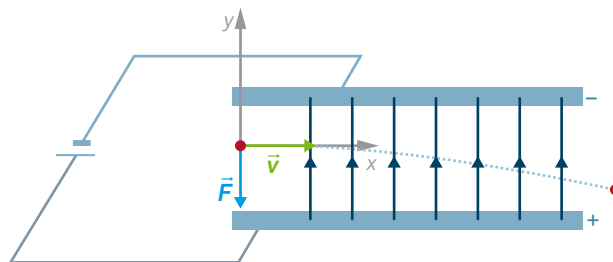
$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 2,5 \times 10^3}{9,1 \times 10^{-31}}} = 3,0 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$$

(10% da velocidade da luz!).

b) Usando o referencial da figura e a Segunda Lei de Newton vem:

$$a_x = 0 \text{ e } a_y = \frac{-F}{m} = \frac{-eE}{m_e}$$

$$v_x = v \text{ e } v_y = 0$$



As equações do movimento são:

$$x = vt \text{ (movimento uniforme)}$$

$$y = -\frac{eE}{2m_e} t^2 \text{ (movimento uniformemente variado)}$$

A trajetória é parabólica.

Substituindo os valores  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C,  $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$  kg,  $E = 2,5 \times 10^5$  V m<sup>-1</sup>,  $v = 1,2 \times 10^7$  m s<sup>-1</sup> e  $x = 5,0 \times 10^{-3}$  m obtém-se:

$$\begin{cases} x = 1,2 \times 10^7 t \\ y = -\frac{1,6 \times 10^{-19} \times 2,5 \times 10^5}{9,1 \times 10^{-31}} t^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5,0 \times 10^{-3} = 1,2 \times 10^7 t \\ y = -4,40 \times 10^{16} t^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 4,17 \times 10^{-10} \text{ s} \\ y = -4,40 \times 10^{16} \times (4,17 \times 10^{-10})^2 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = -7,7 \times 10^{-3} \text{ m} \end{cases}$$

Portanto, o eletrão aproxima-se 7,7 mm da placa positiva.

## 2.2.5 Condensadores. Descarga de um condensador num circuito RC

Num condutor em equilíbrio eletrostático o campo elétrico é perpendicular à sua superfície exterior. Se deslocarmos uma carga sobre essa superfície, como a força elétrica tem a direção do campo elétrico, o trabalho da força elétrica no deslocamento dessa carga será nulo (a força é perpendicular à superfície em cada ponto da trajetória).

Sejam dois pontos **A** e **B** dessa superfície. Podemos então escrever

$$W^{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B) = 0 \Rightarrow V_A = V_B$$

Conclui-se que os pontos da superfície de um **condutor em equilíbrio eletrostático** estão ao mesmo potencial elétrico, ou seja, a **superfície** do condutor é **equipotencial**.

Mas, como o campo elétrico no interior do condutor é nulo, é nula a força elétrica e, conseqüentemente, também é nulo o trabalho da força elétrica no deslocamento de uma carga elétrica pelo interior do condutor (e não apenas sobre a sua superfície!). Assim, **todos os pontos de um condutor em equilíbrio eletrostático estão ao mesmo potencial elétrico**. Pode, então, atribuir-se um potencial elétrico a um condutor em equilíbrio eletrostático.

Experimentalmente verifica-se que há uma razão constante entre a carga,  $Q$ , de um condutor isolado (ou seja, longe de outros condutores) e o seu potencial,  $V$ , que é a **capacidade elétrica** do condutor:

$$C = \frac{Q}{V}$$

A unidade SI de capacidade elétrica é o farad (F), em homenagem ao físico Michael Faraday. O farad é equivalente ao coulomb por volt (C/V). Uma capacidade de 1 F é muito grande, e dificilmente realizável na prática! As capacidades dos condutores são normalmente expressas em submúltiplos do farad, como o picofarad (pF), nanofarad (nF) e o microfarad ( $\mu$ F).

**Condutor em equilíbrio eletrostático:** a superfície exterior do condutor é equipotencial. Todos os pontos do condutor estão ao mesmo potencial elétrico.

**Capacidade elétrica de um condutor isolado:** relaciona a carga que o condutor armazena com o seu potencial elétrico. A sua unidade SI é o farad (F).

### Questão resolvida 7



O potencial de uma esfera condutora isolada de raio  $R$  com carga  $Q$  é dada por  $V = k \frac{Q}{R}$ , ou seja, igual ao potencial criado pela mesma carga pontual à distância  $R$ .

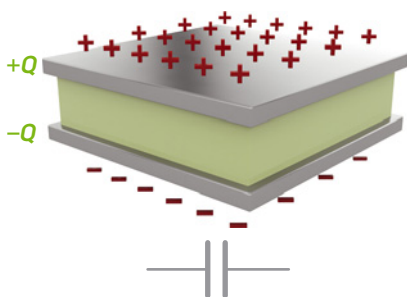
Verifique que um condutor esférico isolado de capacidade 1 F teria de ter um raio superior à distância Terra-Lua (384 400 km).

Como  $V = k \frac{Q}{R}$ , a capacidade da esfera vem:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{R}{k}$$

Substituindo valores,

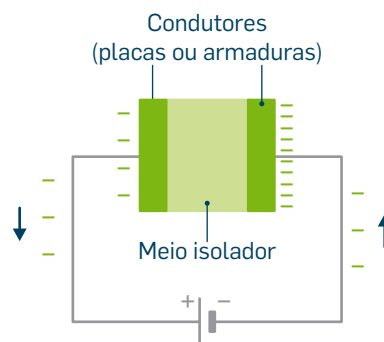
$$1 = \frac{R}{9,0 \times 10^9} \Leftrightarrow R = 9,0 \times 10^9 \text{ m} > 3,844 \times 10^8 \text{ m}$$



**Fig. 39** Esquema de um condensador (em cima) e respetivo símbolo (em baixo).

**Condensador:** sistema de dois condutores próximos, com cargas simétricas, separados por um meio isolador onde existe um campo elétrico. Armazena carga e energia potencial elétrica.

**Fig. 40** Um condensador carrega-se quando se liga a uma pilha.



Quando se desliga o condensador da pilha, as cargas ficam armazenadas nas armaduras, e há entre elas uma diferença de potencial igual à da pilha. Verifica-se que o módulo da carga elétrica armazenada em cada armadura,  $Q$ , é diretamente proporcional à diferença de potencial  $U$  entre as armaduras. A constante de proporcionalidade é a capacidade elétrica do condensador:

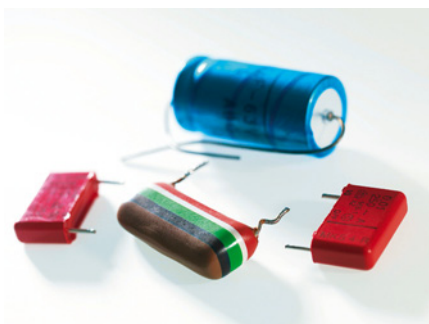
$$C = \frac{Q}{U}$$

Os condensadores típicos têm capacidades que variam entre  $1 \mu\text{F}$  e  $1 \text{pF}$  e as suas formas e tamanhos podem ser variados (Fig. 41).

O condensador mais simples é o condensador plano, cujas armaduras são duas placas metálicas paralelas muito próximas (Fig. 39): a capacidade depende da área das placas e da distância entre elas. A introdução de material dielétrico entre as placas de um condensador faz diminuir a diferença de potencial entre elas, aumentando a sua capacidade. Em resumo:

#### Capacidade elétrica de um condensador, $C$

- Mede a capacidade de armazenar carga e energia potencial elétrica.
- Depende da geometria do condensador (forma das armaduras e separação entre elas); quanto maiores forem as armaduras e menor a distância entre elas, maior será a capacidade (para o mesmo meio isolador).
- Depende do meio isolador (ar ou outro dielétrico como papel, mica, plástico, vidro, material cerâmico, etc.); a maior permitividade elétrica do meio,  $\epsilon$ , corresponde maior capacidade.



**Fig. 41** Condensadores de diferentes tamanhos e capacidades (em cima) e interior de um condensador (em baixo).



Se a diferença de potencial entre as armaduras de um condensador ultrapassar um certo limite (chamada tensão de ruptura), produzir-se-á uma faísca entre elas e o condensador descarrega abruptamente, podendo ficar danificado.

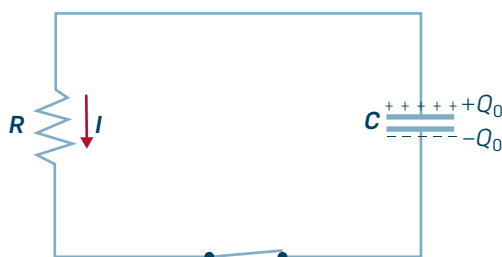
Os condensadores têm numerosas aplicações, nomeadamente em eletrónica.

Os *pacemakers* (Fig. 42), por exemplo, usam condensadores: a sua descarga permite obter uma corrente elétrica.

Também certos circuitos elétricos requerem correntes elétricas muito elevadas que não podem ser facilmente fornecidas por uma fonte de tensão normal: é o caso do *flash* de uma máquina fotográfica. Essas correntes podem ser fornecidas através de descargas de condensadores.

Já estudámos circuitos elétricos em que a corrente,  $I$ , tinha um valor constante, como num circuito alimentado por uma pilha. Quando se usa um condensador como fonte de energia, ele descarrega-se mas a corrente produzida,  $I$ , não é constante ao longo do tempo.

Analisemos a descarga de um condensador que ocorre quando as suas armaduras são ligadas diretamente a um condutor com resistência: é o chamado **circuito RC** (Fig. 43).



O condensador, inicialmente carregado com a carga  $Q_0$ , é ligado a um condutor com resistência  $R$ , o que origina uma corrente elétrica cujo sentido é do polo positivo para o polo negativo do condensador. Durante a descarga, a carga do condensador e a corrente diminuem ao longo do tempo.

Como o condensador e a resistência têm os mesmos terminais, a diferença de potencial nos terminais do condensador,  $U = \frac{Q}{C}$ , é igual, em qualquer instante, à diferença de potencial nos terminais da resistência,  $U = RI$ , ou seja:

$$\frac{Q}{C} = RI$$

Como o condensador descarrega, a carga  $Q$  vai diminuindo. Mas, como  $I$  é positivo, a corrente é dada por  $I = -\frac{dQ}{dt}$ . Substituindo a expressão de  $I$  na equação anterior, obtém-se

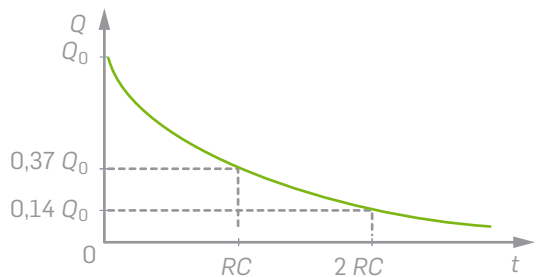
$$\frac{Q}{C} = -R \frac{dQ}{dt} \Leftrightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} Q$$



**Fig. 42** Um *pacemaker* utiliza um circuito RC.

**Circuito RC:** circuito com resistência e condensador.

**Fig. 43** Condensador carregado ligado a uma resistência. Depois de se fechar o interruptor, circula na resistência  $R$  uma corrente  $I$  no sentido indicado.



**Fig. 44** Descarga de um condensador em função do tempo: ao fim de um tempo igual a duas vezes a constante do tempo, o condensador já só tem cerca de 14% da sua carga inicial.

A derivada da função  $Q(t)$  é a própria função multiplicada pelo fator  $-\frac{1}{RC}$ , o que significa que a solução da equação anterior é uma função exponencial, ou seja, a carga do condensador decresce exponencialmente com o tempo:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Consequentemente, o mesmo ocorrerá com a corrente:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

O expoente da função exponencial  $e^{-\frac{t}{RC}}$  é adimensional, pelo que o numerador e o denominador têm a mesma dimensão; assim,

$$\tau = RC$$

tem a dimensão de tempo e é designada por **constante de tempo**. Esta indica o tempo necessário para que a carga, ou a corrente, diminuam para  $\frac{1}{e} = 0,37$ , ou seja, para 37% dos respetivos valores iniciais (**Fig. 44**).

Uma constante pequena significa que a descarga será rápida. Podemos resumir as ideias principais sobre a descarga de um condensador:

#### Descarga de um condensador

A carga e a corrente decrescem exponencialmente com o tempo:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{e} \quad I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$\tau = RC$  é a constante de tempo:

- indica o tempo que a carga (ou a corrente) diminui para 37% do valor inicial;
- quanto menor for, mais rápida será a descarga do condensador;
- será tanto maior quanto maior for a capacidade do condensador e maior for a resistência.



**Fig. 45** O limpador para-brisas de um automóvel é controlado por um circuito  $RC$ : cada velocidade corresponde a um valor de  $R$ .

Os circuitos com condensadores do tipo dos que analisámos têm várias aplicações. Por exemplo, o limpador para-brisas de um automóvel (**Fig. 45**) tem um circuito  $RC$ . A escolha da velocidade do limpador para-brisas (normalmente tem três velocidades) corresponde à seleção de uma resistência naquele circuito.

Os condensadores também são utilizados em automóveis elétricos: carrega-se o condensador do automóvel numa tomada elétrica que pode até ser em nossa casa!

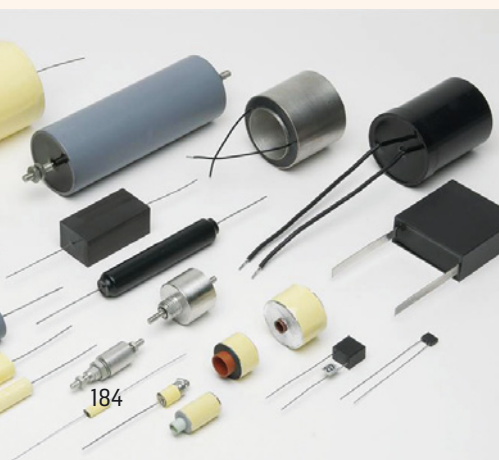
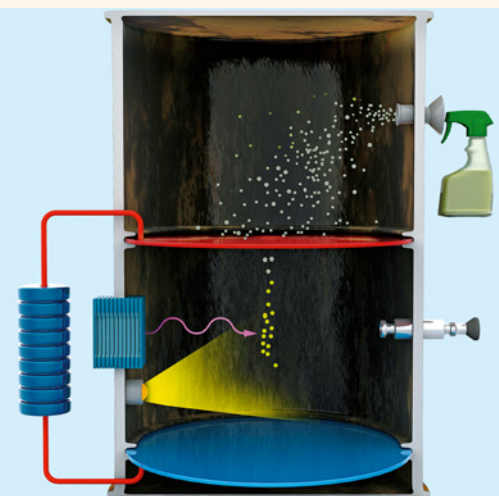
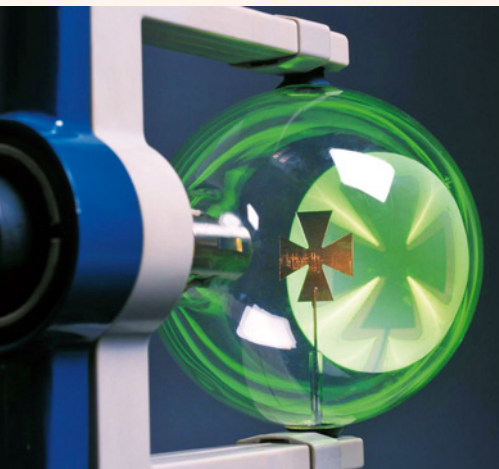
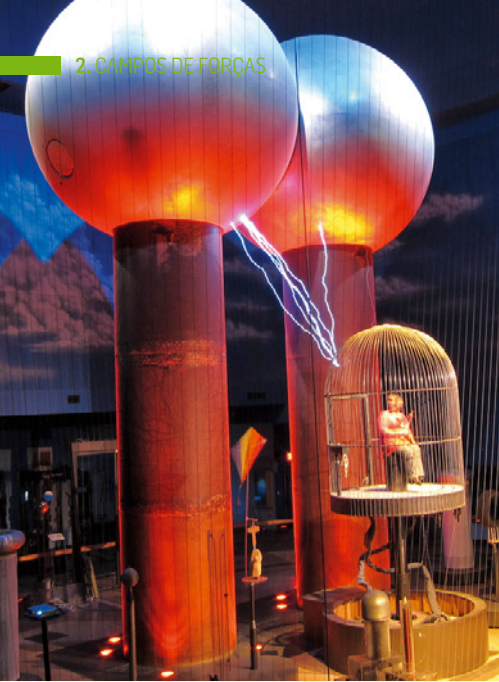
A Atividade Laboratorial 2.2, «Construção de um relógio logarítmico», permitirá estudar a descarga de um condensador, reconhecer que este processo pode servir para medir o tempo, e obter o valor da capacidade do condensador.

## RESUMO

- **Lei de Coulomb:** a intensidade da força de atração ou de repulsão entre duas partículas com carga elétrica,  $q$  e  $q'$ , é dada por  $F = k \frac{|q||q'|}{r^2}$ ;  $k$  é uma constante que depende do meio, dada por  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ , sendo  $\epsilon$  a permissividade elétrica, característica do meio, que tem o valor mínimo no vácuo.
- **Campo elétrico,  $\vec{E}$ :** é originado pela carga elétrica,  $Q$ , de uma partícula e define-se em cada ponto. A sua intensidade depende da carga e do quadrado da distância,  $r$ , da carga ao ponto onde se define o campo:  $E = k \frac{|Q|}{r^2}$ ;  $\vec{E}$  aponta para a carga  $Q$  que cria o campo elétrico se  $Q < 0$ , ou em sentido contrário se  $Q > 0$ ;  $\vec{E}$  manifesta-se pela força elétrica sobre partículas com carga,  $q$ , colocadas no ponto:  $\vec{F} = q\vec{E}$  ( $\vec{F}$  e  $\vec{E}$  têm igual direção e sentido se  $q > 0$ , mas sentidos opostos se  $q < 0$ ). Unidade SI: volt por metro,  $V\ m^{-1}$  (equivalente a  $N\ C^{-1}$ ).
- **Campo elétrico criado por várias cargas:**  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$  (soma vetorial dos campos produzidos individualmente por cada carga).
- **Linhas de campo elétrico:** divergem sempre das cargas positivas e convergem sempre para as cargas negativas; são tangentes, em cada ponto, ao vetor campo elétrico; terão maior densidade onde o campo elétrico for mais intenso.
- **Condutores em equilíbrio eletrostático:** a carga elétrica num condutor em equilíbrio eletrostático distribui-se na sua superfície exterior; o campo elétrico é nulo no interior do condutor e é perpendicular à superfície exterior, em cada ponto; a gaiola de Faraday é uma aplicação: no seu interior, o campo elétrico é nulo, protegendo os corpos lá colocados, ou seja, a gaiola promove a blindagem eletrostática do seu interior.
- **Efeito das pontas:** a carga tende a acumular-se nas regiões pontiagudas de um condutor em equilíbrio eletrostático, sendo aí mais intenso o campo elétrico. O para-raios fundamenta-se neste efeito.
- **Energia potencial elétrica de interação entre duas cargas:**  $E_p = k \frac{Qq}{r}$ ; é negativa se as cargas tiverem sinais opostos e positiva se tiverem o mesmo sinal; tende para zero quando aumenta a distância entre as cargas.
- **Potencial elétrico,  $V$ :** define-se num ponto; é uma energia potencial elétrica por unidade de carga:  $V = \frac{E_p}{q}$ ; o potencial elétrico criado por uma carga pontual  $Q$ , num ponto à distância  $r$ , é dado por  $V = k \frac{Q}{r}$ ; é positivo se  $Q > 0$ , negativo se  $Q < 0$ , e tende para zero quando aumenta a distância  $r$ . Unidade SI: volt (V).







- **Potencial elétrico criado por várias cargas:**  $V = V_1 + V_2 + \dots$  (soma dos potenciais produzidos por cada carga); as linhas de campo elétrico apontam sempre no sentido dos potenciais decrescentes.
- **Superfícies equipotenciais:** são formadas por pontos com igual potencial elétrico; são perpendiculares, em cada ponto, às linhas de campo elétrico.
- **Campo elétrico:** diz-se conservativo porque a força elétrica é conservativa.
- **Trabalho da força elétrica no transporte de uma carga  $q$  entre dois pontos:** é independente da trajetória entre os pontos pois a força elétrica é conservativa; relaciona-se com os potenciais desses pontos pela expressão  $W^{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B)$ ; é nulo quando a carga é transportada sobre uma superfície equipotencial.
- **Campo elétrico uniforme:** é criado por duas placas metálicas planas e paralelas, muito próximas, com cargas simétricas; as linhas de campo são retilíneas e perpendiculares às placas, apontando da placa positiva para a placa negativa; a sua intensidade é dada por  $E = \frac{U}{d}$ , sendo  $U$  o módulo da diferença de potencial elétrico entre duas quaisquer linhas equipotenciais e  $d$  a distância entre elas.
- **Condensador:** sistema de dois condutores próximos (placas ou armaduras), com cargas simétricas, separados por um meio isolador (meio dielétrico) onde existe um campo elétrico. Armazena carga e energia potencial elétrica. Pode ser carregado ligando-se as suas armaduras aos terminais de uma pilha.
- **Capacidade elétrica de um condensador:** é dada por  $C = \frac{Q}{U}$ ; o módulo da carga elétrica armazenada em cada armadura,  $Q$ , e a diferença de potencial,  $U$ , entre as armaduras são diretamente proporcionais, sendo a capacidade,  $C$ , a constante de proporcionalidade; depende da geometria do condensador e do meio isolador. Unidade SI: farad (F).
- **Circuito RC:** circuito com resistência e condensador; permite a descarga de um condensador.
- **Descarga de um condensador:** a carga e a corrente elétrica decrescem exponencialmente com o tempo, de acordo com as expressões  $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$  e  $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ ; a constante de tempo,  $\tau = RC$ , indica o tempo para a carga (ou a corrente) diminuir para  $1/e \approx 37\%$  do seu valor inicial (quanto menor for a constante de tempo, mais rápida será a descarga do condensador).





## ATIVIDADE LABORATORIAL 2.1

### Campo elétrico e superfícies equipotenciais

A detecção de um campo elétrico permite que alguns peixes localizem outros peixes.

Como determinar, com um voltímetro, a forma das linhas de campo elétrico e das superfícies equipotenciais entre placas paralelas carregadas com cargas simétricas? Como medir o módulo do campo elétrico entre as placas?

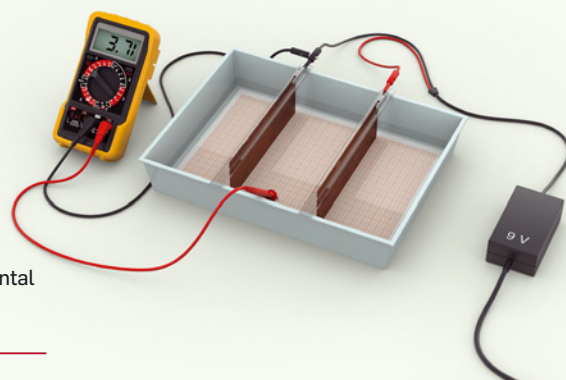


#### Questões pré-laboratoriais

Duas placas planas, colocadas paralelamente a uma distância muito menor do que os seus comprimentos, têm cargas elétricas simétricas.

1. Que tipo de campo elétrico é criado entre as placas? Quais são as formas das linhas de campo e das superfícies equipotenciais?
2. Suponha que uma placa (**A**) está ao potencial  $V$  e a outra (**B**) ao potencial nulo.
  - a) Represente as linhas de campo e as linhas equipotenciais na região entre as placas, e num plano que lhes é perpendicular.
  - b) Indique como varia o potencial ao longo de uma linha de campo.
3. Suponha constante a diferença de potencial elétrico entre as placas. O campo elétrico será mais intenso com as placas mais próximas ou mais afastadas? Justifique.
4. Se a distância entre as placas se mantiver constante, assim como a diferença de potencial elétrico entre elas, como variará o módulo da diferença de potencial entre quaisquer dois pontos, ao longo de uma linha de campo, com a distância entre eles? Que gráfico representará essa variação? Que grandeza pode ser calculada a partir desse gráfico?

5. A **Fig. 46** mostra uma montagem com uma tina, uma folha de papel milimétrico na sua base, duas placas metálicas paralelas ligadas a uma fonte de tensão contínua e um voltímetro digital.
  - a) O terminal comum (COM) do voltímetro é ligado à placa negativa. Se deslocar a ponta de prova entre as placas, o que medirá o voltímetro?
  - b) Para verificar a sua previsão sobre a forma das superfícies equipotenciais, como deve mover a ponta de prova?
  - c) Que utilidade poderá ter a folha de papel milimétrico colocada no fundo da tina?
  - d) Se pretender investigar como varia a diferença de potencial entre dois pontos da mesma linha de campo com a distância entre eles, como deverá deslocar a ponta de prova? E se quiser determinar o módulo do campo elétrico a partir de um gráfico, que medidas deverá realizar? Elabore uma tabela para registo dessas medidas.



**Fig. 46** Montagem experimental para o estudo de um campo uniforme.



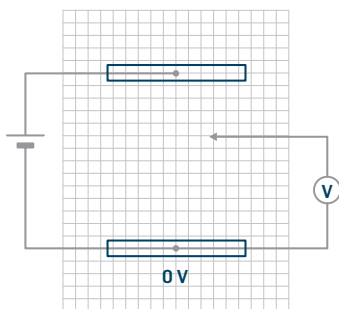
## ATIVIDADE LABORATORIAL 2.1 (cont.)

### Trabalho laboratorial



Nesta atividade cria-se um campo elétrico entre duas placas metálicas planas e paralelas. Medindo-se diferenças de potencial elétrico entre uma das placas e pontos entre elas, investiga-se a forma de superfícies equipotenciais e determina-se o módulo do campo elétrico.

**Material:** fonte de tensão contínua; recipiente de fundo transparente colocado sobre papel milimétrico; água; duas placas metálicas planas e idênticas; voltímetro; fios de ligação; papel milimétrico para registos.



**Fig. 47** Esquema de dispositivo para estudo de um campo uniforme.

**1.** Faça a montagem da **Fig. 46**. Posicione as placas metálicas paralelamente. Adicione água à tina até cerca de um centímetro de altura. Ligue as placas à fonte de tensão e o terminal COM do voltímetro à placa ligada ao polo negativo do gerador (**Fig. 47**).

**2.** Desenhe a posição das placas no papel milimétrico de registo para reproduzir o que vê na tina.

**3.** Pretende encontrar-se, pelo menos, cinco linhas equipotenciais na região entre as placas. Tendo em conta o valor da tensão seleccionado na fonte, escolha cinco valores de tensão intermédios igualmente espaçados.

**4.** Ligue o gerador. Desloque a ponta de prova do voltímetro, sempre na vertical,

procurando os pontos que permitam medir uma das diferenças de potencial elétrico escolhidas. Assinale a posição desses pontos no papel milimétrico de registo. Repita o procedimento para as outras diferenças de potencial elétrico.

**5.** Desloque a ponta de prova ao longo da linha perpendicular às placas e que passa no meio delas. Meça, sucessivamente, diferenças de potencial elétrico a distâncias regulares à placa ligada ao polo negativo. Faça, pelo menos, sete medições, registando-as numa tabela.

**6.** Ligue o terminal COM do voltímetro à placa positiva. Colocando sucessivamente a ponta de prova em três dos pontos assinalados anteriormente com diferentes diferenças de potencial, meça as diferenças de potencial elétrico à placa positiva e também a diferença de potencial da placa negativa à positiva.

### Questões pós-laboratoriais



- No papel milimétrico de registo, trace as linhas equipotenciais para os valores escolhidos e três linhas de campo elétrico. As linhas equipotenciais são compatíveis com as superfícies equipotenciais previstas? As linhas de campo têm a posição e orientação previstas? Explique eventuais diferenças.
- Que diferenças se encontraram nas linhas equipotenciais quando o terminal COM do voltímetro, inicialmente conectado à placa ligada ao polo negativo, foi conectado à placa ligada ao polo positivo?
- A diferença de potencial entre superfícies equipotenciais dependerá da placa de referência?
- Elabore o gráfico da diferença de potencial em função da distância à placa de referência. Determine o módulo do campo elétrico entre as placas.
- Se tivesse elaborado o gráfico da diferença de potencial elétrico em relação à placa positiva em função da distância a essa placa, que diferença encontraria? E como determinaria o módulo do campo elétrico?



## ATIVIDADE LABORATORIAL 2.2

### Construção de um relógio logarítmico

A descarga de um condensador é usada como temporizador em inúmeras aplicações no dia a dia.

Como é feita essa utilização?

Como se poderá medir o tempo com um condensador, uma resistência e um voltímetro?

#### Questões pré-laboratoriais



1. Estabelece-se uma diferença de potencial elétrico  $U$  nos terminais de uma associação de duas resistências elétricas em série,  $R_1$  e  $R_2$ .
  - a) Como se relaciona  $U$  com as diferenças de potencial nos terminais de cada resistência?
  - b) Se as resistências forem iguais, como se relaciona a diferença de potencial nos terminais de cada resistência com  $U$ ?
2. O que é um circuito  $RC$ ? Porque se chamam correntes transitórias às correntes elétricas nestes circuitos?
3. Que aplicações pode ter a descarga de um condensador?
4. Na descarga de um condensador, a sua carga elétrica diminui exponencialmente no tempo, ou seja,  $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ .
  - a) Que nome se dá ao produto  $RC$ ? Qual é o seu significado?
  - b) Se quisermos um condensador que demore muito tempo a descarregar, o produto  $RC$  deve ser grande ou pequeno?
  - c) Mostre que, durante a descarga de um condensador, a diferença de potencial elétrico entre os terminais é  $U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ . Como varia esta diferença de potencial à medida que o condensador descarrega?
  - d) Mostre que a equação anterior também se pode escrever na forma  $\ln U = \ln U_0 - \frac{t}{RC}$ .
  - e) Determine, em função de  $R$  e de  $C$ , o tempo ao fim do qual a diferença de potencial nos terminais do condensador passa a metade do valor inicial.
  - f) Quando se elabora o gráfico de  $\ln U$  em função do tempo,  $t$ , verifica-se que a melhor linha de ajuste é uma reta. Qual é o significado físico do seu declive?





## ATIVIDADE LABORATORIAL 2.2 (cont.)

### Trabalho laboratorial

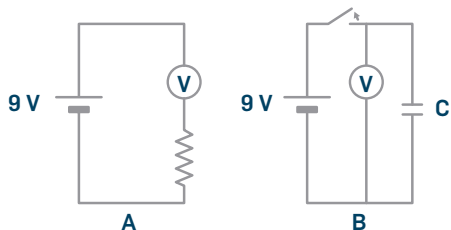


**Fig. 48** Material para descarga de um condensador num circuito  $RC$ .

Nesta atividade determina-se a resistência interna de um multímetro e, a partir da curva de descarga de um condensador num circuito  $RC$ , determina-se a capacidade do condensador e reconhece-se que essa descarga funciona como um relógio logarítmico.

**Material:** condensador de poliéster de  $10 \mu\text{F}$ , multímetro digital, fios de ligação, resistência de  $10 \text{ M}\Omega$ , pilha de  $9 \text{ V}$ , interruptor (**Fig. 48**).

Pretende construir-se um circuito  $RC$  em que  $R$  é a resistência interna de um multímetro digital quando funciona no modo voltímetro.



**Fig. 49** Esquemas de circuitos para estudar a descarga de um condensador.

1. Meça a diferença de potencial nos terminais da pilha e registre-a.
2. Ligue o voltímetro em série com a resistência de  $10 \text{ M}\Omega$  e com a pilha de  $9 \text{ V}$  (**Fig. 49-A**). Registe a medição do voltímetro.
3. Para traçar a curva de descarga do condensador,  $U = U(t)$ , ligue em paralelo o condensador, o multímetro e a pilha (**Fig. 49-B**).
4. Após desligar a pilha usando o interruptor, o condensador descarregará através da resistência do voltímetro. Registe numa tabela os valores marcados no voltímetro, em intervalos de tempo de  $15 \text{ s}$ , até o condensador ficar praticamente descarregado.

### Questões pós-laboratoriais



1. Considere o circuito esquematizado na **Fig. 49-A**.
  - a) Quantas vezes é menor a diferença de potencial no voltímetro do que a diferença de potencial na pilha?
  - b) Que relação existe entre a resistência do voltímetro e a resistência com ele associado em série? Qual deverá ser, por isso, a resistência interna do voltímetro?
2. Para a descarga do condensador, elabore o gráfico da diferença de potencial em função do tempo. Investigue e conclua se uma curva exponencial se ajusta aos pontos experimentais.
3. Construa o gráfico do logaritmo da diferença de potencial em função do tempo. Verifique que a melhor linha de ajuste é uma reta. Comparando-a com a equação  $\ln U = \ln U_0 - \frac{t}{RC}$ , obtenha a constante de tempo  $RC$ .
4. Determine a capacidade do condensador e compare-a com o valor nominal. Calcule o erro percentual associado, tendo como referência o valor indicado pelo fabricante.
5. Ao fim de quanto tempo é que a diferença de potencial nos terminais do condensador decresce para metade do valor inicial? E para um quarto?
6. Por que razão a descarga de um condensador pode funcionar como um «relógio logarítmico», podendo ser usada na medição do tempo?



## QUESTÕES

### Nota

Na resolução das questões, considere os seguintes valores:

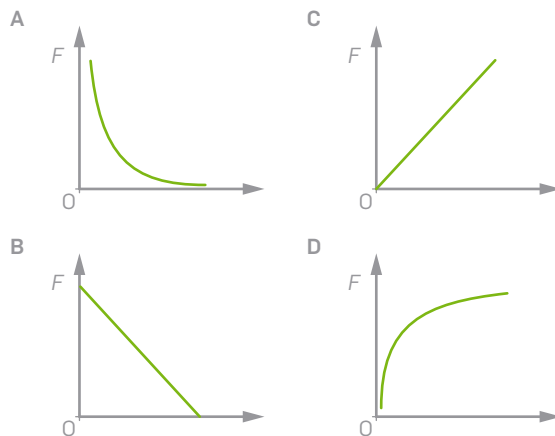
$$g = 10 \text{ m s}^{-2} \text{ e } k = 9,0 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$$

### 2.2.1 Interações entre cargas elétricas e Lei de Coulomb

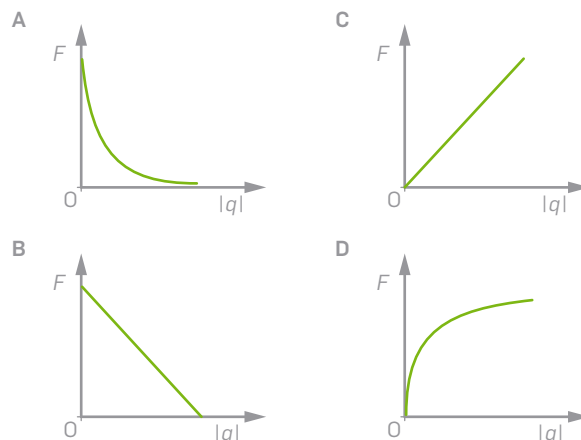
- As partículas que constituem um átomo (elétrons, prótons e neutrões) são elementares? Justifique.
- Numa notícia diz-se que foi descoberta uma nova partícula elementar com a carga de  $9,00 \times 10^{-19} \text{ C}$ . Indique, justificando, o que há de estranho nessa notícia.
- Duas esferas condutoras isoladas idênticas, **A** e **B**, estão carregadas com cargas  $3,0 \mu\text{C}$  e  $1,0 \mu\text{C}$ , respetivamente. Colocam-se as esferas em contacto.
  - Determine a carga final de cada esfera.
  - Qual das duas esferas ganha elétrons?
  - Quantos elétrons são transferidos de uma esfera para a outra?
- Duas cargas,  $Q$  e  $q$ , colocadas à distância  $r$  uma da outra, atraem-se com uma força de intensidade  $F$ .
  - Em que condições se pode afirmar que a intensidade da força elétrica entre duas cargas é diretamente proporcional ao produto dos módulos das cargas?
  - Se a distância entre essas cargas aumentasse 200%, a intensidade da força de uma carga sobre a outra seria igual a:
 

(A)  $\frac{F}{2}$     (B)  $\frac{F}{3}$     (C)  $\frac{F}{4}$     (D)  $\frac{F}{9}$
  - A que distância devem ser colocadas duas cargas,  $Q'$  e  $q'$ , de módulos duplo e triplo das cargas  $Q$  e  $q$ , respetivamente, para se atraírem com uma força de intensidade  $F$ ?
 

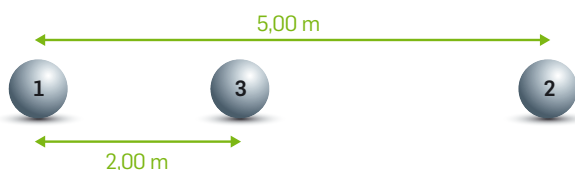
(A)  $\sqrt{6}r$     (B)  $6^2r$     (C)  $\frac{r}{\sqrt{6}}$     (D)  $\frac{r}{6^2}$
- Selecione o gráfico que pode representar a intensidade da força elétrica,  $F$ , entre duas cargas, em função:
  - da distância,  $r$ , que as separa.
  - do inverso do quadrado da distância,  $\frac{1}{r^2}$ , entre elas.



- Duas pequenas esferas condutoras iguais têm cargas  $q$  e  $3q$ , repelindo-se no ar com forças de intensidade  $4,00 \times 10^{-5} \text{ N}$  quando pousadas num plano horizontal isolador.
  - As esferas são depois postas em contacto e novamente levadas às posições iniciais. Caracterize a força entre elas.
  - Se as esferas fossem colocadas num meio cuja permissividade elétrica relativa é 8, as forças de repulsão teriam intensidade diferente? Justifique.
- Qual dos gráficos pode representar o módulo da força elétrica,  $F$ , exercida sobre uma carga,  $q$ , colocada num ponto de uma região onde há um campo elétrico, em função do módulo dessa carga,  $|q|$ ?



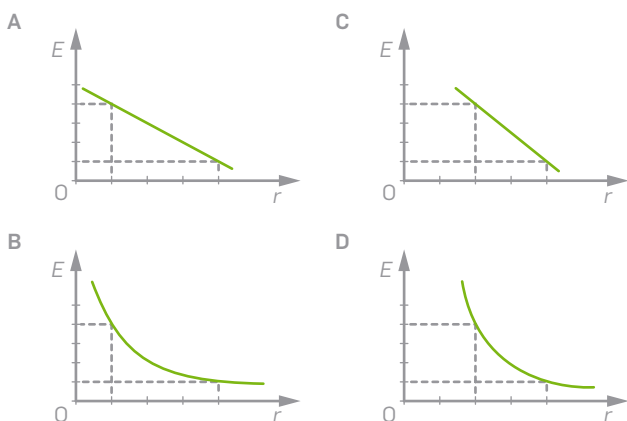
8. Os iões presentes no sal de cozinha estão muito ligados na rede cristalina, mas adquirem mobilidade quando o sal é dissolvido em água. Porquê?
9. Duas pequenas esferas, **1** e **2**, com cargas  $q_1 = 5,00 \mu\text{C}$  e  $q_2 > 0$ , estão no ar à distância de 5,00 m uma da outra. Entre essas duas esferas e a 2,00 m da esfera com carga  $q_1$  coloca-se uma esfera **3**, carregada com uma carga  $q_3$ , que fica em equilíbrio.



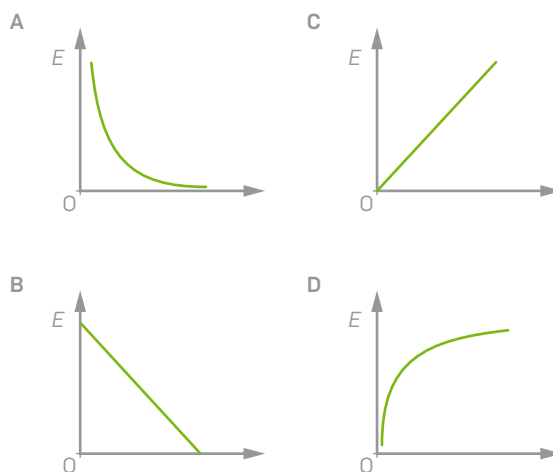
- a) A força elétrica exercida pela esfera **3** sobre a esfera **1** é:
- (A) igual à força elétrica exercida pela esfera **2** sobre a esfera **1**.
- (B) simétrica da força elétrica exercida pela esfera **2** sobre a esfera **1**.
- (C) igual à força elétrica exercida pela esfera **2** sobre a esfera **3**.
- (D) simétrica da força elétrica exercida pela esfera **2** sobre a esfera **3**.
- b) Determine a carga elétrica da esfera **2**,  $q_2$ .

### 2.2.2 Campo elétrico

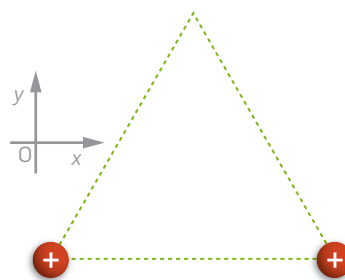
10. Selecione o gráfico que representa o módulo do campo elétrico,  $E$ , criado por uma carga pontual  $Q$  num certo ponto **P** em função da distância  $r$  de **P** a essa carga.



11. Uma carga pontual  $Q$  cria um campo elétrico. Dos gráficos seguintes, selecione o que pode representar o módulo do campo elétrico,  $E$ :
- a) num dado ponto em função do módulo da carga  $|Q|$ .
- b) em função da distância  $r$  a uma certa carga.
- c) em função do inverso do quadrado da distância à carga,  $\frac{1}{r^2}$ .



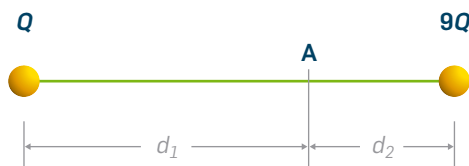
12. Duas cargas iguais, cada uma de  $5,00 \mu\text{C}$ , estão em dois dos vértices de um triângulo equilátero de lado 0,40 m, como se representa na figura.



- a) Em que ponto é nulo o campo elétrico criado por estas duas cargas?
- b) Determine o campo elétrico no outro vértice do triângulo. Utilize o referencial da figura.
- c) Se uma carga de  $3,00 \mu\text{C}$ , for colocada no outro vértice, qual será o módulo da força elétrica que atuará sobre ela?

13. Duas partículas carregadas, com cargas de módulo  $Q$  e  $9Q$ , estão a 10 cm de distância.

- a) No ponto **A** entre as cargas (ver figura), o campo elétrico é nulo. Relacione o sinal das cargas e determine a razão entre as distâncias  $d_1$  e  $d_2$ ,  $\frac{d_1}{d_2}$ .

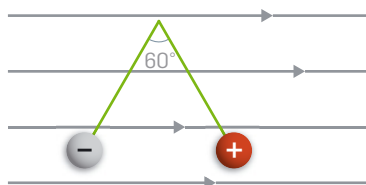


- b) Se as cargas forem  $-Q$  e  $9Q$ , sendo  $Q = 2,0 \mu\text{C}$ , em que ponto será nulo o campo elétrico?

14. Uma partícula de massa 3,00 g e carga negativa está em equilíbrio numa região onde, além do campo gravítico terrestre, há um campo elétrico uniforme terrestre de  $150 \text{ N C}^{-1}$ .

- a) Determine a carga elétrica da partícula.  
 b) Quais são a direção e o sentido do campo elétrico?  
 c) Trace as linhas de campo elétrico na região considerada.  
 d) Considerando desprezável a resistência do ar, pode concluir-se que uma partícula de massa 2,00 g, com a mesma carga elétrica, mover-se-ia, nessa região, no sentido:
- (A) ascendente, com movimento acelerado.  
 (B) ascendente, com movimento uniforme.  
 (C) descendente, com movimento acelerado.  
 (D) descendente, com movimento uniforme.

15. A figura mostra dois pêndulos em equilíbrio, de massa 2,00 g e cargas simétricas de módulo  $0,30 \mu\text{C}$ , suspensos do mesmo ponto por fios de comprimento 20 cm e imersos num campo elétrico uniforme. Determine a intensidade do campo elétrico.



### 2.2.3 Condutor em equilíbrio eletrostático. Campo elétrico à superfície e no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático. Efeito das pontas

16. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações.

- (A) Os elétrons distribuem-se no condutor, de modo a minimizar a repulsão entre eles.  
 (B) O excesso de carga distribui-se por todo o volume do condutor.  
 (C) No interior do condutor, o campo elétrico pode ter um valor qualquer.  
 (D) O campo elétrico é perpendicular à superfície do condutor, qualquer que seja a forma deste.  
 (E) O excesso de carga distribui-se à superfície do condutor, acumulando-se nas regiões mais suaves.

17. O condutor da figura está em equilíbrio eletrostático e a sua carga elétrica é negativa.



- a) Qual das afirmações é correta?
- (A) A superfície do condutor é uma superfície equipotencial.  
 (B) Na superfície do condutor, o campo elétrico é nulo porque a soma das cargas do condutor é zero.  
 (C) As cargas elétricas distribuem-se uniformemente por todo o volume do condutor.  
 (D) As cargas elétricas movem-se ao longo da superfície exterior do condutor.
- b) Indique um ponto onde o campo elétrico seja nulo e um ponto onde o campo elétrico seja máximo.  
 c) Trace o vetor campo elétrico em **B**.

18. No gerador de Van de Graaff, uma correia móvel é friccionada contra um pente metálico. A carga gerada é transportada pela correia até uma esfera condutora, onde é armazenada. Se o corpo eletrizado não tivesse forma esférica, o que poderia acontecer?
19. Durante uma forte trovoada uma pessoa está dentro de um automóvel no campo.
- O que são faíscas e como se originam?
  - Será seguro procurar abrigo por baixo de um pinheiro alto? Justifique.
  - Indique, justificando, se será mais seguro sair do automóvel ou ficar dentro dele.
20. Um aluno a trabalhar no laboratório verificou que um condutor eletrizado perturbava os aparelhos elétricos junto dele. Envolheu esse condutor com uma rede metálica descarregada. Explique por que é que este procedimento não resolve o problema identificado pelo aluno.

### 2.2.4 Energia potencial elétrica. Potencial elétrico e superfícies equipotenciais

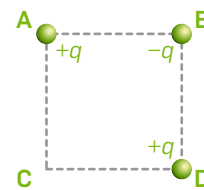
21. Classifique, justificando, as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas.
- Os campos elétrico e gravítico são conservativos.
  - A energia potencial elétrica de um par de cargas só depende da soma das cargas.
  - A energia potencial elétrica é diretamente proporcional ao inverso da distância entre duas cargas.
  - Quando uma partícula se desloca numa região onde existe um campo elétrico, a sua energia potencial elétrica e a sua energia cinética podem variar.
  - Quando se aproximam duas partículas que se repelem, a energia potencial elétrica do conjunto diminui.
22. A energia potencial elétrica resulta da força elétrica entre cargas, que é uma força conservativa.
- Calcule a energia potencial elétrica acumulada:
    - numa esfera carregada de um gerador de Van de Graaff que, quando ligada à terra, descarrega  $1,0 \mu\text{C}$ , sendo  $1,0 \times 10^5 \text{ V}$  a diferença de potencial.

- numa nuvem, com  $2,0 \text{ C}$  de carga e uma diferença de potencial de 100 milhões de volts relativamente ao solo.

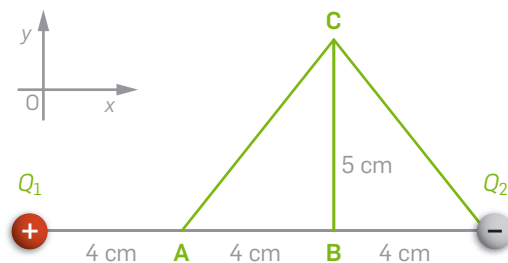
- Haverá razão para as pessoas não se importarem de tocar no gerador de Van de Graaff, mas terem medo de trovoadas?

23. Numa região onde existe um campo elétrico, uma carga pontual de  $8,0 \mu\text{C}$  é transportada de um ponto **P** até um ponto muito distante (onde o campo é nulo), a velocidade constante, tendo a força elétrica realizado um trabalho de  $20 \text{ J}$ .
- Determine a energia potencial elétrica do sistema quando a carga está em **P** e o potencial elétrico nesse ponto.
  - Qual é o trabalho realizado pelas forças exteriores no transporte da carga?
  - As linhas de campo apontam no sentido de **P** para o ponto distante ou ao contrário? Justifique.

24. Três cargas elétricas, de módulo igual a  $3,0 \mu\text{C}$ , são colocadas nos vértices **A**, **B** e **C** de um quadrado de  $10 \text{ cm}$  de lado (ver figura). Determine o trabalho realizado pela força elétrica no transporte de uma carga de  $-90 \text{ nC}$  do vértice **C** para o centro do quadrado.



25. Os pontos **A**, **B** e **C** da figura situam-se num campo elétrico criado pelas cargas  $Q_1$  e  $Q_2$ , cujo módulo é  $5,00 \mu\text{C}$ .

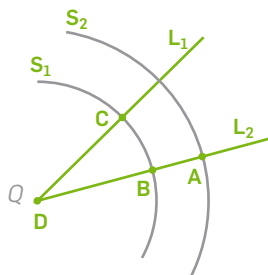


- Determine o campo elétrico no ponto **A** e a força exercida sobre uma carga de  $-2,00 \mu\text{C}$  aí colocada. Utilize o referencial da figura.



- b) Qual é o potencial elétrico nos pontos **A** e **C**?
- c) O trabalho realizado pela força elétrica que atua sobre uma carga transportada de **A** para **B**:
- (A) é o mesmo na trajetória ACB e diretamente de **A** para **B**.
- (B) é maior na trajetória ACB do que diretamente de **A** para **B**.
- (C) não depende do módulo da carga transportada,  $|q|$ .
- (D) não depende do sinal da carga.
- d) Calcule o trabalho realizado pela força elétrica que atua sobre uma carga de  $-2,00 \mu\text{C}$  se a transportarmos de **A** para **C** seguindo a trajetória ABC.

26. A figura mostra uma carga pontual  $Q$ , fixa no ponto **D**, linhas circulares  $S_1$  e  $S_2$  com centro em  $Q$  e linhas  $L_1$  e  $L_2$  perpendiculares a  $S_1$  e  $S_2$ . Quando uma carga negativa,  $q < 0$ , é transportada de **A** para **C** a força elétrica realiza um trabalho positivo.



Qual das afirmações é correta?

- (A) O trabalho realizado pela força elétrica quando  $q$  se move de **A** para **C** é maior do que quando se move de **A** para **B**.
- (B)  $S_1$  e  $S_2$  são linhas de campo elétrico.
- (C) A carga  $Q$  é uma carga positiva.
- (D) Quando  $q$  se move de **B** para **A**, a energia potencial elétrica do sistema diminui.
27. Entre as placas horizontais de um condensador plano, separadas por 5,00 cm, é aplicada uma diferença de potencial de 2,00 kV, sendo negativa a carga na placa superior.
- a) Qual é a diferença de potencial entre dois pontos distanciados de 2,00 cm se estiverem situados:
- i) na mesma linha de campo?
- ii) na mesma linha equipotencial?

- b) Determine a carga elétrica de uma partícula de 2,00 g que entra na região entre as placas do condensador e permanece com velocidade constante.

28. Num campo uniforme criado por duas placas planas e paralelas separadas de uma distância  $d$ , cuja diferença de potencial é  $U$ , abandona-se um eletrão e um próton a meia distância entre as placas. As massas do eletrão e do próton são  $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  e  $1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , respetivamente.

- a) Descreva o movimento de cada uma das partículas (não considere a interação entre elas nem a interação gravitacional).

- b) Qual delas adquiriu maior energia cinética? Justifique.

- c) Exprima a energia cinética com que o eletrão atinge uma das placas em função de  $U$ , de  $d$  e da carga elementar  $e$ .

- d) Qual das partículas demorou menos tempo a atingir a respetiva placa? Justifique.

- e) Determine a relação entre os tempos do próton e do eletrão para atingir a respetiva placa.

29. Um eletrão move-se horizontalmente ao longo de uma linha de um campo elétrico uniforme. Num dado ponto **A**, o módulo da sua velocidade é  $8,0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$  e, após deslocar-se 3,0 mm, num ponto **B**, passa a ser  $3,0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ . A massa do eletrão é  $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  e a carga elementar  $1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

- a) Qual é a variação da energia potencial do eletrão neste campo?

- b) Determine a diferença de potencial entre **B** e **A**.

- c) Caracterize o campo elétrico e as linhas equipotenciais.

- d) Que distância percorre o eletrão, a partir de **A**, até inverter o sentido do seu movimento?

- e) Após a inversão do sentido do movimento, o eletrão volta a passar em **A** com:

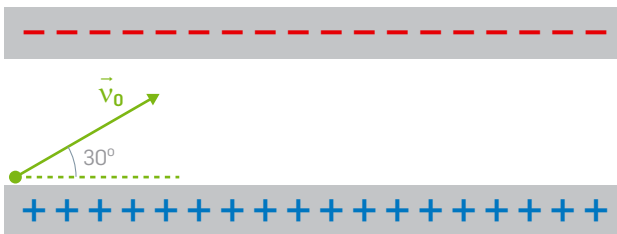
- (A) a mesma energia cinética.

- (B) menor energia cinética.

- (C) a mesma velocidade.

- (D) menor aceleração.

30. Num campo elétrico uniforme de intensidade  $1,00 \times 10^3 \text{ V m}^{-1}$ , produzido por placas planas e paralelas separadas de 2,00 cm, um eletrão é lançado, com velocidade  $\vec{v}_0$ , como mostra a figura. A massa do eletrão é  $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  e a sua carga é  $-1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$ .



- a) Qual é a diminuição máxima da energia cinética do eletrão, de modo a que não atinja a placa superior?
- b) A aceleração do eletrão é:
- (A) perpendicular às placas e aponta da placa positiva para a negativa.
- (B) perpendicular às placas e aponta da placa negativa para a positiva.
- (C) paralela à velocidade inicial do eletrão e com o mesmo sentido desta.
- (D) paralela à velocidade inicial do eletrão e com sentido oposto.
- c) Determine o módulo da velocidade máxima de lançamento, de modo a que não atinja a placa superior.
- d) Um eletrão é lançado com velocidade  $\vec{v}_0$ , de módulo  $2,0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ .
- i) Determine o tempo que demora a colidir com a placa positiva.
- ii) Qual é o seu deslocamento desde o instante inicial até colidir com a placa positiva?

## 2.2.5 Condensadores. Descarga de um condensador num circuito RC

31. Estabelece-se a diferença de potencial de 100 V entre as armaduras de um condensador de capacidade  $5,0 \mu\text{F}$ .
- a) Como se carrega um condensador?
- b) Determine a carga em cada armadura.
- c) A capacidade de um condensador, com uma certa geometria e um determinado dielétrico entre as suas armaduras,
- (A) aumenta com a diferença de potencial elétrico entre as armaduras.
- (B) depende da diferença de potencial elétrico entre as armaduras e da carga em cada uma delas.
- (C) aumenta com a carga elétrica em cada armadura.
- (D) não depende da diferença de potencial elétrico entre as armaduras, nem da carga em cada uma delas.
32. Um condensador de capacidade  $2,0 \mu\text{F}$  foi carregado ligando-se as suas armaduras a uma fonte de tensão. Cada uma delas ficou com cargas de módulo  $3,0 \times 10^{-4} \text{ C}$  e à distância de 4,00 mm.
- a) Qual é a diferença de potencial entre as placas e o módulo do campo elétrico?
- b) Estando o condensador ligado à fonte de tensão, afastaram-se as placas para o dobro da distância inicial. Que alteração ocorre:
- i) na diferença de potencial entre as placas?
- ii) no campo elétrico entre as placas?
33. O primeiro condensador foi a chamada garrafa de Leyden. Faça uma pesquisa sobre essa invenção e o seu funcionamento.

## Atividades laboratoriais

34. Duas placas compridas de cobre, ligadas a um gerador de tensão, estão mergulhadas numa solução condutora. A placa ligada ao polo negativo do gerador também está ligada ao polo negativo de um voltímetro, ao qual se atribui o potencial zero. A ponta de prova ligada ao terminal positivo do voltímetro move-se ao longo da solução perpendicularmente às placas. Mede-se o potencial em diversos pontos da solução e a distância da ponta de prova à placa positiva. Os valores obtidos estão registados na tabela seguinte.

$d / \text{cm}$	0,0	2,0	4,0	8,0	12,0
$V / \text{V}$	5,94	5,17	4,51	3,23	2,03

- Que tipo de campo elétrico é criado entre as placas?
- Estabeleça a equação da reta de ajuste ao gráfico do potencial  $V$  em função da distância  $d$ .
- Determine o valor mais provável do módulo do campo elétrico a partir do gráfico  $V(d)$ .
- Qual é a distância entre as placas?
- Que alteração ocorre na leitura do voltímetro quando a ponta de prova se move paralelamente às placas? Justifique.
- Se fosse tomada como referência a placa positiva, quais seriam os potenciais da ponta de prova para as mesmas distâncias da ponta de prova à placa positiva? E que diferenças teria a equação da reta de ajuste? Fundamente a sua resposta.

35. Um condensador de  $10 \mu\text{F}$  foi carregado com uma pilha de  $9,0 \text{ V}$ . Em seguida, procedeu-se à sua descarga utilizando um circuito  $RC$ , constituído pelo condensador e por um voltímetro cuja resistência interna é  $10,0 \text{ M}\Omega$ . Medindo-se o tempo de  $40 \text{ s}$  em  $40 \text{ s}$ , obteve-se a seguinte tabela de dados.

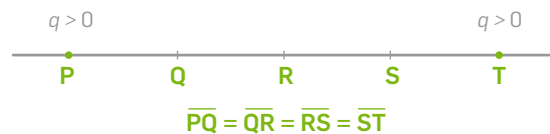
$t / \text{s}$	$U / \text{V}$
0	8,93
40	5,98
80	3,91
120	2,62
160	1,70
200	1,17
240	0,74
280	0,52
320	0,31
360	0,22

- Por que razão a descarga do condensador é tão rápida?
- Fundamente teoricamente o procedimento que permite determinar a capacidade do condensador.
- Calcule o valor experimental da capacidade do condensador.
- Preveja em que instante a diferença de potencial nos terminais do condensador é metade do valor inicial.
- Selecione o valor mais provável da diferença de potencial nos terminais do condensador no instante  $t = 20 \text{ s}$ .
 

<b>(A)</b> $8,19 \text{ V}$	<b>(C)</b> $7,32 \text{ V}$
<b>(B)</b> $7,46 \text{ V}$	<b>(D)</b> $6,03 \text{ V}$

## Questões globais

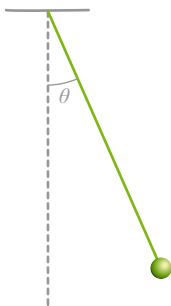
36. Duas cargas elétricas pontuais, de igual módulo, estão colocadas nos pontos **P** e **T**, como mostra a figura.



Qual das relações entre diferenças de potencial é correta?

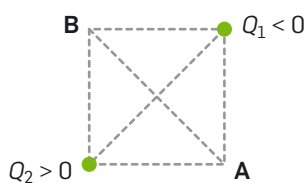
- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| <b>(A)</b> $V_Q - V_S > 0$ | <b>(C)</b> $V_Q - V_R < 0$ |
| <b>(B)</b> $V_Q - V_S = 0$ | <b>(D)</b> $V_R - V_S > 0$ |

37. Um pêndulo com carga  $q$  e massa  $m$  está imerso num campo elétrico uniforme, sendo as linhas de campo perpendiculares à direção da aceleração da gravidade de módulo  $g$ . O pêndulo fica em equilíbrio para um ângulo de suspensão  $\theta$  entre o fio e a vertical (ver figura).



- Obtenha a expressão para o módulo do campo,  $E$ , em função de  $q$ ,  $m$ ,  $g$  e  $\theta$ .
- Determine o ângulo para o qual a força elétrica exercida sobre o pêndulo é metade do seu peso.
- O ângulo  $\theta$  que o fio faz com a vertical:
  - aumenta com a massa  $m$ .
  - aumenta com a carga  $q$ .
  - não depende da aceleração da gravidade.
  - não depende do campo elétrico.
- Num determinado instante, corta-se o fio.
  - Caracterize, justificando, o movimento do corpo a partir desse instante.
  - Determine o módulo da aceleração do corpo em função de  $g$  e  $\theta$ .

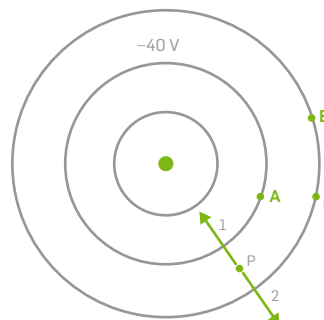
38. Duas cargas simétricas,  $Q_1$  e  $Q_2$ , estão fixas nos vértices de um quadrado (ver figura).



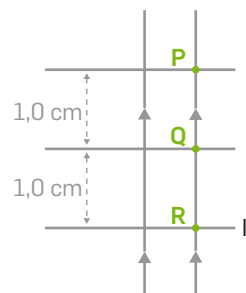
Qual das afirmações é correta?

- O potencial elétrico criado pelas duas cargas no vértice **A** é negativo.
- A diagonal **AB** do quadrado representa uma parte de uma linha equipotencial.
- A energia potencial elétrica do sistema de cargas é positiva.
- A energia potencial elétrica do sistema de cargas aumenta se as cargas passarem a ocupar vértices consecutivos do quadrado.

39. A figura representa o campo elétrico criado por uma carga elétrica pontual.



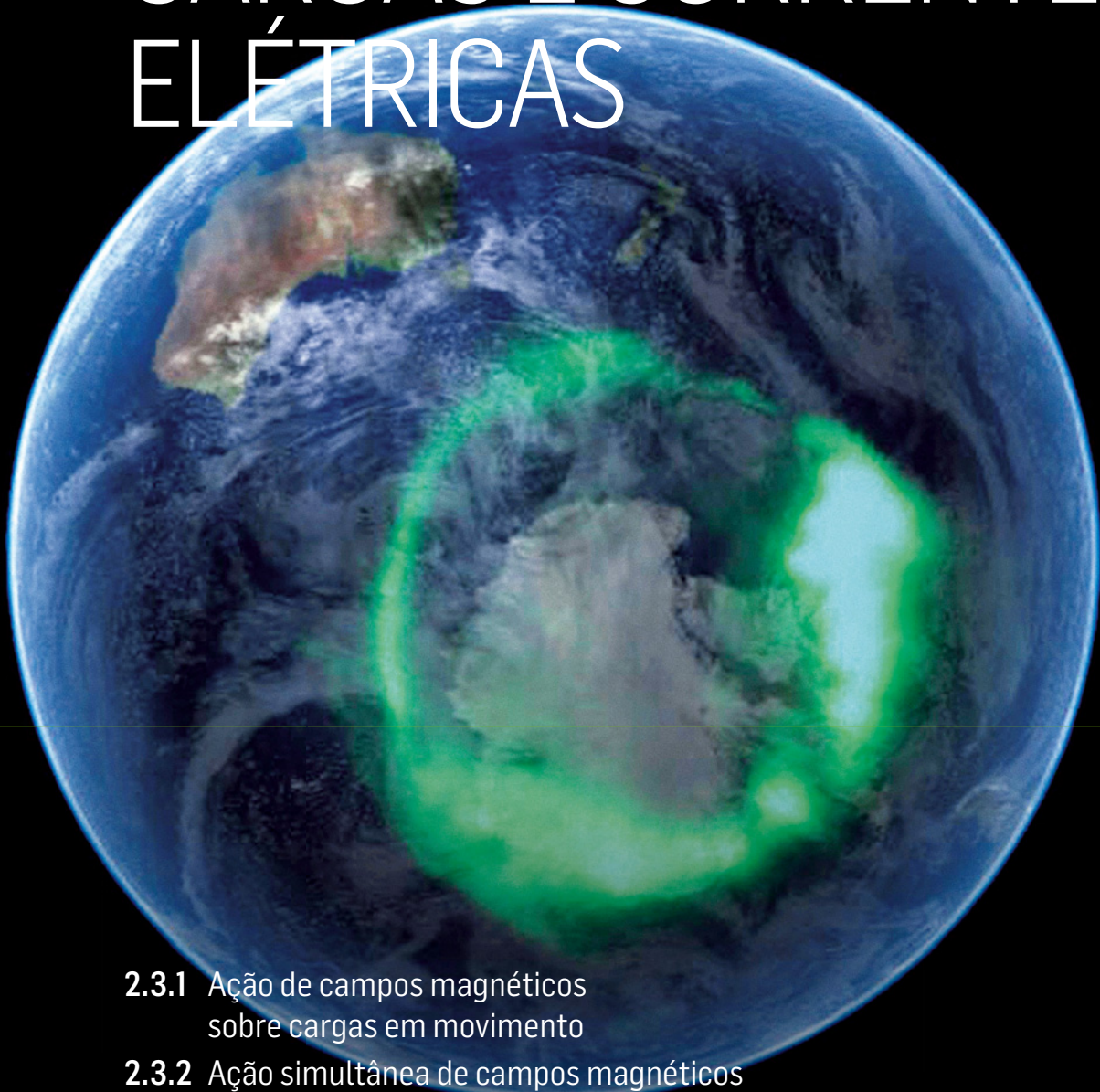
- Identifique o sinal da carga, as linhas traçadas e qual dos vetores, **1** ou **2**, pode representar o campo elétrico em **P**.
  - Qual das afirmações é correta?
    - Quando uma carga negativa se move de **B** para **C**, o trabalho realizado pela força elétrica é negativo.
    - A intensidade do campo elétrico é maior em **C** do que em **A**.
    - Quando uma carga se move de **B** para **C**, fica sujeita a uma força elétrica constante.
    - Quando uma carga negativa se move de **B** para **A**, o trabalho da força elétrica é negativo.
40. Um campo elétrico uniforme é produzido por duas placas planas e paralelas, sujeitas a uma diferença de potencial 90 V e distanciadas 5,0 cm. Na figura representam-se três linhas equipotenciais: **I**, **II** e **III**.



- Determine a diferença de potencial  $V_Q - V_R$ .
- Uma gota de óleo de  $3,6 \times 10^{-8}$  kg, eletricamente carregada, fica em equilíbrio entre as placas. Determine o módulo da carga da gota, em nC, e o respetivo sinal.



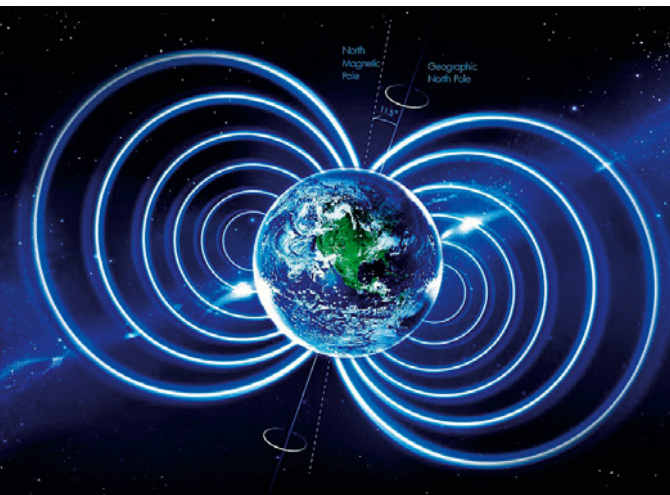
# 2.3 AÇÃO DE CAMPOS — MAGNÉTICOS SOBRE CARGAS E CORRENTES ELÉTRICAS



- 2.3.1 Ação de campos magnéticos sobre cargas em movimento
- 2.3.2 Ação simultânea de campos magnéticos e elétricos sobre cargas em movimento
- 2.3.3 Ação de campos magnéticos sobre correntes elétricas



**Fig. 1** Os trabalhos efetuados por Ampère (A) e Faraday (B) permitiram a eletricidade e o magnetismo, fornecendo as bases da teoria eletromagnética formulada por Maxwell (C).



**Fig. 2** O planeta é protegido das partículas cósmicas pela ação de forças magnéticas associadas ao campo magnético terrestre (imagem artística).



**Fig. 3** As forças magnéticas fazem mover os ponteiros de certos aparelhos elétricos de medida e provocam rotações em motores elétricos.

A ação de campos magnéticos sobre magnetes já era conhecida na antiga civilização chinesa, através do uso da bússola: o desvio da agulha, que é um pequeno magnete, deve-se ao campo magnético terrestre, manifestado na força magnética que faz mover a agulha.

Atualmente vivemos rodeados de magnetes. Estima-se que em cada lar europeu exista, em média, cerca de uma centena deles espalhados por micro-ondas, televisores, frigoríficos, computadores, rádios, telefones e telemóveis, motores, leitores de CD ou MP3, altifalantes, microfones, etc.

Sabemos do 11.º ano que um campo magnético pode ser criado por magnetes, mas também por cargas elétricas em movimento. Foi o dinamarquês Hans Christian Oersted quem observou, em 1820, que uma corrente elétrica num fio condutor perturbava uma bússola na vizinhança do fio. Esta primeira manifestação de uma relação entre eletricidade e magnetismo viria a ser confirmada em trabalhos experimentais por Ampère, em França, e por Faraday, em Inglaterra (Fig. 1).

Faraday introduziu a noção de campo para descrever as interações eletromagnéticas e descobriu, em 1831, o fenómeno da indução eletromagnética. Em 1865, o escocês James Clerk Maxwell (Fig. 1) sintetizou, em linguagem matemática, os resultados das experiências anteriores, formulando a teoria do campo eletromagnético. Maxwell não só unificou a eletricidade e o magnetismo como descobriu uma relação entre campo eletromagnético e luz: afirmou que o campo eletromagnético se propagava sob a forma de ondas – as ondas eletromagnéticas – à velocidade da luz, sugerindo que a luz era essa onda. O alemão Heinrich Hertz viria, em 1887, a comprovar essa ideia, produzindo ondas de rádio.

Um magnete (como a agulha de uma bússola) colocado num campo magnético fica sujeito a uma força magnética. Também partículas com carga elétrica e em movimento, ou fios percorridos por corrente elétrica (que são partículas com carga em movimento), imersos num campo magnético, podem ficar sujeitos a forças magnéticas. São essas forças que protegem a Terra de partículas cósmicas de alta energia (Fig. 2) e estão na base de funcionamento de certos aparelhos elétricos de medida (analógicos) e de motores de corrente contínua (Fig. 3).

Vamos caracterizar as forças magnéticas que atuam sobre partículas carregadas em movimento e ver algumas das suas aplicações.

## 2.3.1 Ação de campos magnéticos sobre cargas em movimento

Tal como os campos gravítico e elétrico, o campo magnético  $\vec{B}$  (também designado, de forma mais rigorosa, por campo de indução magnética) é identificado pela **força magnética**,  $\vec{F}_m$ , que exerce sobre uma partícula. No entanto, para haver força, a partícula tem de ter carga elétrica,  $q$ , e estar animada de uma certa velocidade,  $\vec{v}$ . Verifica-se experimentalmente que a intensidade da força magnética depende dessas grandezas:

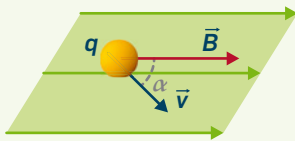
**Força magnética:** só atua sobre partículas com carga e em movimento quando a sua velocidade não tem a direção do campo magnético.

### Intensidade da força magnética, $F_m$ , sobre uma partícula com carga e em movimento

Depende do módulo da carga da partícula,  $|q|$ , e do módulo da sua velocidade,  $v$ , assim como do módulo do campo magnético onde está imersa a partícula,  $B$ , e do ângulo  $\alpha$  entre os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ . É dada pela expressão:

$$F_m = |q| v B \sin \alpha$$

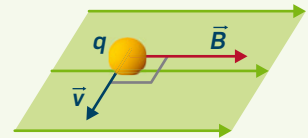
N                      T  
C   ms<sup>-1</sup>



- A força será máxima se  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  forem perpendiculares:

$$(\alpha = 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha = 1):$$

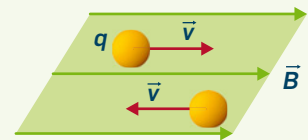
$$F_m = |q| v B$$



- A força será nula se  $v$  e  $B$  tiverem a mesma direção:

$$(\alpha = 0^\circ \text{ ou } \alpha = 180^\circ \Rightarrow \sin \alpha = 0):$$

$$F_m = 0$$

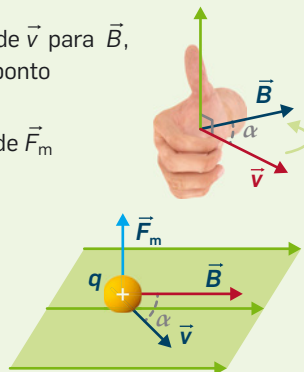


A força magnética,  $\vec{F}_m$ , é sempre perpendicular a  $\vec{v}$  e a  $\vec{B}$ , ou seja, ao plano que contém estes dois vetores. O sentido desta força pode ser obtido a partir de uma das seguintes regras:

#### Regra da mão direita

Curvam-se os dedos no sentido de  $\vec{v}$  para  $\vec{B}$ , tendo os dois vetores o mesmo ponto de aplicação:

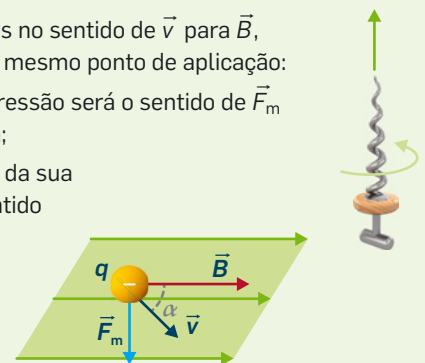
- o polegar apontará no sentido de  $\vec{F}_m$  se a carga for positiva;
- o polegar apontará no sentido contrário ao de  $\vec{F}_m$  se a carga for negativa.



#### Regra do saca-rolhas

Roda-se um saca-rolhas no sentido de  $\vec{v}$  para  $\vec{B}$ , tendo os dois vetores o mesmo ponto de aplicação:

- o sentido da sua progressão será o sentido de  $\vec{F}_m$  se a carga for positiva;
- o sentido contrário ao da sua progressão será o sentido de  $\vec{F}_m$  se a carga for negativa.



As características anteriores da força magnética podem ser obtidas diretamente da expressão

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

onde o sinal  $\times$  indica não uma multiplicação normal, mas sim uma operação entre dois vetores chamada **produto vetorial**. Nesta expressão,  $q$  é a carga da partícula, **positiva** ou **negativa**, e não o seu módulo!

Caracterizemos o produto vetorial de dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (Fig. 4):

**Produto vetorial entre dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ :**

Simboliza-se por  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

O seu resultado é um vetor  $\vec{c}$  com as seguintes características:

- módulo  $c = ab \sin \alpha$  ( $a$  e  $b$  são os módulos de  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , respetivamente, e  $\alpha$  é o ângulo entre  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ );
- direção perpendicular ao plano que contém  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (e, portanto, perpendicular também a  $\vec{a}$  e a  $\vec{b}$ );
- sentido dado, por exemplo, pela regra da mão direita (curvando os dedos da mão direita no sentido de  $\vec{a}$  para  $\vec{b}$ , o polegar aponta no sentido de  $\vec{c}$ ).

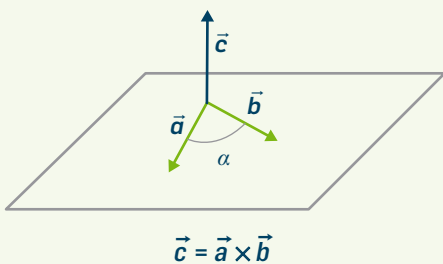


Fig 4 Produto vetorial de dois vetores.

Muitas vezes representam-se os vetores  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{F}_m$  do seguinte modo: desenham-se no plano do papel o vetor  $\vec{v}$  e um dos outros dois vetores ( $\vec{B}$  ou  $\vec{F}_m$ ). O terceiro vetor, perpendicular aos vetores no plano do papel, simboliza-se por  $\times$  ou por  $\bullet$  conforme aponta para trás ou para a frente do plano do papel, respetivamente (Fig. 5).



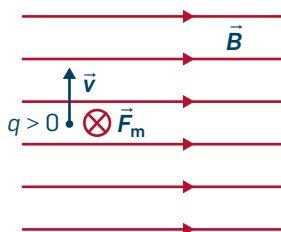
Vetor aponta para trás do plano do papel



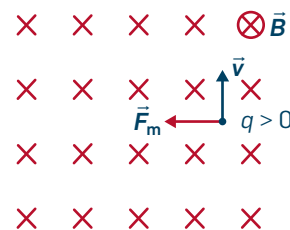
Vetor aponta para a frente do plano do papel

Fig. 5 Símbolos para indicar o sentido de um vetor perpendicular ao plano do papel.

Na Fig. 6 apresentam-se dois exemplos de marcação de vetores quando  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares.



$\vec{v}$  e  $\vec{B}$  estão no plano do papel:  
 $\vec{F}_m$  é perpendicular ao plano do papel.



$\vec{v}$  e  $\vec{F}_m$  estão no plano do papel:  
 $\vec{B}$  é perpendicular ao plano do papel.

Fig. 6 Exemplos de marcação dos vetores  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{F}_m$  quando um deles é perpendicular ao plano do papel.



Como a força magnética exercida sobre uma partícula carregada é sempre perpendicular à sua velocidade, a força não altera o módulo da velocidade, mas apenas a direção, qualquer que seja a trajetória da partícula.

Como se mantém o módulo da velocidade, conclui-se que a energia cinética da partícula não é alterada pela ação do campo magnético, ou seja, o **trabalho realizado pela força magnética** é nulo.

A unidade SI de campo magnético é o tesla (T).

Um campo magnético com a intensidade de 1 T é muito forte. Para comparação, a intensidade do campo magnético terrestre varia de 20  $\mu\text{T}$  a 60  $\mu\text{T}$  (Fig. 7).

Os campos produzidos pelos eletromagnetes mais potentes disponíveis em laboratório não excedem 20 T. Campos da ordem da centena de teslas só podem ser produzidos na Terra durante tempos muito curtos. Porém, alguns corpos celestes como os pulsares possuem campos magnéticos muito mais intensos do que os produzidos em laboratório.

A Tab. 1 mostra a ordem de grandeza de alguns campos magnéticos que encontramos na Natureza e nos laboratórios de física.

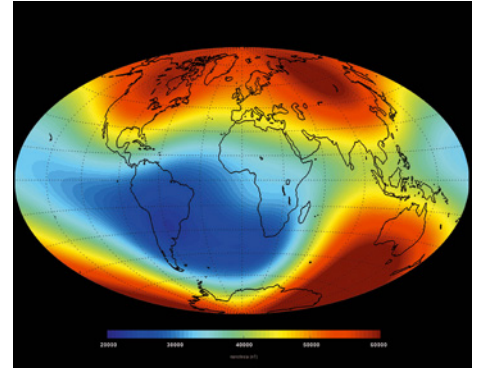
Fonte do campo magnético	Intensidade do campo (T)
Pulsar	$10^{11}$
Eletromagnete pulsado	$10^2$
Eletromagnete supercondutor contínuo	$10^1$
Eletromagnete de laboratório	$10^{-2}$ a $10^2$
Eletromagnete supercondutor usado em Imagiologia por Ressonância Magnética	1
Magnete em forma de barra	$10^{-4}$ a $10^{-2}$
Superfície do Sol	$10^{-4}$ a $10^{-2}$
Superfície da Terra	$10^{-4}$ a $10^{-5}$
Cérebro humano	$10^{-13}$

Um campo pode ser reconhecido pela ação que exerce. A expressão da força magnética representa essa ação, tal como as expressões equivalentes já estudadas para os campos gravítico e elétrico.

No entanto, o campo magnético tem uma característica muito diferente dos campos elétrico e gravítico. Enquanto as forças gravíticas e elétrica têm a direção do respetivo campo, a força magnética é perpendicular ao campo magnético! O quadro seguinte sumaria a relação das forças com os respetivos campos.

Força gravítica	Força elétrica	Força magnética
$\vec{F}_g = m \vec{g}$	$\vec{F}_e = q \vec{E}$	$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$

**Trabalho realizado pela força magnética:** é nulo, pois a força é sempre perpendicular à velocidade; a energia cinética da partícula é constante.



**Fig 7** Mapa da intensidade do campo magnético terrestre: varia de 20  $\mu\text{T}$  (azul) a 60  $\mu\text{T}$  (vermelho). A medição foi feita pelos três satélites da missão SWARM da Agência Espacial Europeia (ESA).

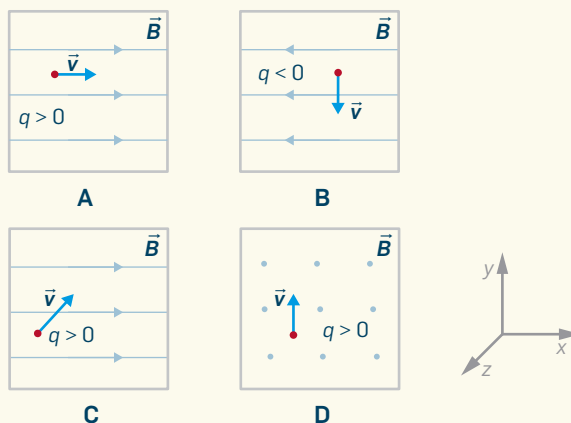
**Tab 1** Intensidades típicas de campos magnéticos.

## Questão resolvida 1



A figura representa quatro situações de uma partícula carregada, de carga  $q$ , que se move com velocidade  $\vec{v}$  num campo magnético  $\vec{B}$ . Na situação C, a velocidade da partícula faz um ângulo  $\alpha$  com o campo magnético.

Determine, para cada uma delas, a força magnética que se exerce sobre a partícula, considerando o referencial indicado.



Utilizamos a regra da mão direita, tendo o cuidado de aplicar os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  no mesmo ponto.

- A. A velocidade e o campo magnético têm a mesma direção, pelo que a força magnética é nula.
- B. A força é perpendicular ao plano do papel. Curvando os dedos no sentido de  $\vec{v}$  para  $\vec{B}$ , o sentido é horário e o polegar aponta para trás do plano do papel. Mas, como a carga é negativa, a força aponta para cá do plano do papel. Uma vez que  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares, a força é  $\vec{F}_m = |q| v B \vec{e}_z$ .
- C. A força é perpendicular ao plano do papel. Curvando os dedos no sentido de  $\vec{v}$  para  $\vec{B}$ , o sentido é horário e o polegar aponta para trás do plano do papel. Como a carga

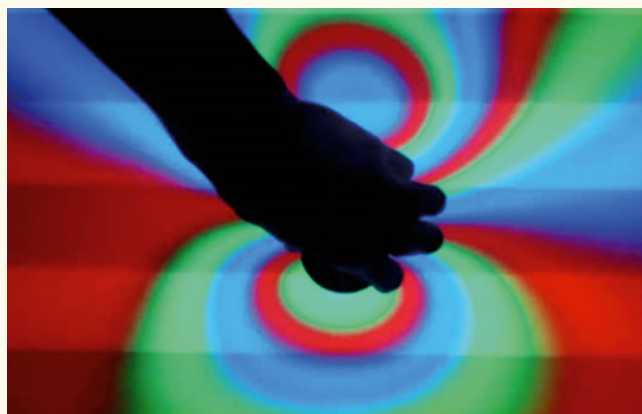
é positiva, a força tem o sentido indicado pelo polegar. Uma vez que  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  não são perpendiculares, a força é  $\vec{F}_m = -|q|vB \sin \alpha \vec{e}_z$ , sendo  $\alpha$  o ângulo entre  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ .

- D. Como  $\vec{B}$  é perpendicular ao plano do papel e aponta no sentido positivo do eixo dos  $zz$ , a força tem de estar no plano do papel. E, como a velocidade tem a direção do eixo dos  $yy$ , a força (que é perpendicular a  $\vec{v}$  e a  $\vec{B}$ ) tem a direção do eixo dos  $xx$ . Curvando os dedos no sentido de  $\vec{v}$  para  $\vec{B}$ , o que é o mesmo que girar o eixo dos  $yy$  para o eixo dos  $zz$ , o polegar aponta no sentido positivo do eixo dos  $xx$ . Como a carga é positiva, a força tem o sentido indicado pelo polegar. Uma vez que  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares, a força é  $\vec{F}_m = |q| v B \vec{e}_x$ .

## Atividade 1



1. A imagem num ecrã de um televisor antigo (CRT) é produzida por um feixe de eletrões que varre um ecrã fluorescente (material que emite luz quando excitado pelo feixe eletrónico). Verifique a ação de um campo magnético aproximando um ímã do ecrã de um televisor (que tem de ser velho, pois os danos causados pelo campo magnético podem ser irreversíveis!); observe a distorção da imagem resultante do desvio da trajetória do feixe por ação de forças magnéticas.
2. Os campos magnéticos fortes podem causar a levitação de objetos e de seres vivos (tais como sapos!). Investigue essa possibilidade.



**Que tipo de trajetória terá uma partícula carregada, de massa  $m$  e carga  $q$ , numa região onde existe um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ ?**

Suponhamos que a massa da partícula é tão pequena que o seu peso é desprezável: a força resultante sobre a partícula será apenas a força magnética.

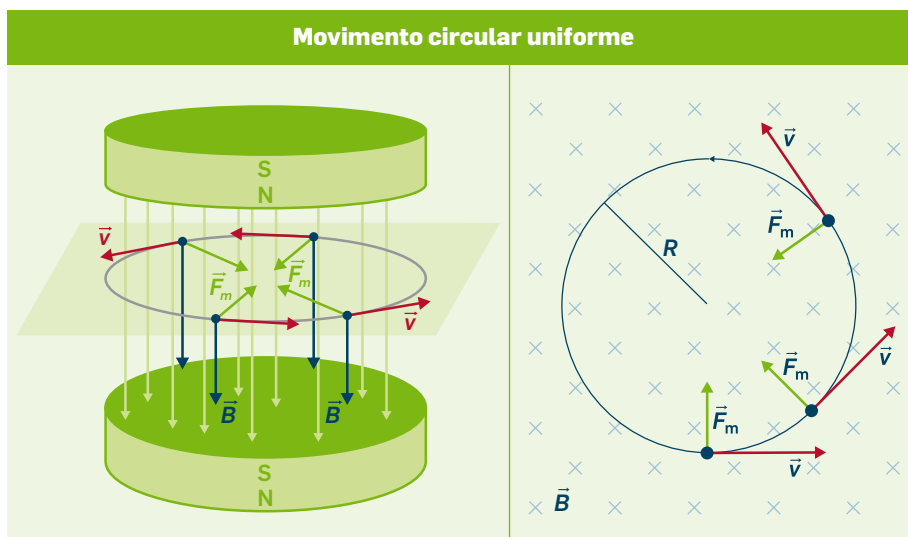
Vejam os três casos possíveis, de acordo com a orientação da velocidade e do campo magnético.

### 1. Partícula lançada num campo magnético com a mesma direção do campo

Como  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  têm a mesma direção,  $\vec{F}_m = \vec{0}$ . Pela Primeira Lei de Newton, a partícula move-se com movimento retilíneo e uniforme.

### 2. Partícula lançada num campo magnético numa direção perpendicular ao campo

Neste caso a força magnética tem o seu valor máximo,  $F_m = |q|Bv$ , sendo os vetores  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{F}_m$  perpendiculares entre si. Como a força resultante coincide com a força magnética e esta é perpendicular à velocidade, tem apenas componente centrípeta, apontando sempre para o centro da trajetória! Como o plano definido pela velocidade e pela força magnética se mantém constante, a partícula adquire um movimento circular uniforme, cujo sentido depende do sinal da carga (pois esta determina o sentido da força magnética), podendo obter-se o raio da trajetória (**Fig. 8**).



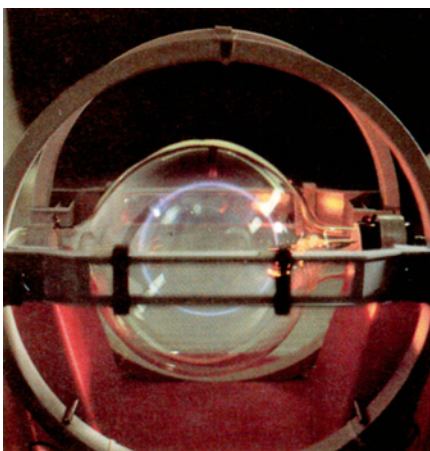
**Fig. 8** Movimento circular uniforme de uma partícula com carga positiva lançada perpendicularmente a um campo magnético uniforme e sua representação no plano do papel. O raio da trajetória depende de características da partícula e do campo magnético.

Como  $F_m = m \frac{v^2}{R}$  (Segunda Lei de Newton) e  $F_m = |q|Bv$ , então

$$|q|Bv = \frac{mv^2}{R} \Leftrightarrow R = \frac{mv}{|q|B}$$

O raio da trajetória:

- é diretamente proporcional ao momento linear da partícula,  $p = mv$ , para uma partícula carregada que se mova num campo magnético  $\vec{B}$ ;
- é inversamente proporcional à intensidade do campo magnético para uma partícula carregada que se mova com uma certa velocidade  $\vec{v}$ .



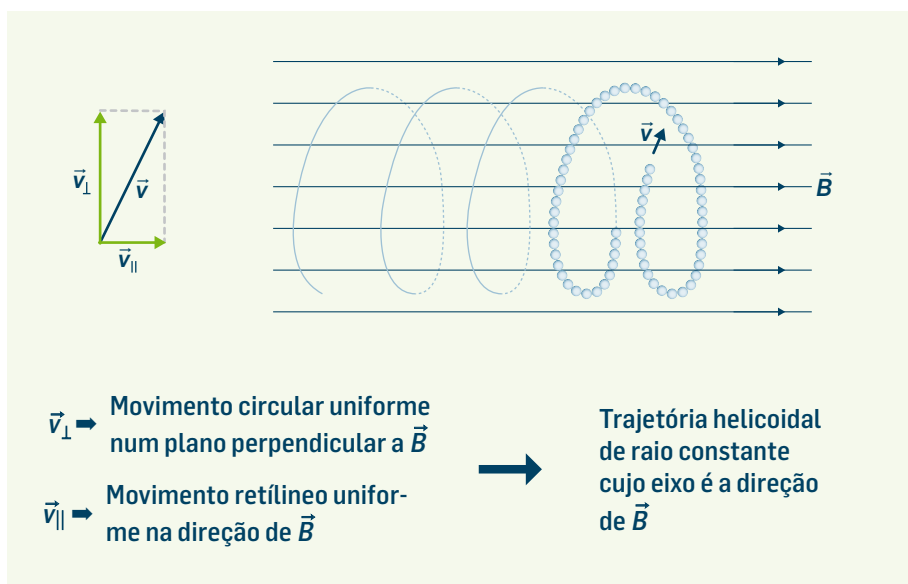
**Fig. 9** Trajetória circular de um feixe de elétrons num campo magnético uniforme, revelada pela luminescência do gás existente na ampola de vidro.

A **Fig. 9** mostra a trajetória circular de um feixe de elétrons num campo magnético uniforme, produzido numa ampola de vidro por um par de bobinas. A interação dos elétrons com um gás existente no interior da ampola permite ver a trajetória circular desse feixe. O campo magnético é paralelo ao eixo das bobinas e perpendicular à trajetória dos elétrons.

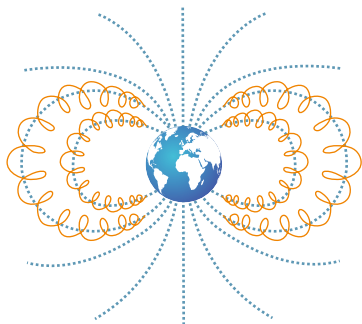
### 3. Partícula lançada num campo magnético numa direção que não coincide com a do campo magnético nem lhe é perpendicular

Neste caso,  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  formam um ângulo  $\alpha$  diferente de  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $180^\circ$  e o módulo da força magnética é  $F_m = |q|Bv \sin \alpha$ .

Podemos decompor a velocidade inicial em duas componentes (**Fig. 10**), uma paralela e a outra perpendicular ao campo magnético. Sobre a componente paralela atua uma força magnética nula, que não altera essa componente: o movimento é retilíneo uniforme na direção de  $\vec{B}$ . A componente perpendicular origina um movimento circular uniforme num plano perpendicular a  $\vec{B}$ . A sobreposição dos dois movimentos origina uma trajetória helicoidal (em forma de hélice), de raio constante, que segue a direção de  $\vec{B}$ .



**Fig. 10** Trajetória helicoidal de uma partícula com carga positiva num campo magnético uniforme.



**Fig. 11** As partículas cósmicas descrevem movimentos em hélice, de vaivém entre os polos, em torno das linhas de campo magnético terrestre.

O raio da hélice descrita é constante quando o campo magnético é uniforme.

Quando o campo magnético não é uniforme (como o campo magnético terrestre) a hélice descrita tem um raio variável, que é maior onde o campo é menor. Essa propriedade explica o comportamento das partículas cósmicas (que têm carga) muito energéticas vindas das estrelas ao atingirem as altas camadas da atmosfera: as forças magnéticas fazem-nas descrever hélices de raio variável em torno das linhas de campo (**Fig. 11**). Como há inversão de sentido do movimento nos polos, verifica-se um movimento de vaivém entre os dois polos, o que faz com que as partículas fiquem aprisionadas pelo campo. Sem esta «blindagem magnética», a vida seria impossível na Terra.



## Questão resolvida 2



- a) Prove que a frequência,  $f$ , do movimento circular de partículas de massa  $m$  e carga  $q$ , lançadas com velocidade  $\vec{v}$  no mesmo campo magnético uniforme,  $\vec{B}$ , não depende da sua velocidade mas sim da razão  $\frac{|q|}{m}$ .
- b) Se a partícula for um elétron ( $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$  kg e  $|q| = 1,60 \times 10^{-19}$  C), qual será o tempo de uma volta completa num campo magnético de intensidade 100 mT?
- c) Que trabalho realizará a força magnética que atua sobre o elétron da alínea anterior quando este dá uma volta completa? E qual será a variação da sua energia cinética?



a) No movimento circular uniforme,  $v = \omega R$ . Pela Segunda Lei de Newton,

$$F_m = m \frac{v^2}{R} \text{ ou } |q|vB = m \frac{v^2}{R}, \text{ donde } v = \frac{|q|BR}{m}. \text{ Então, } \omega R = \frac{|q|BR}{m}, \text{ ou}$$

seja,  $\omega = \frac{|q|B}{m}$ . Como  $\omega = 2\pi f$ , vem  $f = \frac{1}{2\pi} \frac{|q|}{m} B$ . Para um dado campo magnético, a frequência só depende, portanto, da razão  $|q|/m$ .

b) O tempo de uma volta completa é um período (que é o inverso da frequência):  $T = 2\pi \frac{m}{|q|B}$ .

O período de um elétron que se move num campo  $B = 100$  mT = 0,100 T

$$\text{é } T = 2\pi \times \frac{9,11 \times 10^{-31}}{1,60 \times 10^{-19} \times 0,100} = 3,58 \times 10^{-10} \text{ s.}$$

c) Como a força magnética é sempre perpendicular à velocidade em qualquer ponto da trajetória, o trabalho por ela realizado é nulo. Como a força resultante coincide com a força magnética, o trabalho da força resultante é nulo e, pelo Teorema da Energia Cinética, será nula a variação da energia cinética da partícula.

## Atividade 2



As auroras polares são fenómenos óticos naturais cuja origem é o campo magnético terrestre.

Faça uma pesquisa que dê resposta às seguintes questões:

- O que são auroras polares? Como se formam? Quando são mais frequentes? Em que zonas ocorrem mais frequentemente?
- O que é a cintura de Van Allen?
- As auroras polares são exclusivas do nosso planeta?



## 2.3.2 Ação simultânea de campos magnéticos e elétricos sobre cargas em movimento

Quando atuam simultaneamente um campo elétrico  $\vec{E}$  e um campo magnético  $\vec{B}$  sobre uma partícula carregada, ela fica sujeita à resultante das forças elétrica e magnética, a chamada **força de Lorentz**:

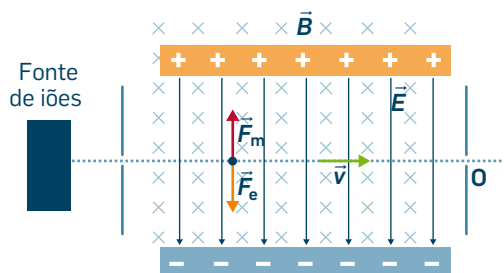
$$\vec{F}_{em} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Vejam algumas aplicações.

### 1. Seletor ou filtro de velocidades

**Seletor ou filtro de velocidades:** permite filtrar partículas de igual velocidade através da ação conjunta de um campo elétrico e de um campo magnético perpendiculares.

Num **seletor de velocidades** há um campo magnético,  $\vec{B}$ , e um campo elétrico,  $\vec{E}$ , uniformes mas cruzados, isto é, perpendiculares (**Fig. 12**). O campo elétrico pode ser criado por um condensador de placas paralelas e o campo magnético por um ímã apropriado.



**Fig. 12** Esquema de um seletor de velocidades.

Um íon de peso desprezável e carga  $q$  positiva, proveniente de uma fonte de íões, entra no condensador com velocidade  $\vec{v}$ , paralela às placas, ou seja, perpendicular a cada um dos campos. O íon fica sujeito a duas forças simétricas:

- força elétrica,  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ ;
- força magnética,  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ , com a mesma direção da força elétrica mas sentido oposto e de módulo  $F_m = |q|vB$ .

Como as forças se equilibram, vem:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0 \Rightarrow F_e = F_m \Leftrightarrow |q|E = |q|vB \Leftrightarrow v = \frac{E}{B}$$

A trajetória das partículas depende da sua velocidade à entrada do condensador:

$$v = \frac{E}{B}$$

As partículas não sofrem desvio, saindo pela abertura O, pois

$$F_e = F_m$$

$$v > \frac{E}{B}$$

As partículas são desviadas para a placa de cima, pois

$$F_m > F_e$$

$$v < \frac{E}{B}$$

As partículas são desviadas para a placa de baixo, pois

$$F_e > F_m$$

Se os íões lançados pela fonte tiverem todos a mesma velocidade, poderemos medi-la selecionando uma combinação de campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  de tal modo que não haja desvio das partículas.

Se os íões forem lançados com diferentes velocidades, poderemos usar o aparelho como filtro ou seletor de velocidades, uma vez que só sairão pela abertura **O** os íões com velocidade  $v = \frac{E}{B}$ .

Nestes aparelhos é comum que o módulo de  $\vec{B}$  seja constante e que o campo  $\vec{E}$  seja variável (varia-se este campo regulando a diferença de potencial elétrico entre as placas do condensador).

### Questão resolvida 3



Num seletor de velocidades, o campo magnético tem a intensidade de 200 mT. A distância entre as placas do condensador é 5,0 cm e a tensão aplicada às placas é 500 V.

Determine o módulo da velocidade das partículas que passam pelo seletor de velocidades sem sofrerem desvio.

O módulo do campo elétrico entre as placas é:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{5,00 \times 10^2}{5,0 \times 10^{-2}} = 1,00 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}$$

Se desprezarmos o peso das partículas, a força resultante será nula, pelo que as forças elétrica e magnética serão simétricas, tendo, por isso, o mesmo módulo:

$$F_e = F_m \Leftrightarrow |q|E = |q|vB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{E}{B} = \frac{1,00 \times 10^4}{0,200} = 5,0 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 180\,000 \text{ km h}^{-1}$$

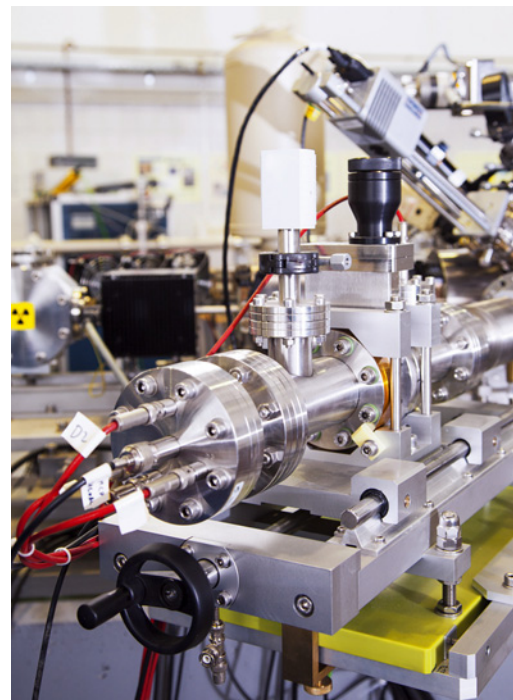
## 2. Espetrómetro de massa

Outra aplicação da ação de campos elétricos e magnéticos é o **espetrómetro de massa** (Fig. 13), instrumento que permite identificar substâncias através do seu comportamento nestes campos.

O seu funcionamento fundamenta-se na separação de íões com base na razão carga/massa. Se os íões tiverem a mesma carga e esta for conhecida, o espetrómetro poderá ser usado para medir a massa.

O material a analisar num espetrómetro é inicialmente evaporado e depois ionizado através do bombardeamento de eletrões, o que ocorre na chamada fonte de íões. Deste processo resultam íões positivos.

Estes íões são primeiro acelerados por um campo elétrico intenso, entrando depois com grande velocidade numa câmara onde existe um campo magnético uniforme.

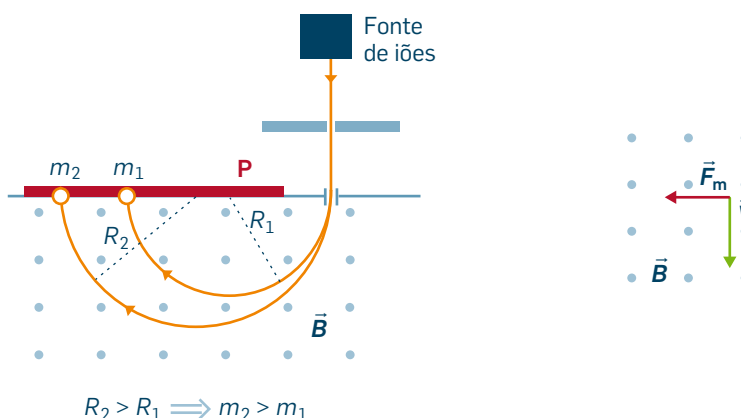


**Fig. 13** A análise química de uma substância pode ser realizada com um espetrómetro de massa.

**Espetrómetro de massa:** iões de igual carga descrevem trajetórias semicirculares de raio proporcional à sua massa.

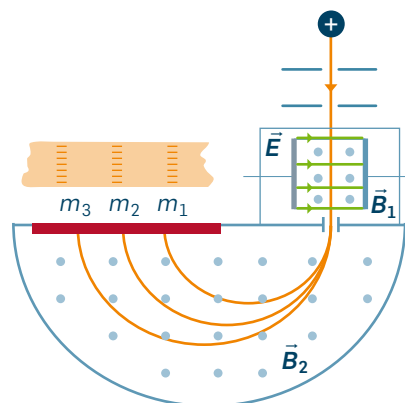
**Fig. 14** Espetrómetro de massa: iões com a mesma carga descrevem trajetórias semicirculares, cujo raio será tanto maior quanto maior for a sua massa.

A **Fig. 14** mostra, em esquema, um **espetrómetro de massa** e a orientação dos vetores  $\vec{B}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{F}_m$ .



Como a velocidade  $\vec{v}$  à entrada do campo magnético é perpendicular a  $\vec{B}$ , os iões descrevem trajetórias semicirculares de raio  $R = \frac{mv}{|q|B}$ , acabando por chocar com uma película fotográfica **P**. Se  $v$  for igual para todos os iões, o raio dependerá apenas da razão  $\frac{m}{|q|}$ .

Nos aparelhos modernos, a película fotográfica é substituída por um ou mais detetores. Para que a velocidade seja a mesma para todos os iões, intercala-se um seletor de velocidades entre a fonte de iões e a câmara (**Fig. 15**).



**Fig. 15** Espetrómetro de massa equipado com seletor de velocidades.

Um feixe de iões entra, através de fendas, no seletor de velocidades onde  $E$  e  $B_1$  são as intensidades dos campos elétrico e magnético perpendiculares entre si. Assim, só entrarão no espetrómetro os iões com velocidade  $v = \frac{E}{B_1}$ .

Se  $B_2$  for a intensidade do campo magnético no espetrómetro, então  $R = \frac{mv}{|q|B_2}$ . Substituindo o valor de  $v$ , tem-se:

$$\frac{|q|}{m} = \frac{E}{R B_1 B_2}$$

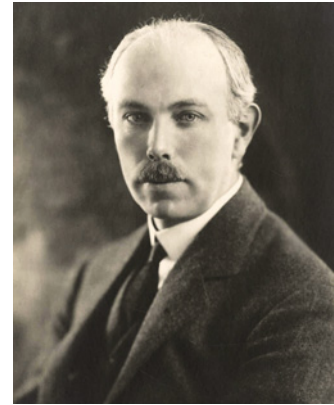
Conhecendo as intensidades dos três campos ( $E$ ,  $B_1$  e  $B_2$ ) e medindo o raio da trajetória,  $R$ , obtém-se  $\frac{|q|}{m}$ .



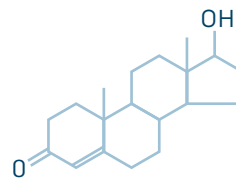
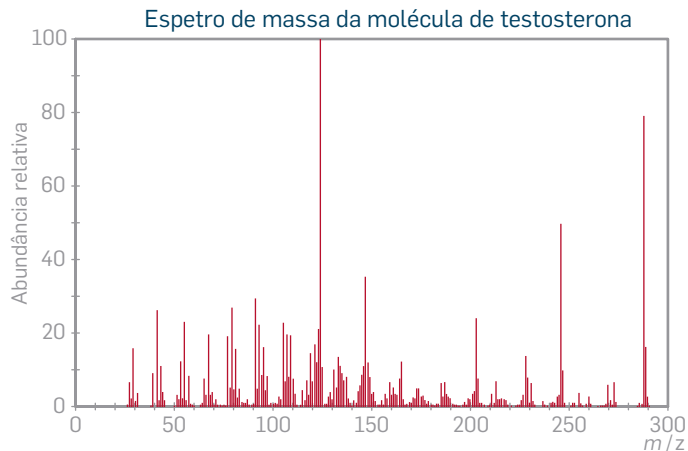
Foi o inglês Francis Aston (**Fig. 16**) quem inventou o espectrômetro, em 1919. O aparelho logo serviu para revelar a existência de isótopos (átomos com a mesma carga nuclear – mesmo número de prótons – mas diferente massa), pois descreviam arcos de circunferência de raio proporcional à respectiva massa.

Os espectrômetros de massa conseguem realizar, em menos de uma hora, uma análise completa de uma grande lista de substâncias. A espectroscopia de massa é uma técnica poderosa que é usada em análise química, por exemplo na detecção de poluentes e no controle *antidoping*.

Porque é necessário o controle *antidoping*? Os esteroides anabolizantes (como a testosterona) aumentam a massa muscular, os analgésicos e os narcóticos (como a morfina) permitem ultrapassar lesões e os estimulantes (como a cafeína) aumentam temporariamente a resistência. Hoje em dia, a diferença entre uma medalha de ouro e uma de prata decide-se, em alta competição, por uma fração de segundo. Há, por isso, quem seja tentado a ingerir substâncias que aumentem o rendimento desportivo – o chamado *doping*. O Comitê Olímpico Internacional exige análises *antidoping* cada vez mais precisas. A espectroscopia de massa em cromatografia gasosa tem-se tornado a técnica preferida (**Fig. 17**), pois permite detetar, com grande precisão, esteroides anabolizantes na urina.



**Fig. 16** O inglês Francis Aston, Prémio Nobel da Química em 1922, foi o inventor da espectroscopia de massa.



**Fig. 17** Espectro de massa ( $m$  é a massa de um ião  $X^{Z+}$ ) da testosterona, representada no lado direito.

#### Questão resolvida 4

Dois iões, com a mesma carga  $q$ , de massas  $m_1$  e  $m_2$  (peso desprezável) são acelerados a partir do repouso num campo elétrico uniforme, submetidos a uma diferença de potencial  $U$ . Entram depois num espectrômetro. Determine a razão entre os raios das trajetórias semicirculares descritas.



É necessário calcular o módulo da velocidade,  $v$ , do ião à entrada no espectrômetro. No campo elétrico, tem-se:

$$W_{\vec{F}} = \Delta E_c \Rightarrow |q|U = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$$

No campo magnético, pela Segunda Lei de Newton:  $|q|vB = \frac{mv^2}{R} \Leftrightarrow R = \frac{mv}{|q|B}$

Substituindo  $v$ , obtém-se  $R = \sqrt{\frac{2mU}{|q|B^2}}$ .

Como os isótopos têm a mesma carga, vem  $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$ .



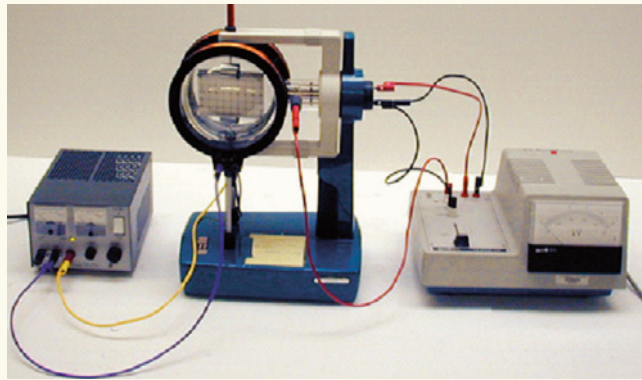
### Questão resolvida 5



Nos finais do século XIX, o interior da matéria era ainda um mistério. Contudo, em 1897, o físico inglês J. J. Thomson identificou o eletrão e determinou, pela primeira vez, a razão carga/massa do eletrão:  $\frac{e}{m_e}$  ( $e$  é o módulo da carga do eletrão e  $m_e$  a sua massa). A sua experiência tornou-se um marco no conhecimento da estrutura atômica, valendo-lhe o Prémio Nobel da Física em 1906.

A determinação de  $e$  pode fazer-se em laboratórios escolares com o dispositivo da figura, que usa um método diferente do de Thomson. No interior da ampola há um gás nobre a baixa pressão. Um canhão de eletrões ejeta eletrões, que são acelerados entre as placas de um condensador onde está aplicada uma tensão de 320 V. Os eletrões entram perpendicularmente a um campo magnético de intensidade  $6,0 \times 10^{-4}$  T, descrevendo uma trajetória circular de raio 10,0 cm, bem visível pela luminosidade dos átomos do gás nobre.

Calcule a razão  $\frac{e}{m_e}$  a partir deste método.



Como a velocidade dos eletrões é perpendicular ao campo magnético, estes têm movimento circular e uniforme. O raio da trajetória obtém-se a partir da Segunda Lei de Newton:

$$F_m = m_e a \Rightarrow |q|vB = m_e \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m_e v}{eB}$$

O módulo da velocidade,  $v$ , pode ser calculado a partir da diferença de potencial  $U$  aplicada ao condensador:

$$W_F = \Delta E_c \Rightarrow |q|U = \frac{1}{2} m_e v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

Combinando as duas equações, resulta  $R = \frac{m_e}{eB} \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$ , obtendo-se:

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2U}{B^2 R^2}, \text{ logo, } \frac{e}{m_e} = \frac{2 \times 320}{(6,0 \times 10^{-4})^2 \times 0,100^2} = 1,8 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$$

## Atividade 3

Os aceleradores de partículas usam campos elétricos e magnéticos: o campo elétrico acelera as partículas com carga e o campo magnético encurva a sua trajetória.

O primeiro acelerador de partículas foi o **ciclotrão** construído por Ernest Lawrence na Universidade da Califórnia, nos Estados Unidos, em 1931. Por esta invenção, que foi importante para o avanço de uma área então emergente – a física de partículas –, recebeu o Prémio Nobel da Física em 1939. A primeira figura mostra Lawrence junto a um ciclotrão, montado no centro de um grande eletromagnete, e a segunda figura apresenta o primeiro protótipo de ciclotrão. Este acelerador enfrentava alguns problemas previstos pela Teoria da Relatividade Restrita de Einstein. Na construção de um outro tipo de acelerador, o sincrotrão, levaram-se em conta efeitos relativistas.

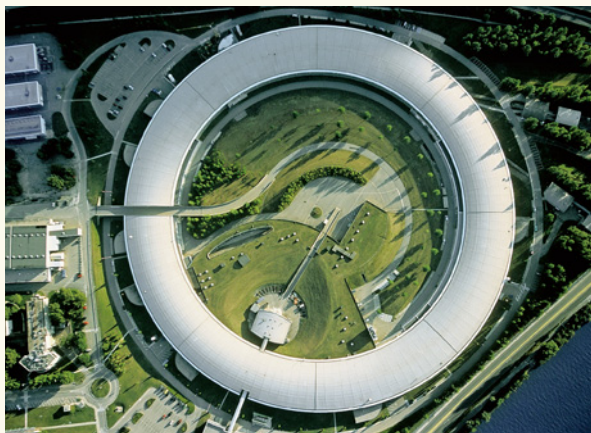
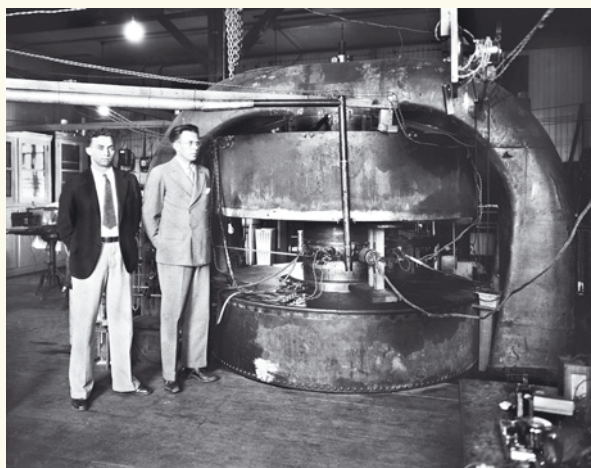
O sincrotrão do ESRF (*European Synchrotron Radiation Facility* – terceira figura) está situado em Grenoble, França. Este sincrotrão é utilizado por equipas de cientistas, incluindo portugueses, para realizar diversas experiências de física, química, biologia e medicina.

**1.** Faça uma pesquisa sobre os vários tipos de aceleradores de partículas (incluindo a constituição e princípios de funcionamento).

Averigue a importância da investigação que se realiza no ESRF.

**2.** O *Large Hadron Collider* – LHC (figura em baixo) é o maior acelerador de partículas do mundo e utiliza prótons e núcleos mais pesados. Inaugurado em 2008, a sua construção é já considerada um grande feito do século XXI.

Faça uma pesquisa sobre os resultados já obtidos com este acelerador, em particular sobre a descoberta do bóson de Higgs.

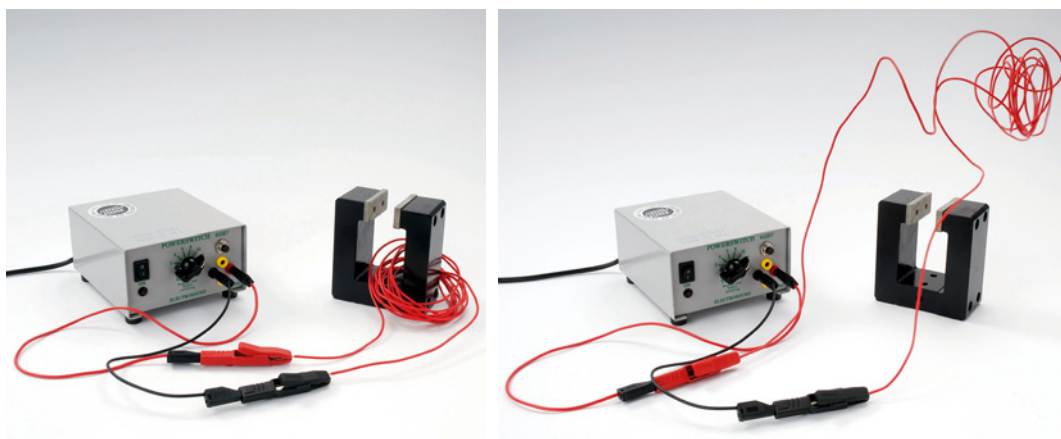


## 2.3.3 Ação de campos magnéticos sobre correntes elétricas

O campo magnético manifesta-se por forças sobre partículas com carga e em movimento. Como a corrente elétrica é formada por cargas em movimento, os fios atravessados por corrente elétrica sofrem a ação de campos magnéticos, manifestada pelas forças magnéticas exercidas sobre eles.

Vejam os exemplos da **Fig. 18**: um fio, enrolado num ímã em U, está ligado a uma fonte de tensão contínua. Quando se fecha o circuito, o fio «salta», pois fica sujeito, para além do seu peso, a uma força magnética dirigida para cima.

**Fig. 18** A força magnética atua sobre um fio percorrido por corrente elétrica fazendo-o «saltar».



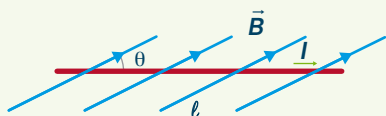
Verifica-se experimentalmente que a intensidade dessa força magnética depende de características do fio condutor e do campo:

### Intensidade da força magnética, $F_m$ , sobre um fio percorrido por corrente contínua

Depende da corrente elétrica,  $I$ , do comprimento do fio,  $\ell$ , assim como do módulo do campo magnético onde está imerso o fio,  $B$ , e do ângulo  $\theta$  entre o vetor  $\vec{B}$  e o fio condutor.

$$F_m = I \ell B \sin \theta$$

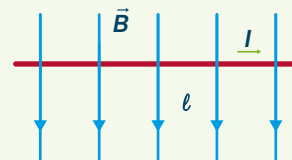
$\text{N}$                        $\text{A m T}$



- A força será máxima se  $\vec{B}$  for perpendicular ao fio:

$$(\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin \theta = 1)$$

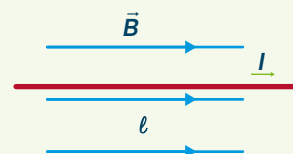
$$F_m = I \ell B$$



- A força será nula se  $\vec{B}$  tiver a mesma direção do fio:

$$(\theta = 0^\circ \text{ ou } \theta = 180^\circ \Rightarrow \sin \theta = 0)$$

$$F_m = 0$$





E qual é a direção e o sentido dessa força? Para os definirmos, introduzimos um vetor  $\vec{\ell}$  com as seguintes características:

- tem direção coincidente com o fio retilíneo percorrido pela corrente;
- tem sentido igual ao sentido convencional da corrente elétrica;
- tem módulo igual ao comprimento  $\ell$  do fio percorrido por corrente.

A **Lei de Laplace**, definida a partir de um produto vetorial, permite não só obter a intensidade da força magnética sobre um fio condutor (conhecida por **força de Laplace**), como também obter a direção e o sentido dessa força:

### Força magnética, $\vec{F}_m$ , sobre um fio percorrido por corrente contínua

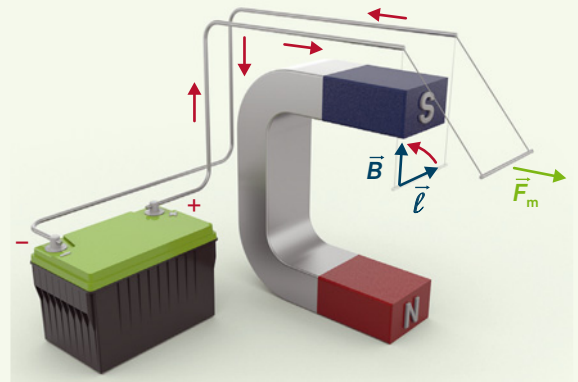
$$\vec{F}_m = I \vec{\ell} \times \vec{B}$$

Intensidade:  $F_m = I \ell B \sin \theta$ .

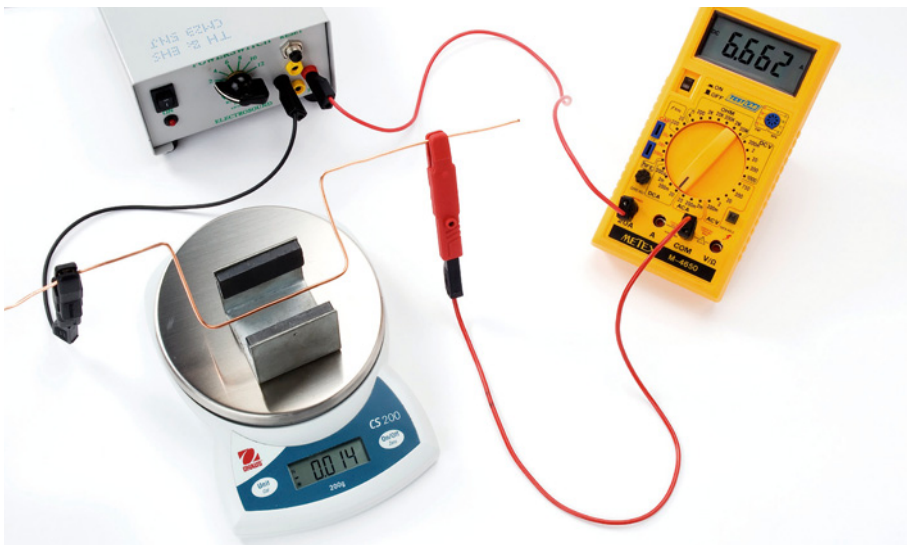
Direção: perpendicular a  $\vec{\ell}$  (ou seja, ao fio) e a  $\vec{B}$ .

Sentido dado por uma das regras:

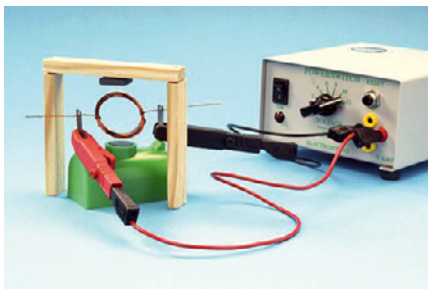
- regra da mão direita: quando se curvam os dedos no sentido de  $\vec{\ell}$  para  $\vec{B}$  (tendo os dois vetores o mesmo ponto de aplicação), o polegar aponta no sentido de  $\vec{F}_m$ ;
- regra do saca-rolhas: quando se roda o saca-rolhas no sentido de  $\vec{\ell}$  para  $\vec{B}$  (tendo os dois vetores o mesmo ponto de aplicação), o sentido da sua progressão indica o sentido de  $\vec{F}_m$ .



A força de Laplace pode ser medida experimentalmente com uma balança muito sensível usando, por exemplo, a montagem da **Fig. 19**: o sentido da corrente contínua é tal que o fio fica sujeito a uma força magnética vertical e dirigida para baixo, o que é detetado na balança.



**Fig. 19** A força magnética exercida num fio percorrido por corrente contínua e colocado entre ímãs pode ser medida com uma balança muito sensível.

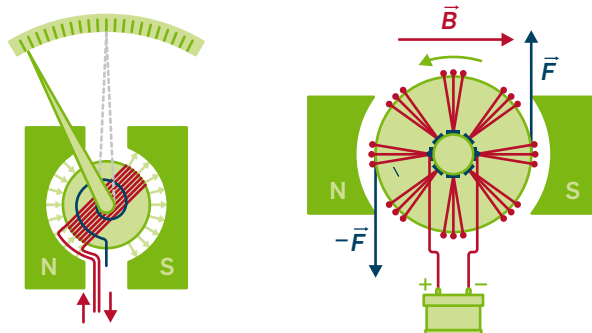


**Fig. 20** Uma espira circular percorrida por corrente contínua fica sujeita a uma força magnética que a faz rodar.

A força de Laplace é equivalente à força magnética exercida sobre uma carga em movimento. Como a corrente é  $I = \frac{Q}{\Delta t}$ , sendo  $Q$  a carga que passa no intervalo de tempo  $\Delta t$  (por exemplo, o tempo que essa carga demora a percorrer o fio) e como  $\vec{\ell} = \vec{v}_d \Delta t$  ( $\vec{v}_d$  é chamada velocidade de deriva dos eletrões), então  $I \vec{\ell} = \frac{Q}{\Delta t} \vec{v}_d \Delta t = Q \vec{v}_d$ . Ou seja, a força magnética,  $\vec{F}_m = Q \vec{v}_d \times \vec{B}$ , é equivalente à força de Laplace,  $\vec{F}_m = I \vec{\ell} \times \vec{B}$ .

As espiras circulares também sofrem a ação de forças magnéticas quando percorridas por corrente elétrica (**Fig. 20**).

Os galvanómetros (**Fig. 21**, à esquerda), que medem correntes muito pequenas, baseiam-se neste efeito. Num galvanómetro há um íman fixo, que cria o campo magnético, e uma bobina móvel. Quando esta é percorrida por corrente surgem forças magnéticas que fazem rodar a bobina. Um ponteiro ligado à bobina sofre um desvio, para um lado ou para outro, consoante o sentido da corrente. Este desvio será tanto maior quanto maior for a corrente. Também um motor de corrente contínua (**Fig. 21**, à direita), como o motor de arranque de um automóvel, se baseia no mesmo efeito: forças magnéticas simétricas obrigam uma espira a rodar.



**Fig. 21** À esquerda: esquema de galvanómetro. À direita: esquema de motor elétrico de corrente contínua.

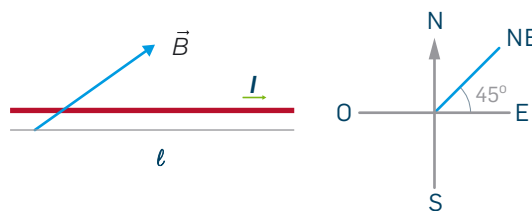
### Questão resolvida 6

Os comboios de levitação magnética *Maglev* (esta palavra vem de *magnetic levitation*), que são usados em Xangai, podem atingir grandes velocidades. A levitação resulta da força magnética exercida sobre correntes elétricas fortes que percorrem fios condutores montados no comboio com origem num campo magnético criado por ímanes instalados no solo.

Suponha um fio retilíneo condutor percorrido por uma corrente de 50 A, no sentido de oeste para este, colocado numa região onde existe um campo magnético intenso de 1,20 T, dirigido para nordeste. Caracterize a força magnética que atua sobre 1,00 m de fio.

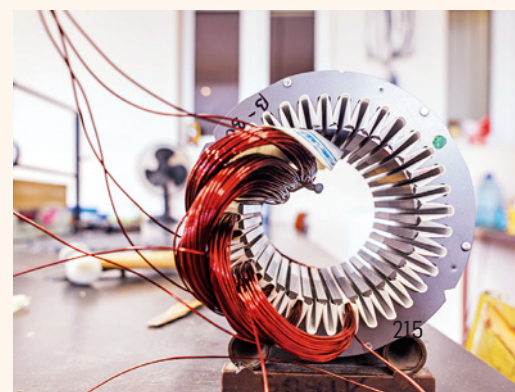
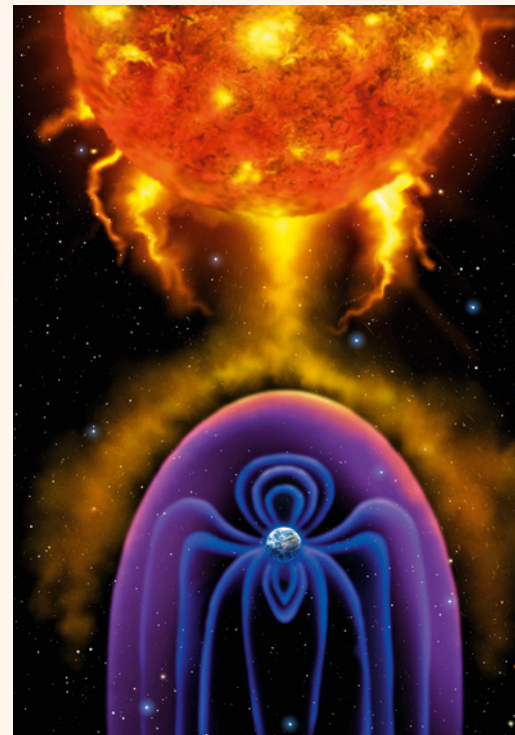
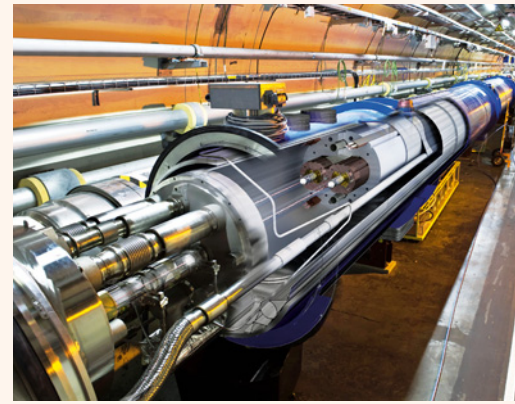


- P** O ângulo entre o fio e o campo magnético é  $45^\circ$ . A força magnética é  $F_m = I \ell B \sin \theta$ , ou seja,  $F_m = 50 \times 1,00 \times 1,20 \times \sin 45^\circ = 42 \text{ N}$ . Como mostra a figura, os vetores  $\vec{\ell}$  e  $\vec{B}$  estão num plano paralelo ao solo, pelo que a força magnética tem de ser perpendicular ao solo. Curvando os dedos da mão direita no sentido de  $\vec{\ell}$  para  $\vec{B}$ , o polegar aponta para cima: a força é vertical e aponta para cima. Por isso, ela equilibra um peso igual a 42 N por cada metro de fio condutor.



## RESUMO

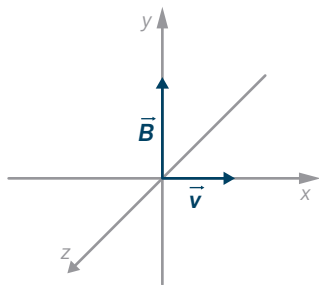
- **Força magnética sobre uma partícula,  $\vec{F}_m$ :** atua sobre uma partícula carregada, de carga  $q$ , quando está sob ação de um campo magnético,  $\vec{B}$ , e com velocidade,  $\vec{v}$ , de direção diferente de  $\vec{B}$ ; é dada por  $\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$ ; a sua intensidade é  $F_m = |q| v B \sin \alpha$  ( $\alpha$  é o menor ângulo entre  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ ); tem direção perpendicular ao plano definido por  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  e sentido definido pela carga da partícula e pela regra do saca-rolhas (ou da mão direita).
- **Trabalho realizado pela força magnética:** é nulo (a força é sempre perpendicular à velocidade), sendo, por isso, constante a energia cinética da partícula.
- **Trajétória de uma partícula carregada, de massa desprezável, num campo magnético uniforme:** será retilínea e o movimento será uniforme se  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  tiverem a mesma direção ( $\vec{F}_m$  é nula). Será circular e o movimento será uniforme se  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  tiverem direções perpendiculares ( $\vec{F}_m$  aponta para o centro da trajetória), sendo o raio da trajetória dado por  $R = \frac{mv}{|q|B}$ . Será helicoidal se a direção da velocidade não coincidir com a do campo magnético nem lhe for perpendicular: consiste na sobreposição de um movimento retilíneo uniforme na direção de  $\vec{B}$  e de um movimento circular uniforme num plano perpendicular a  $\vec{B}$ .
- **Força de Lorentz:** traduz a ação simultânea de um campo elétrico e de um campo magnético sobre uma partícula carregada e em movimento; é dada por  $\vec{F}_{em} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$ . Aplicações: seletor de velocidades, espectrômetro de massa, aceleradores de partículas, etc.
- **Seletor ou filtro de velocidades:** filtra (seleciona) partículas de igual velocidade através da ação conjunta de um campo elétrico e de um campo magnético perpendiculares.
- **Espetrômetro de massa:** separa iões de igual carga mas diferente massa pois as trajetórias semicirculares que descrevem têm raio proporcional à respetiva massa.
- **Força magnética sobre um fio percorrido por corrente contínua,  $\vec{F}_m$**  (força de Laplace): atua sobre um fio percorrido por corrente contínua, com corrente elétrica  $I$ , imerso num campo magnético  $\vec{B}$  cuja direção não é a do fio; é dada por  $\vec{F}_m = I \vec{\ell} \times \vec{B}$ , sendo  $\vec{\ell}$  um vetor com a direção do fio e sentido igual ao sentido convencional da corrente elétrica; a sua intensidade é dada por  $F_m = I \ell B \sin \theta$  ( $\theta$  é o menor ângulo entre  $\vec{\ell}$  e  $\vec{B}$ ); tem direção perpendicular ao plano definido por  $\vec{\ell}$  e  $\vec{B}$  e sentido definido pela regra do saca-rolhas (ou da regra da mão direita).



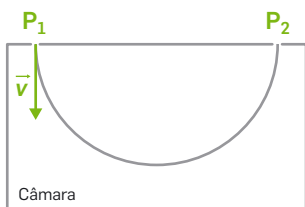
# QUESTÕES

## 2.3.1 Ação de campos magnéticos sobre cargas em movimento

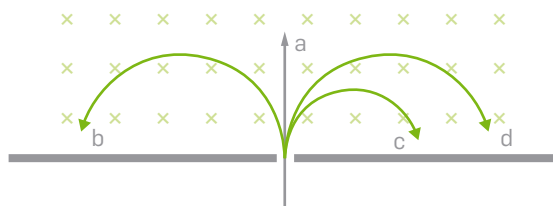
1. A eletricidade e o magnetismo nem sempre estiveram unificados. Sintetize as principais descobertas que levaram ao desenvolvimento da teoria eletromagnética e os cientistas envolvidos.
2. O que distingue as linhas de um campo elétrico das linhas de um campo magnético?
3. Um elétron (carga  $-e$ ) entra numa região em que existe um campo magnético  $\vec{B}$ , com uma velocidade  $\vec{v}$  (ver figura). Caracterize a força magnética que atua sobre o elétron no instante em que entra nessa região.



4. Observe a figura: um próton entra pelo orifício  $P_1$  numa câmara onde há um campo magnético uniforme,  $\vec{B}$ , descreve uma semicircunferência com movimento uniforme e sai pelo orifício  $P_2$ . Caracterize o campo magnético  $\vec{B}$ .



5. Conclua, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.
  - (A) A força magnética, tal como a elétrica, atua sobre qualquer partícula carregada.
  - (B) A força magnética que atua sobre uma partícula carregada, em movimento num campo magnético, é sempre perpendicular à sua velocidade e a esse campo.
  - (C) Uma partícula carregada, de massa desprezável, lançada perpendicularmente a um campo magnético uniforme, tem movimento circular uniforme, apontando a força magnética para o centro da trajetória.
  - (D) Num espectrómetro de massa, as partículas carregadas descrevem órbitas semicirculares num plano definido pelo campo magnético e pela velocidade.
6. Num espectrómetro de massa, as partículas carregadas descrevem órbitas semicirculares num plano definido pelo campo magnético e pela velocidade. Quatro partículas, **a**, **b**, **c** e **d**, que podem, ou não, ter carga elétrica, entram numa região onde existe um campo magnético, como se indica na figura.



- a) Indique, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras.
  - (A) A carga da partícula **a** é negativa e a carga da partícula **b** é positiva.
  - (B) Se as partículas **c** e **d** forem iguais, **d** terá maior velocidade do que **c**.
  - (C) As partículas **c** e **d** têm cargas do mesmo sinal.
  - (D) Se as partículas **a** e **b** têm velocidades iguais em módulo, o módulo da carga de **a** é maior do que o módulo da carga de **b**.
- b) Conclua, justificando, qual seria a direção do campo magnético para que nenhuma das partículas fosse desviada.



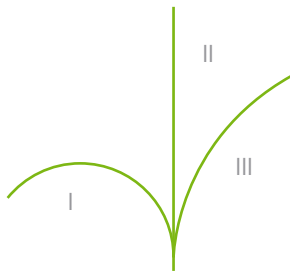
7. Num campo magnético uniforme de módulo  $B$  é lançada uma partícula, de massa  $m$  e carga  $q$ , passando a descrever uma circunferência de raio  $R$ .

- a) Determine uma expressão para:
- o módulo da velocidade da partícula.
  - o tempo que a partícula demora a descrever duas voltas completas.
  - a frequência do movimento.
  - o trabalho realizado pela força magnética na primeira meia volta.
  - a energia cinética da partícula ao fim de uma volta.

b) Em que situação se obtém uma trajetória com o mesmo raio?

- Duplicando os módulos da velocidade e do campo.
- Duplicando o módulo da velocidade e reduzindo o campo para metade.
- Reduzindo o módulo da velocidade para metade e mantendo o campo.
- Reduzindo o campo para metade e mantendo a velocidade.

8. Observe a figura: uma substância radioativa emite, na mesma direção, partículas  $\alpha$  (núcleos de átomos de hélio com dois prótons e dois nêutrons), partículas  $\beta$  (elétrons) e radiação eletromagnética  $\gamma$ , que entram no mesmo campo magnético uniforme perpendicular ao plano da figura. O próton e o nêutron têm aproximadamente a mesma massa, cerca de  $1,8 \times 10^3$  vezes maior do que a do elétron.



a) Associe I, II e III às respectivas emissões radioativas. Considere que as velocidades das partículas  $\alpha$  e  $\beta$  têm ordem de grandeza próxima. Justifique.

b) Relacione as ordens de grandeza dos raios das trajetórias I e III. Considere que as partículas  $\beta$  se movem cerca de 10 vezes mais depressa do que as partículas  $\alpha$ .

c) Conclua, justificando, sobre o sentido do campo magnético.

9. Uma partícula com 0,040 g e carga elétrica  $-2,0 \mu\text{C}$  desloca-se com movimento retilíneo uniforme numa região onde existe um campo magnético de 0,80 T, perpendicular ao campo gravítico. Considere desprezável a resistência do ar. Determine o módulo da velocidade da partícula e indique uma orientação para o campo magnético, e a direção do movimento, compatíveis com as condições do problema.

10. Duas partículas 1 e 2, com a mesma carga e com massas diferentes, penetram numa região do espaço onde existe um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . Sob a ação deste campo, as partículas passam a descrever trajetórias circulares, de raios, respetivamente,  $r_1 = 2,00 \text{ m}$  e  $r_2 = 0,40 \text{ m}$ . O módulo do momento linear da partícula 2 é  $6,68 \times 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1}$ .

a) A partir destes dados pode concluir-se que o ângulo entre a velocidade das partículas e o campo magnético  $\vec{B}$ :

- varia de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .
- varia de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ .
- é  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ .
- é  $90^\circ$ .

b) Relacione a direção da força magnética que atua sobre cada uma das partículas com a direção da velocidade.

c) Determine o módulo do momento linear da partícula 1.

d) Sabe-se que a partícula 2 é um próton. A massa e a carga de um próton são, respetivamente,  $1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$  e  $1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

- Caracterize a aceleração da partícula 2.
- Determine a intensidade do campo magnético.

### 2.3.2 Ação simultânea de campos magnéticos e elétricos sobre cargas em movimento

11. Um feixe de elétrons passa por um seletor de velocidades, dispositivo onde existe um campo magnético de  $0,02 \text{ T}$  e, perpendicular a este, um campo elétrico de  $50 \text{ kV m}^{-1}$ . A massa e a carga do elétron são  $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  e  $-1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$ , respetivamente.

a) A força magnética que atua sobre cada um dos elétrons desse feixe é:

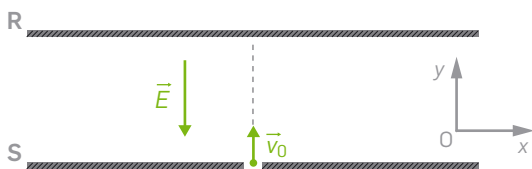
- (A) igual à força elétrica que atua num elétron.
- (B) simétrica da força elétrica que atua num elétron.
- (C) igual ao peso de um elétron.
- (D) simétrica do peso de um elétron.

b) Determine a energia cinética de um elétron, em eV, quando passa nesta região.

c) A velocidade de uma partícula selecionada no seletor de velocidades:

- (A) depende da carga elétrica da partícula, mas não depende da sua massa.
- (B) depende da massa da partícula, mas não depende da sua carga elétrica.
- (C) aumenta com o campo elétrico.
- (D) aumenta com o campo magnético.

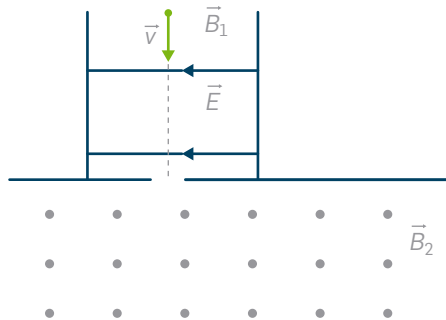
12. Um elétron entra numa região entre duas placas (ver figura), onde coexistem dois campos uniformes,  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , descrevendo um movimento retilíneo uniformemente acelerado.



Qual das afirmações é correta?

- (A) A placa **R** está a um potencial inferior ao da placa **S**.
- (B) Sobre o elétron atuam a força elétrica e a força magnética, que têm a mesma direção e sentido.
- (C) O campo magnético tem a direção do eixo dos  $yy$ .
- (D) O campo magnético tem a direção do eixo dos  $zz$ .

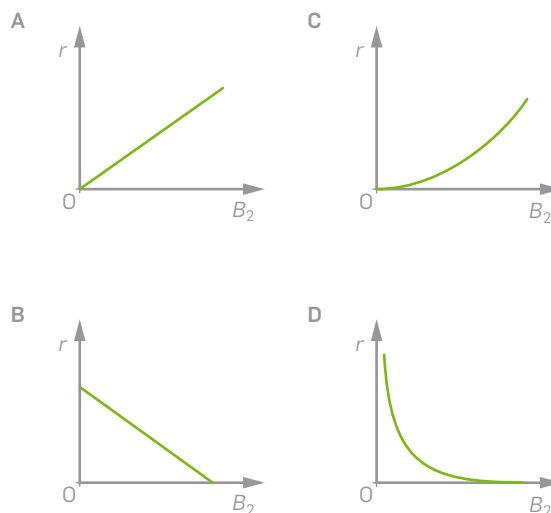
13. A figura representa uma partícula carregada positivamente, com massa  $m$  e carga  $q$ , a entrar, com velocidade  $\vec{v}$ , numa região onde existem um campo elétrico  $\vec{E}$  e um campo magnético  $\vec{B}_1$  perpendiculares, ambos uniformes, seguindo com velocidade constante. Em seguida, entra noutra região onde apenas existe um campo magnético  $\vec{B}_2$ , constante.



a) Caracterize o campo  $\vec{B}_1$ .

b) Esboce a trajetória da partícula quando sobre ela apenas atua o campo  $\vec{B}_2$  e descreva o movimento.

c) Qual dos gráficos pode representar o raio da trajetória descrita,  $r$ , em função do módulo do campo magnético  $\vec{B}_2$ ?

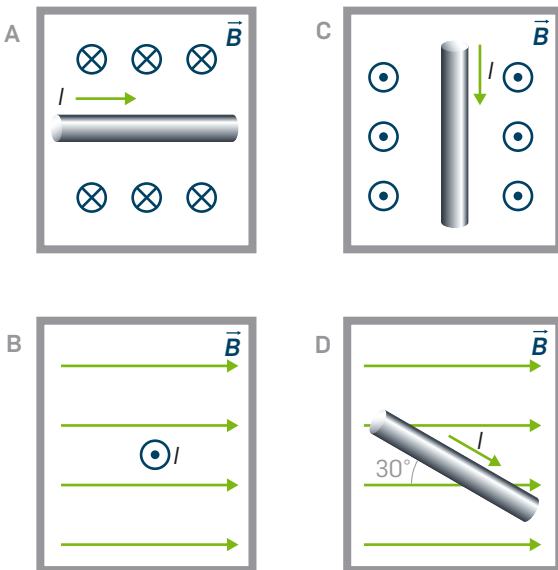


### 2.3.3 Ação de campos magnéticos sobre correntes elétricas

14. A figura mostra um troço de um condutor retilíneo, percorrido por uma corrente contínua  $I$ , e imerso num campo magnético uniforme  $\vec{B}$  que lhe é perpendicular. Caracterize a força magnética, por unidade de comprimento, que atua no fio, considerando o referencial representado.

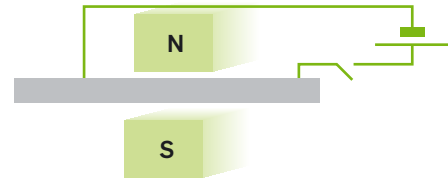


15. Os condutores da figura, de 40 cm de comprimento, são percorridos por uma corrente de 5,0 A e estão imersos num campo magnético uniforme.

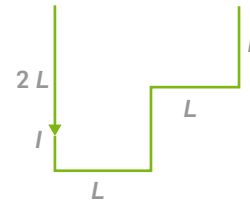


- a) Caracterize a força magnética sobre cada condutor se a intensidade do campo magnético for 8,0 mT.  
 b) Se o fio em **A** fosse de cobre,  $\rho_{\text{Cu}} = 8,96 \text{ g cm}^{-3}$ , e tivesse  $10,5 \text{ mm}^2$  de secção reta, qual deveria ser o módulo do campo magnético para ficar em equilíbrio no campo gravítico terrestre?

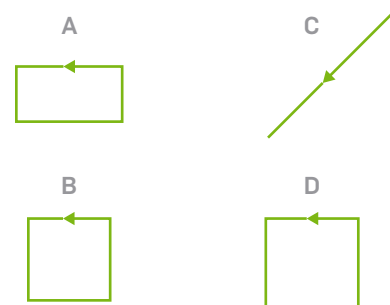
16. A barra condutora da figura está suspensa entre os polos de um ímã em ferradura, onde o campo magnético é aproximadamente uniforme.



- a) Que alteração se observará na barra quando se fechar o interruptor? Despreze as interações gravíticas.  
 b) Se a polaridade da fonte de tensão for invertida, que alteração se deverá fazer no ímã em ferradura para que o desvio da barra continue a dar-se no mesmo sentido? Justifique.  
 17. Na figura, um fio condutor de comprimento  $6L$  percorrido por uma corrente  $I$ , como indica a figura, está imerso num campo magnético uniforme  $\vec{B}$ .



- a) Determine a resultante das forças magnéticas que atuam sobre o fio quando  $\vec{B}$  é perpendicular ao plano do fio e aponta para cá.  
 b) Conclua, justificando, qual deveria ser a direção do campo magnético para que a resultante das forças que atuam no fio fosse nula.  
 c) Sendo  $\vec{B}$  perpendicular ao plano do fio, que forma geométrica deveria assumir o fio para que a resultante das forças que nele atuam fosse máxima?

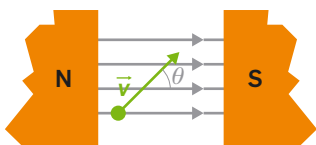


## Questões globais

18. Uma partícula de massa desprezável e com carga elétrica fica sujeita a uma força magnética quando imersa num campo magnético. Essa força:

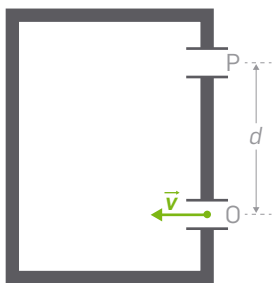
- (A) existe porque a velocidade da partícula tem a direção do campo magnético.
- (B) nunca altera o módulo da velocidade da partícula.
- (C) depende da massa da partícula.
- (D) obriga a partícula a descrever uma trajetória helicoidal se a sua velocidade for perpendicular ao campo magnético.

19. Um próton entra na região entre os polos de um ímã em armadura numa direção que faz um ângulo  $\theta$ , diferente de  $90^\circ$ , com a direção das linhas de campo magnético (ver figura).



O próton descreve um movimento:

- (A) circular e uniforme.
  - (B) helicoidal e com aceleração de módulo variável.
  - (C) helicoidal e uniforme.
  - (D) circular, com aceleração de módulo constante.
20. A figura representa uma câmara onde existe um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , perpendicular à câmara, de intensidade  $2,4 \times 10^{-5}$  T. Um eletrão entra na câmara pela abertura O, com velocidade de módulo  $4,0 \times 10^4$  m s<sup>-1</sup>, e sai da câmara pela abertura P após descrever meia circunferência.



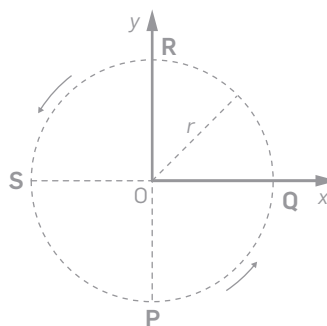
A massa do eletrão é  $9,1 \times 10^{-31}$  kg e a sua carga é  $-1,6 \times 10^{-19}$  C.

- a) Determine:
  - i) o sentido do campo magnético.
  - ii) a intensidade da força que atua sobre o eletrão no ponto O.
  - iii) a distância  $d$  entre os pontos O e P.
  - iv) o tempo que o eletrão permanece na câmara.
  - v) o trabalho realizado pela força magnética de O a P.
- b) Qual seria o campo elétrico a aplicar dentro da câmara para que o eletrão entrasse em O e seguisse com movimento retilíneo uniforme?
- c) Se fosse um próton (massa  $1,8 \times 10^3$  maior do que a do eletrão) a entrar em O com a mesma velocidade, qual deveria ser a intensidade do campo magnético de modo a descrever a mesma trajetória entre O e P?

21. Um núcleo de hélio,  ${}^4_2\text{He}^{+2}$ , descreve um movimento circular uniforme de 4,0 cm de raio por ação de um campo magnético uniforme,  $\vec{B}$ , demorando 1,0 ms a dar 10 voltas completas.

$$m_{\text{neutrão}} \approx m_{\text{próton}} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

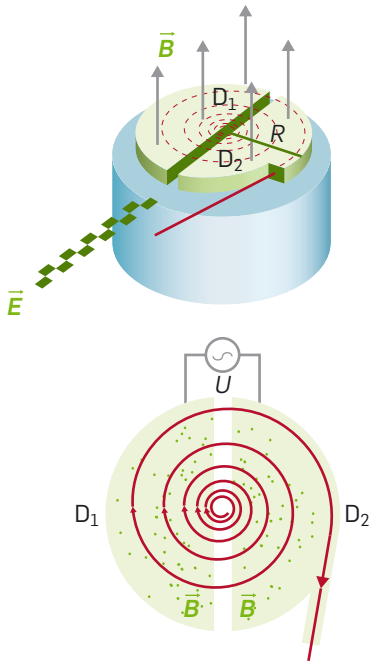
$$q_{\text{próton}} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$



- a) Determine a força magnética que atua sobre o íão quando passa no ponto S.
- b) Determine o campo magnético  $\vec{B}$ .
- c) Um próton descreve um movimento idêntico, sendo o módulo da velocidade igual ao do íão. Determine a razão entre os raios das trajetórias do próton e do íão.



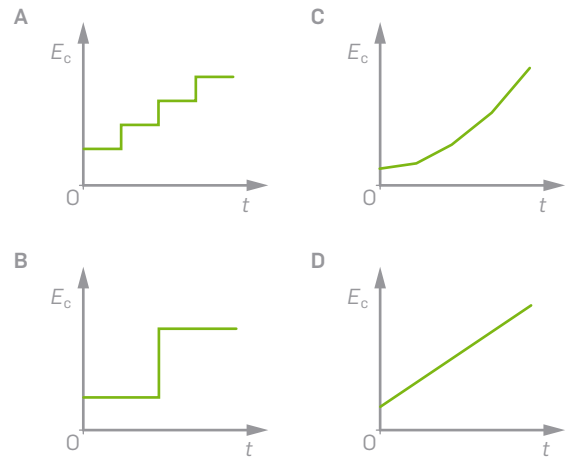
22. O ciclotrão, um dos primeiros aceleradores de partículas, é constituído por duas câmaras semicirculares, em forma de «D»,  $D_1$  e  $D_2$ , que se encontram numa região onde existe um campo magnético uniforme,  $\vec{B}$ , perpendicular às câmaras. Entre os dois «D» existe um campo elétrico,  $\vec{E}$ , muito intenso, que inverte periodicamente o seu sentido.



Um ião positivo é lançado de modo a que a força elétrica o acelere sempre que passa entre os dois «D». Ao entrar em  $D_1$  com uma certa velocidade, o ião descreve um movimento circular uniforme com um certo raio. Quando sai de  $D_1$  e entra no campo elétrico, a força elétrica acelera-o, fazendo-o entrar em  $D_2$  com maior velocidade. Volta a descrever novamente uma trajetória semicircular, mas de raio maior porque tem maior velocidade. O processo é repetido, quando o ião sai de  $D_2$  e entra em  $D_1$ , e assim, sucessivamente, podendo o ião atingir, desta forma, velocidades próximas das da luz. Para minimizar as perdas de energia por colisões com o ar, deve fazer-se o vácuo na zona onde os iões circulam.

- a) Explique por que razão o raio das semicircunferências descritas pelo ião aumenta sempre que passa entre os dois «D».

- b) Qual dos gráficos pode representar a energia cinética do ião,  $E_c$ , em função do tempo,  $t$ , no intervalo de tempo em que o ião descreve quatro semicircunferências?

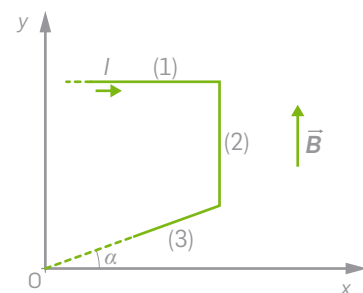


- c) Para que o ião seja acelerado, ao passar de  $D_1$  para  $D_2$  e vice-versa, o campo elétrico tem que mudar periodicamente de sentido, o que exige que a frequência do campo elétrico coincida com a do movimento dos iões.

Mostre que a frequência do movimento de uma partícula numa região com um campo uniforme não depende da sua velocidade.

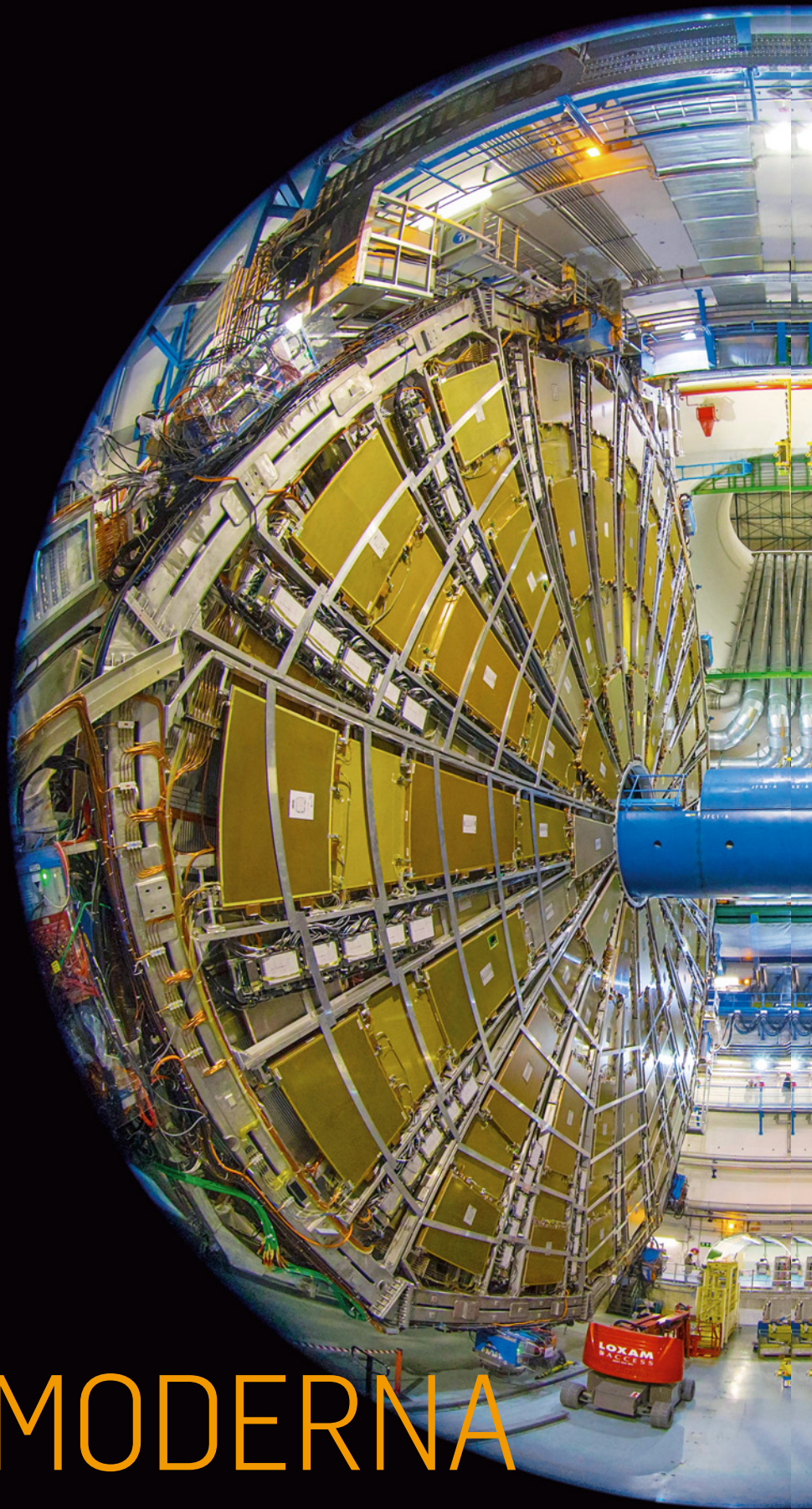
- d) Determine a energia cinética de um ião ao sair de um ciclotrão em função de  $R$  (raio máximo da trajetória do ião),  $q$ , carga do ião,  $m$ , massa do ião, e  $B$ .

23. Um fio é percorrido por uma corrente contínua  $I$ , estando imerso num campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , como mostra a figura. Determine a força magnética que atua, por unidade de comprimento, em cada troço do fio: (1), (2) e (3).

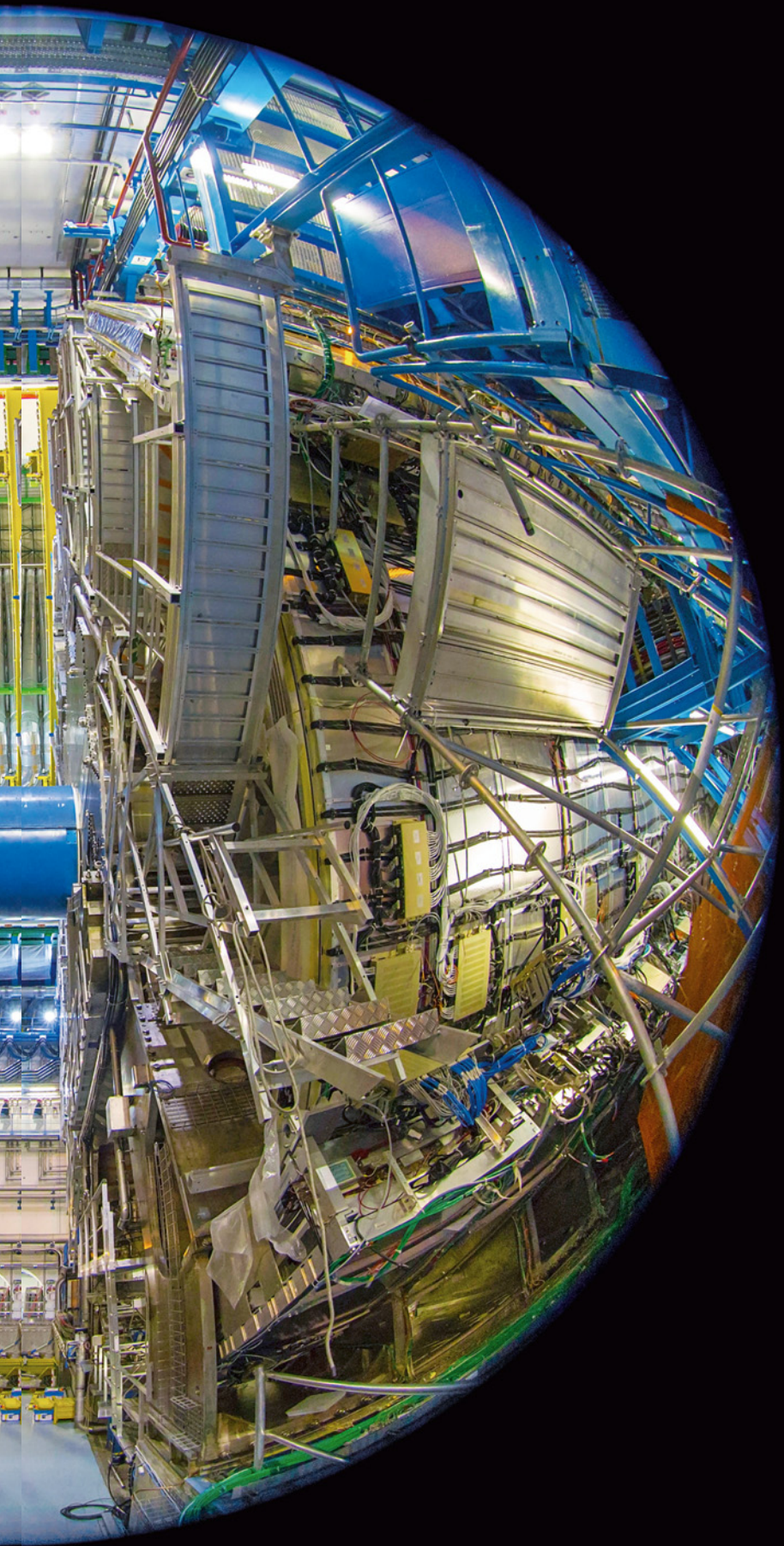


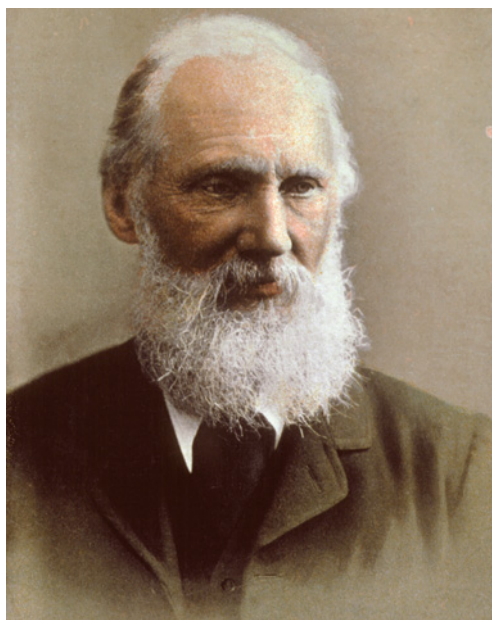
3

FÍSICA MODERNA









**Fig. 1** Lord Kelvin antes de surgir a física moderna: havia duas pequenas «nuvens»...

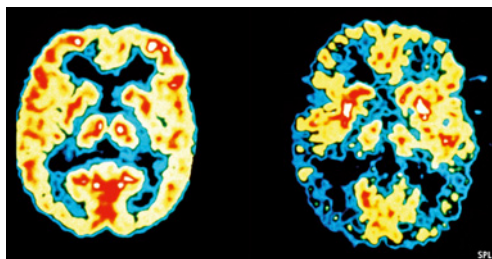
# O FASCINANTE MUNDO DA FÍSICA MODERNA

Os extraordinários desenvolvimentos da física (da mecânica, da termodinâmica e do eletromagnetismo) ao longo do século XIX não só melhoraram a nossa compreensão do mundo como deram origem a um conjunto de tecnologias que tornaram a vida humana mais cómoda. Com o avanço da chamada Revolução Industrial ocorreu uma notável melhoria da qualidade de vida das sociedades. Foram sendo construídas máquinas a vapor, motores de combustão e motores elétricos cada vez mais potentes, usados em fábricas para produção de bens e em veículos para circulação de pessoas e bens. Por outro lado, no final do século XIX, as comunicações telefónicas com e sem fios aproximavam as pessoas.

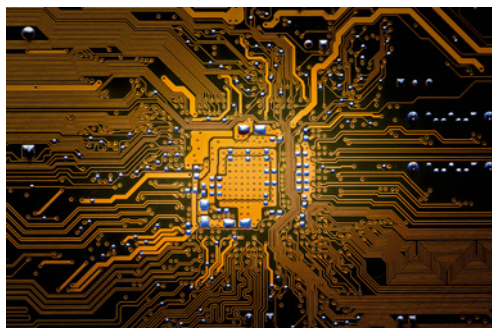
Este triunfo da ciência levou alguns cientistas, no final do século XIX, a acreditar que a física estava a chegar ao fim, uma vez que pouco mais haveria a descobrir. Um deles foi Lord Kelvin, mas ele próprio reconheceu que havia duas pequenas «nuvens» que toldavam essa visão. Uma tinha a ver com a propagação da luz no vazio, sem que existisse um meio, tal como acontece com o som. Mas esse meio, o éter, não foi detetado. A outra dizia respeito à distribuição de energia radiada pelo chamado corpo negro, um corpo emissor de luz. Não existia uma descrição correta das ondas eletromagnéticas emitidas por esse corpo.

Estes dois fenómenos, que contrariavam a visão ingénua do fim da física, estiveram na origem da física moderna. O primeiro levou à teoria da relatividade de Einstein e o segundo à teoria quântica de Planck, Einstein, Bohr e outros. Em vez de chegar ao fim, a física encontrou novos rumos. As «nuvens» de Kelvin deram lugar não apenas a novos conhecimentos, como a um conjunto de novas tecnologias que, à semelhança do que já tinha acontecido, mudaram a vida humana. O avanço da medicina muito deve à física moderna. Os transportes e as comunicações progrediram extraordinariamente e esse progresso não parou: veículos sem condutor, que se orientam por GPS e sensores, estão atualmente em fase de teste (o GPS usa a teoria quântica e a teoria da relatividade).

Achamos hoje imprescindíveis algumas tecnologias de base quântica com que lidamos no nosso dia a dia – por exemplo, computadores e telemóveis – sem nos lembrarmos que elas são o fruto dos desenvolvimentos da física moderna, no século XX, que ninguém conseguiu prever no século anterior. Que mais nos trará a física do século XXI?



**Fig. 2** Muitas técnicas de imagiologia médica assentam em tecnologias de base quântica.



**Fig. 3** Os transístores e os circuitos integrados, cujo desenvolvimento se deveu à física quântica, estão hoje por todo o lado.



# 3.1 INTRODUÇÃO À FÍSICA QUÂNTICA



**3.1.1** Emissão e absorção de radiação:  
Lei de Stefan-Boltzmann  
e deslocamento de Wien

**3.1.2** A quantização da energia  
segundo Planck

**3.1.3** Efeito fotoelétrico e teoria  
dos fótons de Einstein

**3.1.4** Dualidade onda-corpúsculo  
para a luz



**Física moderna:** área da física, desenvolvida no início do século XX, que inclui a física quântica e a teoria da relatividade.

A física quântica é um dos pilares da **física moderna**, juntamente com a teoria da relatividade formulada por Einstein.

A física quântica aplica-se a sistemas cujas dimensões sejam da escala molecular, atômica e subatômica. Na descrição dos fenômenos reconhece-se, assim, que se dá um «salto» quando se passa de uma escala que podemos designar por macroscópica (ou seja, a do nosso dia a dia) para a escala microscópica (a dos átomos e das moléculas).

É por isso que podemos explicar os movimentos comuns do dia a dia usando a mecânica clássica. Mas é a física quântica e a teoria da relatividade que se aplicam aos constituintes de toda a matéria.

Neste subdomínio descreveremos os factos que estiveram na base da formulação da física quântica, sem entrarmos na descrição do seu posterior desenvolvimento, o que se fará no ensino superior.

A teoria quântica surge noutros sítios do ensino secundário. Por exemplo, nas aulas de química fez-se alusão ao *spin*, que é uma grandeza própria da física quântica, e reconheceu-se a existência de níveis de energia bem definidos para os eletrões nos átomos, que é um resultado puramente quântico. Para descrever o movimento do eletrão em torno do núcleo atómico viu-se que apenas é possível indicar a probabilidade de o encontrar, o que está na origem do conceito de nuvem eletrónica (**Fig. 1**). O movimento do eletrão não é descrito, como se faz em mecânica clássica, recorrendo ao vetor posição, devido à natureza quântica desta partícula, uma vez que o eletrão é, ao mesmo tempo, onda e partícula. Houve, pois, necessidade de formular uma nova mecânica, a mecânica quântica, para descrever o movimento do eletrão e de outras partículas subatômicas.

Que descobertas científicas estiveram na origem do desenvolvimento da mecânica quântica? A resposta começou a ser dada no final do século XIX quando Planck encontrou uma solução verdadeiramente revolucionária para a explicação da radiação emitida pelos corpos. Vieram depois os trabalhos de Einstein e de vários outros cientistas.

Neste subdomínio, partindo do estudo da emissão e da absorção de radiação, chegaremos à noção de quantização da energia proposta por Planck. Abordaremos depois a explicação do efeito fotoelétrico dada por Einstein e chegaremos à noção de dualidade onda-partícula para a luz, a qual se pode generalizar para todas as partículas, como, por exemplo, o eletrão.



**Fig. 1** A descrição do movimento dos eletrões em torno do núcleo atómico só é possível usando a mecânica quântica.

## 3.1.1 Emissão e absorção de radiação: Lei de Stefan-Boltzmann e deslocamento de Wien

Todos os corpos emitem e absorvem energia por radiação. Vamos ver por que radiam energia e por que motivo a explicação deste fenómeno deu origem à mecânica quântica.

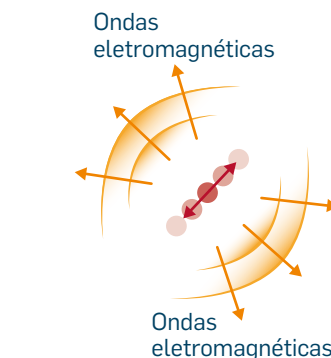
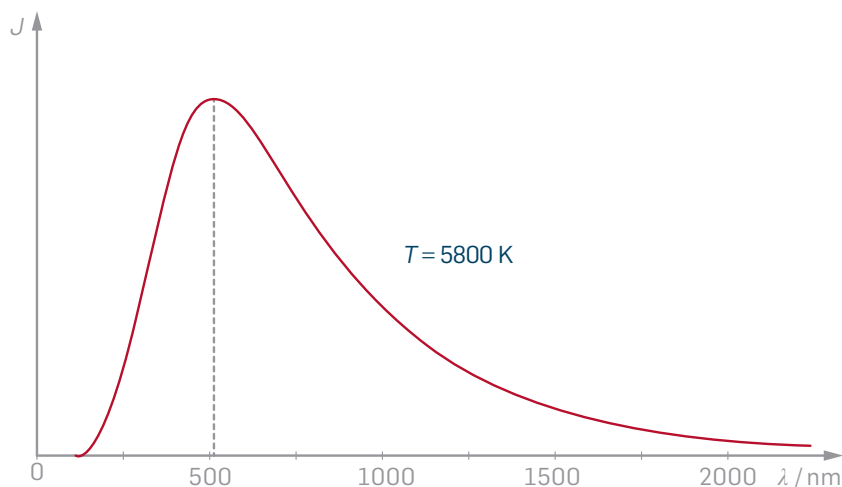
Os constituintes dos corpos – átomos ou moléculas – têm partículas com carga elétrica e estão em permanente agitação térmica. Mas sabemos que as cargas elétricas produzem campos elétricos e que as correntes elétricas (resultantes do movimento de cargas) produzem campos magnéticos.

Devido à agitação desses átomos e moléculas produzem-se campos eletromagnéticos e, em consequência, os respetivos corpos emitem ondas eletromagnéticas (**Fig. 2**), ou seja, **radiação**.

As frequências e as amplitudes das ondas eletromagnéticas emitidas dependem das frequências e das amplitudes das vibrações dos átomos e moléculas, e essa agitação depende da temperatura dos corpos. Ora, a uma mesma temperatura, nem todas as partículas oscilam com a mesma frequência, havendo, contudo, uma frequência média e uma amplitude média de oscilação que serão tanto maiores quanto maior for a temperatura do corpo.

O resultado é a emissão de radiação segundo um **espectro contínuo**, designado por **espectro da radiação térmica**, como o da **Fig. 3**. Nele se representa a **intensidade da radiação emitida por unidade de comprimento de onda** (ou **radiância espectral**), representada pelo símbolo  $J$ , em função do comprimento de onda,  $\lambda$ . O gráfico da **Fig. 3** mostra que o máximo de emissão de um corpo, à temperatura de 5800 K, ocorre para um comprimento de onda de cerca de 500 nm.

A forma desta curva corresponde à da emissão do chamado **corpo negro**.

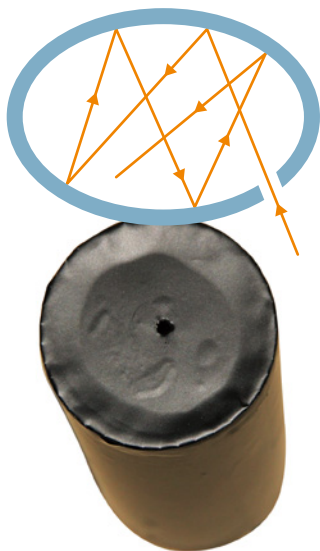


**Fig. 2** Um átomo que oscila produz ondas eletromagnéticas.

**Radiação:** é emitida por todos os corpos em consequência da agitação térmica dos seus átomos ou moléculas.

**Espectro da radiação térmica:** espectro contínuo resultante da emissão de radiação por um corpo. Depende da temperatura do corpo.

**Fig. 3** Espectro da radiação térmica de um corpo negro cuja temperatura é 5800 K. Representa-se a radiância espectral em função do comprimento de onda.



**Fig. 4** Uma caixa com um orifício, onde a radiação que por ele entra praticamente não sai, é um exemplo de corpo negro.

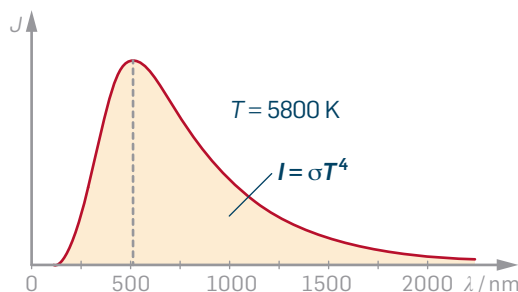
Mas o que é um corpo negro? Imaginemos um corpo oco com um pequeno orifício por onde pode entrar radiação, mas de onde, após várias reflexões e absorções nas paredes interiores da cavidade, ela terá muita dificuldade em sair, como se mostra na **Fig. 4**. A cavidade com o pequeno orifício comporta-se como um corpo negro. Um corpo negro absorve (e também emite) radiação e tem as seguintes características:

### Corpo negro

Corpo ideal que absorve toda a radiação que nele incide (absorvedor perfeito).

- A radiação que emite depende da sua temperatura e, a essa temperatura, é o corpo que mais radiação emite: é um emissor perfeito.
- A radiação que emite não depende da sua constituição e forma.
- Tem uma intensidade máxima de emissão para um comprimento de onda bem definido, o qual depende da sua temperatura.
- A intensidade de emissão tende para zero para comprimentos de onda pequenos e também para comprimentos de onda grandes.

A designação «corpo negro» traduz a ideia de que toda a luz é absorvida, seja qual for o material que constitua o corpo. Em particular, as estrelas são uma boa aproximação de um corpo negro. Em geral, qualquer corpo aquecido tem um espectro semelhante ao de um corpo negro. Para determinar a **intensidade total da radiação** (símbolo  $I$ ), emitida por um corpo negro a uma dada temperatura, temos de ter em conta a radiância espectral em todos os comprimentos de onda. Essa intensidade é dada pela «área» por baixo da curva no espectro de radiação térmica (**Fig. 5**).



**Fig. 5** A «área» por baixo da curva dá a intensidade total da radiação emitida, cujo valor é obtido a partir da Lei de Stefan-Boltzmann.

A intensidade total da radiação emitida por um corpo negro – que é a potência total emitida por unidade de área do corpo – é dada pela Lei de Stefan-Boltzmann, em homenagem a dois físicos que viveram no final do século XIX e início do século XX (**Fig. 6**).



**Fig. 6** Joseph Stefan (esloveno) e Ludwig Boltzmann (austríaco).

### Lei de Stefan-Boltzmann

A intensidade total da radiação emitida por um corpo negro,  $I$ , só depende da sua temperatura absoluta,  $T$ , e é proporcional à quarta potência dessa temperatura:

$$I = \sigma T^4$$

$\text{W m}^{-2}$        $\text{K}$   
 $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$

sendo  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  a constante de Stefan-Boltzmann.



Do mesmo modo que um corpo emite radiação, também absorve radiação pelo processo inverso ao da emissão: as suas partículas oscilam quando recebem radiação. A **Lei de Stefan-Boltzmann** também se aplica à absorção de radiação.

Mas um corpo real emite e absorve menos energia do que um corpo negro em idênticas condições, pois a emissão e a absorção não dependem só da temperatura mas também de características da superfície do corpo.

Como a intensidade da radiação é a potência por unidade de área ( $I = \frac{P}{A}$ ), a Lei de Stefan-Boltzmann para um corpo pode ser apresentada na seguinte forma:

### Emissão e absorção de radiação por um corpo

$$P = e \sigma A T^4$$

$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4} \text{ m}^2$

$e$ : emissividade – número entre 0 e 1 ( $0 \leq e \leq 1$ ); depende da constituição da superfície do corpo;  $e = 1$  só para um emissor e absorvedor ideal (corpo negro).

$\sigma$ : constante de Stefan-Boltzmann.

$A$ : área da superfície do corpo.

$T$ : temperatura da superfície do corpo (na emissão de radiação); ou temperatura da vizinhança do corpo (na absorção de radiação).

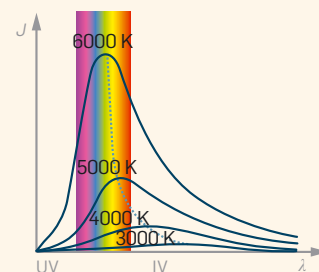
Como  $e < 1$  para corpos reais, estes radiam menos do que um corpo negro à mesma temperatura e com a mesma área superficial. Por exemplo, o aço muito polido é quase um refletor perfeito pois  $e = 0,07$ : o aço absorve pouca radiação (porque reflete muita), ou seja, é um mau absorvedor e também emite pouca radiação. Mas a tinta negra «mate» (uma tinta não brilhante) é quase um absorvedor perfeito, pois  $e = 0,97$ : absorve muita radiação e também emite muita radiação. Um bom emissor de radiação é, pois, um bom absorvedor de radiação.

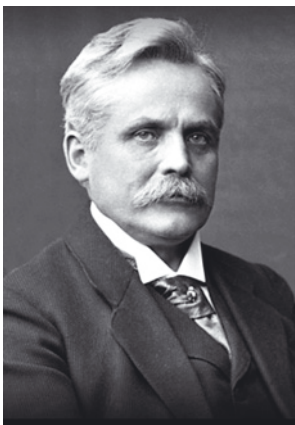
E como mudará o espectro de radiação térmica da **Fig. 3** se variar a temperatura do corpo negro? Quanto maior for a temperatura do corpo mais agitados estarão os seus átomos e moléculas: as amplitudes e as frequências das suas oscilações serão, em média, maiores, e o corpo radiará mais energia. Por isso o espectro de emissão térmica modifica-se, o que permite retirar algumas conclusões (**Fig. 7**).

**Lei de Stefan-Boltzmann:** descreve a emissão e a absorção de radiação por um corpo.

**Fig. 7** Alteração do espectro de emissão térmica de um corpo negro quando varia a sua temperatura. Assinalam-se as zonas do visível, ultravioleta e infravermelho.

- O valor máximo da radiância espectral (máximo da curva) será tanto maior quanto maior for a temperatura.
- Quanto maior for a temperatura, maior será a intensidade total da radiação emitida (a curva correspondente à maior temperatura tem por baixo uma maior área).
- Quando a temperatura aumenta, o máximo da curva desloca-se para menores comprimentos de onda, facto designado por **deslocamento de Wien**.





**Fig. 8** Wilhelm Wien recebeu, em 1911, o prémio Nobel da Física pelo seu trabalho sobre a radiação do corpo negro.

Wilhelm Wien (**Fig. 8**) foi um físico alemão que, ao estudar o corpo negro, relacionou a temperatura desse corpo negro com o comprimento de onda em que é máxima a emissão de radiação, formulando a Lei do Deslocamento de Wien:

### Lei do Deslocamento de Wien (ou Lei de Wien)

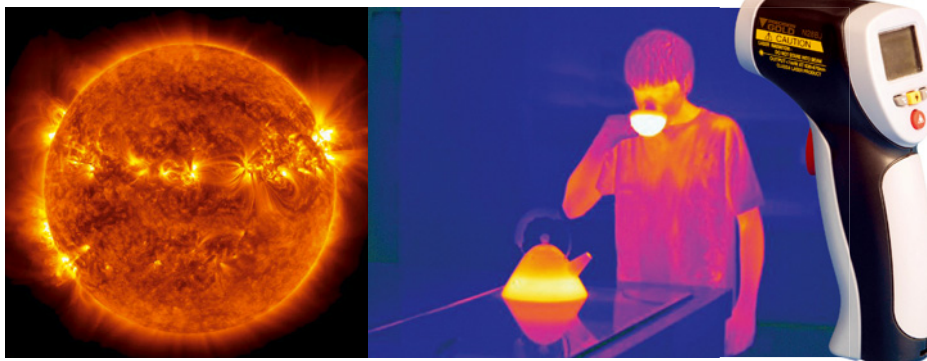
No espectro da radiação térmica de um corpo negro, a temperatura absoluta é inversamente proporcional ao comprimento de onda em que é máxima a emissão de radiação:

$$\lambda T = B$$

m K      m K

sendo  $B = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$  a constante de Wien.

Este resultado tem várias aplicações. Por exemplo, a partir da análise do espectro de radiação térmica pode conhecer-se a temperatura superficial de uma estrela, ou a temperatura de um corpo com um termómetro de radiação, e interpretar imagens de termogramas (**Fig. 9**).



**Fig. 9** Pode conhecer-se a temperatura superficial de um corpo analisando o seu espectro de radiação térmica.

### Questão resolvida 1



O espectro da radiação emitida por corpos à temperatura ambiente (300 K) é do tipo dos espectros da **Fig. 7** (página 229) mas a emissão dá-se na região não visível.

- Mostre que o máximo de emissão ocorre predominantemente no infravermelho.
- A temperatura superficial de uma pessoa, cuja área superficial é cerca de  $2,0 \text{ m}^2$ , é  $35 \text{ }^\circ\text{C}$ . A sua pele tem uma emissividade média de 0,50. Faça uma estimativa da energia que a pessoa emite por radiação em 1,0 min.
- Se um pedaço de metal for aquecido para o dobro da temperatura absoluta, como variará o comprimento de onda para o qual ocorre o máximo de emissão?



- À temperatura ambiente, que é cerca de 300 K, aplicando a Lei do Deslocamento de Wien calcula-se o comprimento de onda para o qual se dá o máximo de emissão:

$$\lambda T = B, \text{ ou seja, } \lambda = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{300} = 9,66 \times 10^{-6} \text{ m} = 9,66 \times 10^3 \text{ nm}$$

Este comprimento de onda situa-se na zona do infravermelho (a zona visível situa-se entre 400 nm e 700 nm).

- Como  $E = P \Delta t$ , e usando a Lei de Stefan-Boltzmann, tem-se:

$$E = e \sigma A T^4 \Delta t \text{ ou}$$

$$E = 0,50 \times 5,67 \times 10^{-8} \times 2,0 \times (35 + 273,15)^4 \times 60 \Leftrightarrow E = 3,1 \times 10^4 \text{ J}$$

- Como a temperatura absoluta e o comprimento de onda de máxima emissão são inversamente proporcionais, se a temperatura absoluta duplicar o comprimento de onda passará a metade.

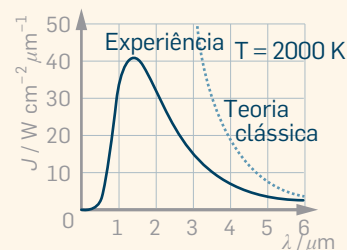
## 3.1.2 A quantização da energia segundo Planck

No final do século XIX procurou explicar-se a radiação emitida por um corpo negro com a teoria eletromagnética de Maxwell, mas os cálculos conduziram a um resultado em desacordo com os dados experimentais.

A **Fig. 10** mostra a curva experimental (semelhante à da **Fig. 3**, página 227) para um corpo negro, a 2000 K, e a curva prevista pela teoria clássica. A enorme diferença entre os resultados experimentais e a previsão teórica ficou conhecida por **catástrofe do ultravioleta**, por essa diferença se observar na zona do ultravioleta (a dos menores comprimentos de onda).

### A curva prevista pela teoria eletromagnética:

- aproxima-se da curva experimental na zona dos grandes comprimentos de onda, tendendo ambas as curvas para zero quando aumenta o comprimento de onda;
- difere da curva experimental na zona dos pequenos comprimentos de onda (**catástrofe do ultravioleta**): quando o comprimento de onda diminui a radiação espectral aumenta. Experimentalmente verifica-se que a radiação espectral tem um máximo e tende para zero para pequenos comprimentos de onda.



**Fig. 10** Catástrofe do ultravioleta: expressão por que ficou conhecida a discrepância entre a curva para a radiação do corpo negro prevista pela teoria eletromagnética e a curva experimental.

Em 1900, o físico alemão Max Planck (**Fig. 11**) encontrou a solução para resolver a discrepância. Planck supôs que a radiação era emitida por um conjunto de osciladores eletromagnéticos (cargas elétricas que oscilam, **Fig. 2**, página 227) cuja energia não podia ser qualquer, mas sim um múltiplo de uma energia elementar. Ou seja, a **energia** seria **quantizada** (só admitia certos valores):

### Postulado de Planck: quantização da energia

Há uma energia elementar do oscilador eletromagnético, chamada *quantum* de energia, que é proporcional à frequência de oscilação:

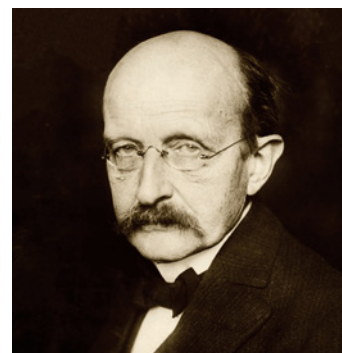
$$E_0 = hf \quad \text{com } h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s a constante de Planck}$$

Os osciladores eletromagnéticos só podem ter energias que sejam múltiplos inteiros da energia elementar:

$$E = nE_0 \quad \text{ou} \quad E = nhf \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

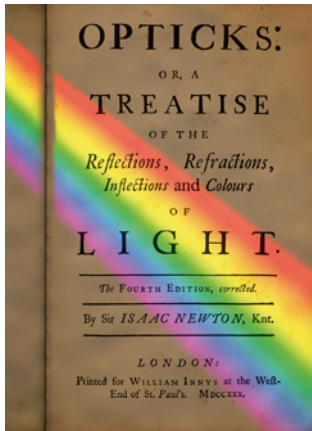
Em consequência, os osciladores só podem radiar quantidades discretas de energia, chamadas *quanta* (plural de *quantum*) de energia.

A hipótese de Planck evitava a catástrofe do ultravioleta: o valor não nulo de  $h$  permitia descrever corretamente a curva de radiação espectral na região dos pequenos comprimentos de onda, ou seja, descrever com notável precisão a emissão do corpo negro, e ainda deduzir a Lei de Stefan-Boltzmann e a Lei do Deslocamento de Wien. A ideia dos *quanta* de energia revolucionou a física, mostrando-se muito poderosa!



**Fig. 11** Max Planck, Prêmio Nobel da Física em 1918, alemão, postulou que a radiação é emitida de uma forma descontínua (discreta), os *quanta*, revolucionando a física.

### 3.1.3 Efeito fotoelétrico e teoria dos fótons de Einstein



**Fig. 12** Newton admitiu que a luz era constituída por pequenos corpúsculos.



**Fig. 13** Thomas Young, físico inglês dos séculos XVIII e XIX que explicou a difração da luz através da teoria ondulatória.

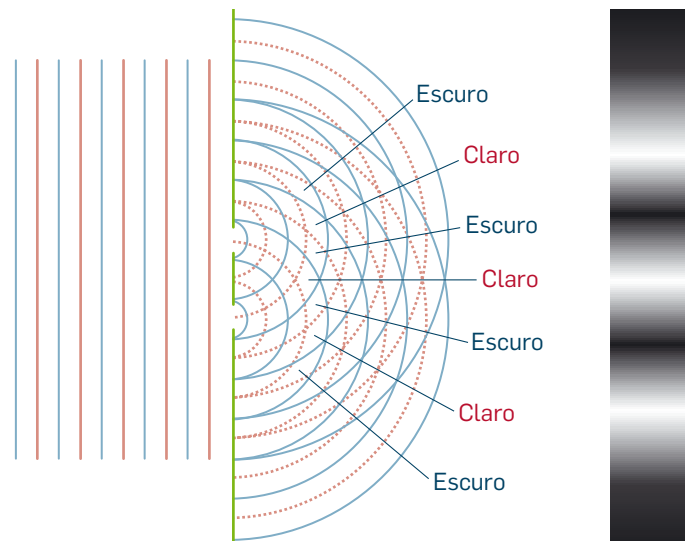
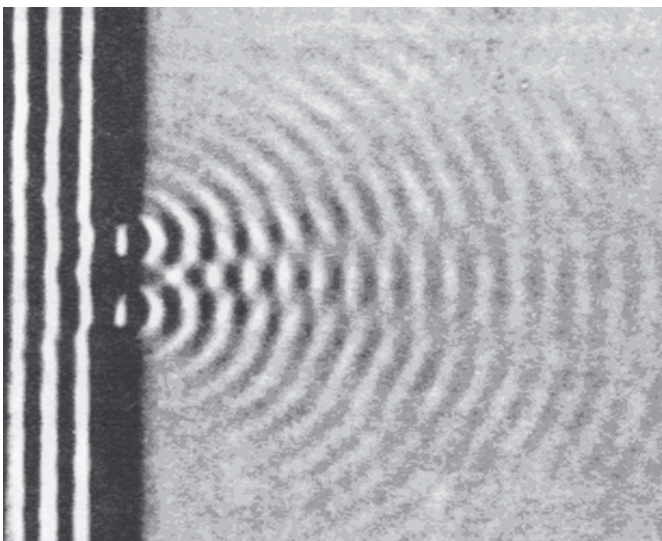
No século XVII, Newton defendeu que as fontes luminosas emitiam pequenos corpúsculos, em todas as direções, a grandes velocidades. Esta teoria (**Fig. 12**), conhecida por **Teoria Corpuscular da Luz**, só permitia explicar fenómenos óticos mais comuns como a reflexão e a refração.

Um contemporâneo de Newton, o holandês Christian Huygens, defendeu, pelo contrário, que a luz era uma onda, criando assim a **Teoria Ondulatória da Luz**, a qual explicava outros fenómenos, como a interferência.

Em 1803, o físico inglês Thomas Young (**Fig. 13**) fez prevalecer a Teoria Ondulatória em resultado da chamada **experiência de Young**: a luz incidia numa dupla fenda, sendo geradas, em cada fenda, ondas que se propagavam e interferiam umas com as outras; formavam-se zonas claras, resultantes de interferências construtivas, e zonas escuras, resultantes de interferências destrutivas, criando-se um padrão de claro e escuro. **A Fig. 14** mostra, no lado esquerdo, uma experiência semelhante à de Young feita com água numa tina de ondas. No lado direito representa-se o padrão de claros e de escuros que se observa no caso da luz.

Este fenómeno, chamado difração, só podia ser explicado usando a Teoria Ondulatória. A Teoria Ondulatória acabou, assim, por se revelar mais adequada do que a Teoria Corpuscular.

O carácter ondulatório da luz veio a ser confirmado pelas equações do eletromagnetismo de Maxwell: estas mostraram que a propagação de uma perturbação do campo eletromagnético se faz por uma onda que se propaga à velocidade da luz, confirmando os resultados das experiências de interferência e difração.



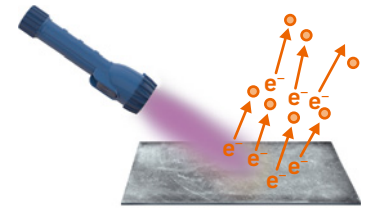
**Fig. 14** Experiência de Young feita com ondas numa tina com água (à esquerda). A experiência feita com luz mostrou o carácter ondulatório desta (à direita).



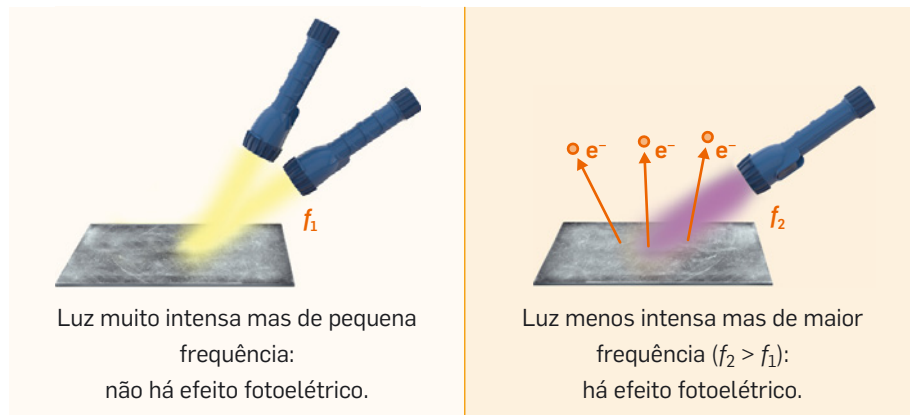
Apesar de a natureza ondulatória da luz parecer firmemente estabelecida, um fenómeno descoberto ainda no século XIX haveria de mudar a nossa compreensão da luz. O alemão Heinrich Hertz observou, em 1887, a emissão de eletrões da superfície de um metal quando nele incidia luz de uma certa frequência. Este fenómeno é chamado **efeito fotoelétrico** (Fig. 15).

Para a maioria dos metais, a emissão de eletrões só ocorre por incidência de luz ultravioleta ou luz ainda mais energética, ou seja, o efeito fotoelétrico depende da frequência da luz.

Observemos a Fig. 16: podemos iluminar um metal com luz muito intensa mas de pequena frequência sem que haja emissão de eletrões; contudo, o mesmo metal pode ser iluminado com luz menos intensa mas de maior frequência e observar-se a remoção de eletrões do metal. Estes resultados permitem concluir que não é a intensidade da luz incidente mas, sim, a sua frequência que determina se há ou não emissão de eletrões pelo metal.



**Fig. 15** Efeito fotoelétrico: emissão de eletrões por um metal quando nele incide luz de frequência adequada.



**Fig. 16** É a frequência da luz incidente e não a sua intensidade que determina se há ou não emissão de eletrões pelo metal.

Na Fig. 17 representa-se uma **célula fotoelétrica** e o que ocorre quando é aplicada uma diferença de potencial elétrico,  $U$ , entre um elétrodo com potencial positivo (ânodo) e um elétrodo com potencial negativo onde incide luz (chamado fotocátodo).

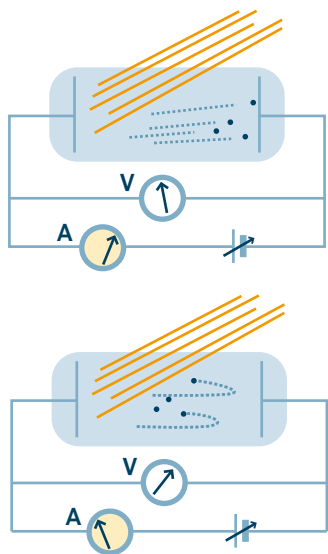
Uma luz monocromática de frequência  $f$  passa através de uma janela transparente e incide numa placa metálica (fotocátodo), e este emite eletrões:

Cátodo  $-$   $U$   $+$  Ânodo

Quando se fecha o circuito, os eletrões emitidos pelo fotocátodo, **D**, são atraídos para o ânodo, **C**, uma vez que a diferença de potencial entre **C** e **D** é positiva. Se esta for suficientemente elevada, todos os eletrões emitidos chegarão ao ânodo e a corrente elétrica estabelecida no circuito atingirá um valor limite (chamada corrente de saturação).

Se a polaridade no gerador de tensão for invertida, a diferença de potencial entre **C** e **D** é negativa, os eletrões que saem do fotocátodo serão repelidos pelo elétrodo **C**, diminuindo a corrente elétrica. Aumentando a diferença de potencial, a corrente elétrica acabará por se anular para uma diferença de potencial igual a  $-U_0$  (sendo  $U_0 > 0$ ), que é designada por **potencial de paragem**. Neste caso, apenas os eletrões mais energéticos chegarão próximo do elétrodo **C**.

**Fig. 17** Célula fotoelétrica para o estudo experimental do efeito fotoelétrico.

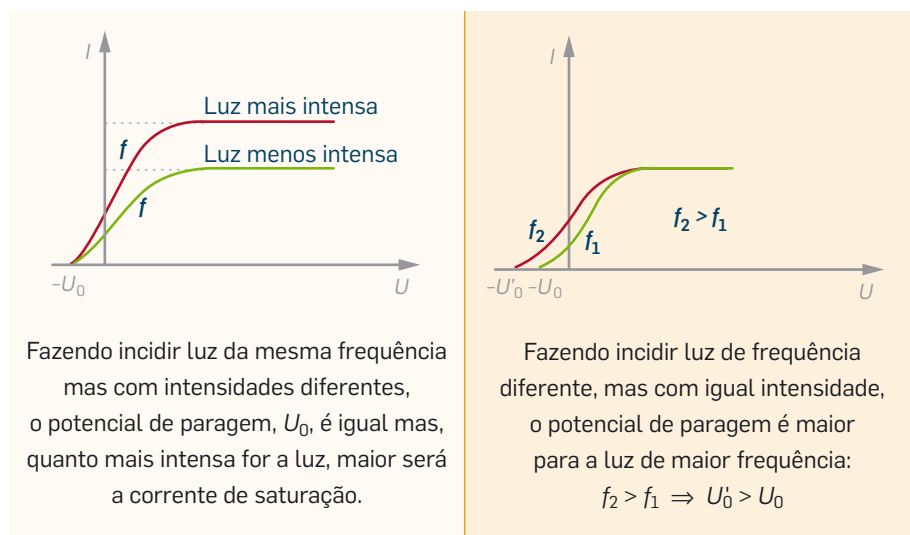


**Fig. 18** Se os eletrões tiverem energia cinética suficiente para «vencer» o potencial de paragem, atingirão o ânodo (em cima); caso contrário, não passará corrente elétrica no circuito (em baixo).

**Fig. 19** Curvas características para uma célula fotoelétrica.

Como a energia cinética máxima dos eletrões é igual à energia potencial elétrica inicial,  $E_c = eU_0$ , o potencial de paragem permite medir esta energia cinética. Só se os eletrões saírem do fotocátodo com energia cinética superior a  $eU_0$  é que atingirão o outro eletrodo (**Fig. 18**).

A **Fig. 19** mostra as curvas da corrente elétrica em função da tensão aplicada,  $I(U)$ , obtidas experimentalmente, e as conclusões que delas podemos retirar:

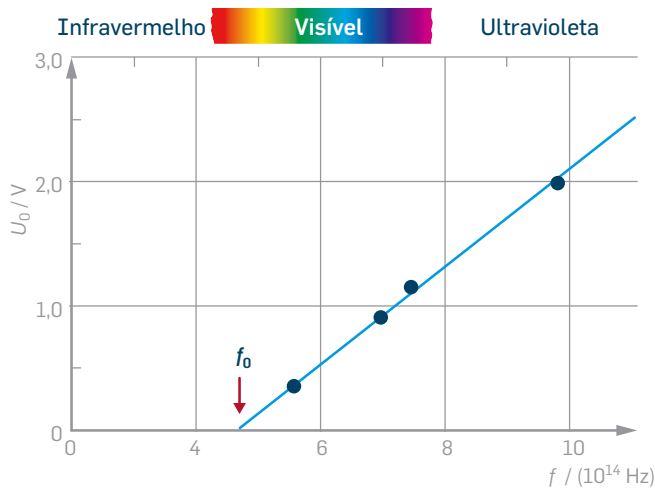


Fazendo incidir luz da mesma frequência mas com intensidades diferentes, o potencial de paragem,  $U_0$ , é igual mas, quanto mais intensa for a luz, maior será a corrente de saturação.

Fazendo incidir luz de frequência diferente, mas com igual intensidade, o potencial de paragem é maior para a luz de maior frequência:  
 $f_2 > f_1 \Rightarrow U_0' > U_0$

A corrente elétrica aumenta com a diferença de potencial aplicada aos eletrodos, até atingir um valor constante (corrente de saturação).

Quando se representa o potencial de paragem,  $U_0$ , em função da frequência  $f$  da luz incidente, obtém-se um gráfico linear como o da **Fig. 20**. Em 1916, o físico norte-americano Robert Millikan efetuou medidas cuidadosas do efeito fotoelétrico, mostrando que o declive dessas retas é igual para todos os metais!



**Fig. 20** Potencial de paragem em função da frequência da luz incidente no metal sódio, segundo os dados de Millikan.

Os estudos experimentais feitos sobre o **efeito fotoelétrico** estavam em contradição com as previsões da teoria clássica. Na **Fig. 21** apresentam-se as principais diferenças encontradas.

Previsões da teoria clássica	Resultados experimentais
O número de eletrões emitidos será tanto maior quanto maior for a intensidade da luz.	Desde que ocorra efeito fotoelétrico, o número de eletrões emitidos será tanto maior quanto maior for a intensidade da luz incidente.
Aumentando a intensidade da luz incidente, aumenta a energia transferida para os eletrões, aumentando a sua energia cinética máxima.	O potencial de paragem e a energia cinética máxima dos eletrões não dependem da intensidade da luz incidente, mas apenas da sua frequência e do metal onde a luz incide.
A luz de qualquer frequência deverá remover eletrões da superfície do metal desde que a sua intensidade seja elevada ou se espere tempo suficiente para que o eletrão acumule energia.	Há uma frequência mínima da luz incidente abaixo da qual não há emissão de eletrões. Se essa frequência aumentar, o potencial de paragem aumentará linearmente.
Os eletrões demoram a acumular energia para se libertarem do metal, sendo maior o tempo para luz menos intensa.	A emissão dos eletrões é praticamente instantânea: a corrente de eletrões estabelece-se mal haja incidência de luz.

**Efeito fotoelétrico:** não era explicado pela teoria ondulatória da luz. Só foi explicado por Einstein.

**Fig. 21** Previsões da teoria clássica para o efeito fotoelétrico e resultados experimentais.

Das previsões da teoria clássica indicadas, só a primeira foi confirmada pela experiência! A solução para o problema foi encontrada por Albert Einstein (**Fig. 22**).

Enquanto Planck, na sua teoria da radiação do corpo negro, tinha suposto que a emissão e absorção de radiação se faziam por quantidades discretas de energia, Einstein foi mais longe, afirmando que a própria radiação (luz) só pode ter valores discretos de energia, isto é, múltiplos de uma quantidade elementar. Esta quantidade ou «pacote» de energia elementar estava associada a uma partícula de luz, mais tarde designada por fóton. A luz tinha, pois, uma natureza corpuscular.

### A teoria dos fótons, segundo Einstein

A luz existe em quantidades discretas: *quanta* de radiação ou **fótons**.

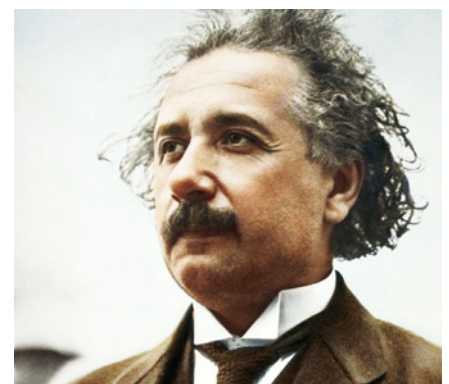
A energia de um fóton é dada pela relação de Planck

$$E_{\text{fóton}} = hf$$

A energia de um feixe de luz (fótons) é

$$E = nhf \text{ com } n = 1, 2, 3, \dots \text{ (número de fótons)}$$

A intensidade de uma fonte de luz depende do número de fótons emitidos por unidade de tempo e de área.



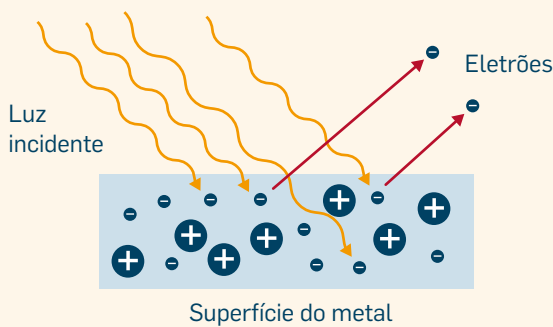
**Fig. 22** Albert Einstein, Prémio Nobel da Física em 1921 pela explicação do efeito fotoelétrico.

**Função trabalho**,  $W$ : energia mínima necessária para remover o elétron mais energético da superfície de um metal.

A partir desta hipótese, Einstein explicou, em 1905, o efeito fotoelétrico. Supôs que um fóton de luz incidente colidia com um elétron da superfície do metal, transferindo a sua energia para este. Se essa energia fosse superior à energia necessária para remover o elétron mais energético do metal, designada por **função trabalho**,  $W$ , o elétron seria removido da superfície, ou seja, ocorreria efeito fotoelétrico.

### Efeito fotoelétrico

Emissão de um elétron pela superfície de um metal onde incide luz, de frequência  $f$ , resultante do choque de um fóton da luz incidente com um elétron do metal.



$$E_{\text{fóton}} = hf$$

$$E_{c\text{máx}} = \frac{1}{2} m_e v_{\text{máx}}^2$$

A energia cinética máxima,  $E_{c\text{máx}}$ , do elétron removido do metal é a diferença entre a energia do fóton incidente,  $E_{\text{fóton}}$ , e a função trabalho,  $W$ :

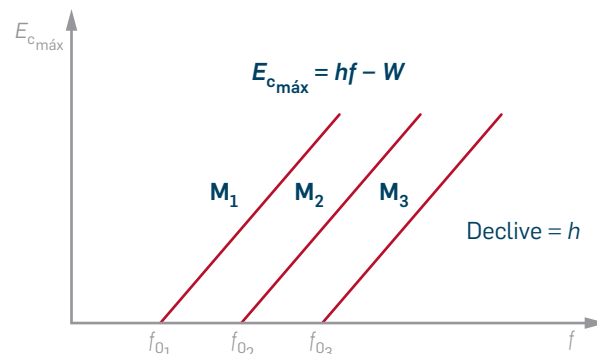
$$E_{c\text{máx}} = E_{\text{fóton}} - W$$

ou

$$\frac{1}{2} m_e v_{\text{máx}}^2 = hf - W$$

- Só haverá efeito fotoelétrico se a energia do fóton incidente for superior à função trabalho, que é característica do metal:  $hf \geq W$ .
- A energia mínima do fóton que pode remover um elétron é igual à função trabalho,  $W = h f_{\text{min}}$ , sendo a frequência mínima dada por  $f_{\text{min}} = \frac{W}{h}$ .
- A energia cinética máxima só depende, para uma dada superfície metálica (mesmo  $W$ ), da frequência da luz incidente e não da sua intensidade.
- O número de elétrons emitidos é proporcional ao número de fótons incidentes: luz mais intensa produz emissão de mais elétrons.

A **Fig. 23** representa o gráfico da energia cinética máxima do elétron removido em função da frequência da luz incidente para três metais diferentes,  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ . Em cada caso,  $f_0$  é a frequência mínima da luz para que ocorra efeito fotoelétrico nesse metal. Por outro lado, verifica-se que as retas têm igual declive: a equação que descreve o efeito fotoelétrico permite concluir que esse declive é igual à constante de Planck,  $h$ .



**Fig. 23** Energia cinética máxima do elétron removido em função da frequência da luz incidente para três metais: o declive das retas é igual à constante de Planck.



A **Tab. 1** indica as frequências mínimas da luz para que ocorra efeito fotoelétrico em alguns metais.

A interpretação revolucionária que Einstein fez da natureza da luz não foi bem aceita pela maioria dos físicos da época, incluindo o próprio Planck. Foi, aliás, por estar convencido de que Einstein estava errado que Millikan planeou e efetuou medidas muito precisas do efeito fotoelétrico numa série de metais. Mas os resultados vieram dar razão a Einstein, que viria a receber o Prémio Nobel da Física em 1921 pela sua explicação do efeito fotoelétrico.

O efeito fotoelétrico tem muitas aplicações, como, por exemplo, na abertura automática de portas, no funcionamento de alarmes, na medição da intensidade da luz em máquinas fotográficas e de câmaras de vídeo, etc. As fotocélulas são também usadas para ligar automaticamente as luzes da rua ao anoitecer, quando a intensidade da luz está abaixo de um certo valor, e para as desligar ao amanhecer (**Fig. 24**). Sensores óticos que se baseiam no efeito fotoelétrico são usados para ler as faixas de som escritas em películas cinematográficas.

Um outro aparelho que se baseia neste efeito é o **fotomultiplicador**: tubo de vidro onde se fez o vácuo e onde existem um fotocátodo e uma série de elétrodos (**Fig. 25**). Um fóton que entra na janela do fotomultiplicador emite um eletrão do fotocátodo, que é acelerado para o primeiro elétrodo. Ao atingi-lo, esse eletrão faz emitir vários eletrões que são acelerados para o segundo elétrodo e assim sucessivamente, gerando-se uma multiplicação do número de eletrões. No último elétrodo poderemos ter vários milhões de eletrões que foram gerados por um único fóton! Com a ajuda de um fotomultiplicador é possível contar fótons um a um.

Metal	$f_{\text{min}} / \text{Hz}$
Césio	$4,5 \times 10^{14}$
Potássio	$5,4 \times 10^{14}$
Sódio	$5,7 \times 10^{14}$
Zinco	$8,1 \times 10^{14}$
Prata	$11,1 \times 10^{14}$

**Tab. 1** Frequência mínima da luz incidente para que ocorra efeito fotoelétrico em alguns metais.



**Fig. 24** A intensidade da iluminação é controlada por células fotoelétricas.

### Questão resolvida 2



Uma luz monocromática, de 500 nm, incide sobre uma superfície metálica de césio. São emitidos eletrões cuja energia cinética máxima é  $1,0 \times 10^{-19}$  J.

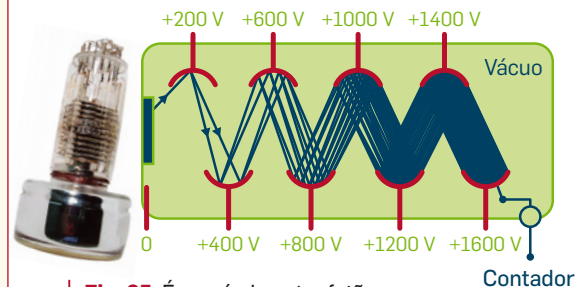
Calcule o valor da função trabalho para o césio e a frequência mínima da luz capaz de produzir efeito fotoelétrico nesse metal.

Como  $f = \frac{c}{\lambda}$  e  $E_{\text{c\acute{m}ax}} = hf - W \Rightarrow W = hf - E_{\text{c\acute{m}ax}}$ , vem

$$W = 6,626 \times 10^{-34} \times \frac{3,0 \times 10^8}{500 \times 10^{-9}} - 1,0 \times 10^{-19} = 3,0 \times 10^{-19} \text{ J}$$

A frequência mínima da luz incidente obtém-se para uma energia cinética nula dos eletrões:

$$E_{\text{c\acute{m}ax}} = hf - W \Rightarrow 0 = hf_{\text{min}} - W \Rightarrow \\ \Rightarrow f_{\text{min}} = \frac{W}{h} = \frac{3,0 \times 10^{-19}}{6,626 \times 10^{-34}} = 4,5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$



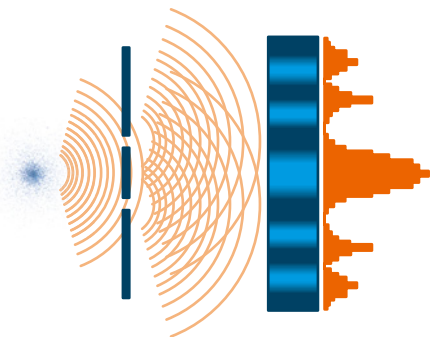
**Fig. 25** É possível contar fótons com um fotomultiplicador.

## 3.1.4 Dualidade onda-corpúsculo para a luz

**Comportamento ondulatório da luz:** manifesta-se nos fenômenos de interferência e difração da luz.

**Comportamento corpuscular da luz:** manifesta-se em certas interações da luz com a matéria, como no efeito fotoelétrico.

**Comportamento dual da luz:** pode comportar-se como onda ou como partícula.



**Fig. 26** O padrão de interferência na experiência de Young pode ser registrado por um fotomultiplicador, que conta os fótons.

**Planck e Einstein:** precursores da física quântica.

O **comportamento ondulatório da luz** aparece de modo evidente em fenômenos de interferência e de difração da luz (por uma fenda ou múltiplas fendas como numa rede de difração). Contudo, a radiação do corpo negro só pode ser explicada supondo que a energia é emitida em quantidades discretas de energia e não de forma contínua, como ocorre numa onda.

Também no efeito fotoelétrico, em que há interação da luz com a matéria, a explicação baseia-se na hipótese de que a luz surge na forma de corpúsculos, os fótons, que, segundo Einstein, têm uma energia quantizada. Ou seja, este fenômeno revela o **comportamento corpuscular da luz**.

Mas a intensidade de uma fonte de luz depende do número de fótons,  $n$ , emitidos por unidade de tempo e de área, pois  $E = nhf$ . Por um lado, essa contagem tem implícita a noção de corpúsculo, mas por outro, a energia depende da frequência da luz,  $f$ , grandeza que só faz sentido para uma onda! Então a luz será onda ou partículas?

Na realidade, a luz pode comportar-se como onda ou como partículas, ou seja, tem um **comportamento dual**. A dualidade onda-partícula é evidente na experiência de Young, uma vez que há um padrão de interferência da luz que atravessa as duas fendas (**Fig. 26**).

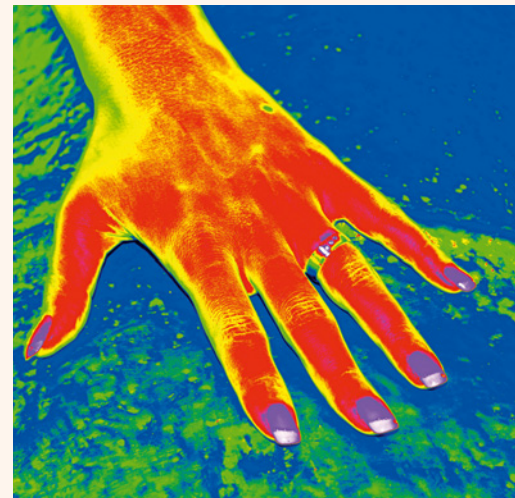
Medindo a intensidade da fonte de luz com um fotomultiplicador, verificamos que a corrente não é contínua, mas aparece em pulsos. Cada um destes pulsos corresponde à entrada de um fóton no fotomultiplicador. Fazendo um varrimento lento do padrão de interferência e contando o número de pulsos em cada posição, podemos fazer um gráfico do número de pulsos em função da posição. O gráfico assemelha-se ao da intensidade calculada supondo que a luz é uma onda eletromagnética. No entanto, a luz é registrada no fotomultiplicador como pequenos impulsos, ou seja, como pequenas quantidades discretas de energia – precisamente os fótons!

A insuficiência das teorias clássicas na explicação da radiação do corpo negro e do efeito fotoelétrico está na origem da criação de uma nova era na física – a era da física quântica. Foi graças aos trabalhos de **Planck** e de **Einstein** que novas ideias começaram a germinar e que, continuadas por outros, viriam a ter como consequência a formulação, já nos anos 20 do século XX, da mecânica quântica numa versão mais avançada.

A mecânica quântica tem passado todos os testes experimentais! As tecnologias que se baseiam direta ou indiretamente em fenômenos quânticos invadiram o nosso cotidiano. Num leitor de CD, a emissão de luz *laser* que lê a informação gravada no disco é um fenômeno quântico. Também os semicondutores dos circuitos integrados têm por base fenômenos que apenas se compreendem recorrendo à mecânica quântica. Sem o desenvolvimento da mecânica quântica não existiriam discos compactos, nem computadores, nem muita da tecnologia com que lidamos todos os dias!

## RESUMO

- **Espectro da radiação térmica:** espectro contínuo resultante da emissão de radiação por um corpo. Depende da sua temperatura.
- **Corpo negro:** corpo ideal que absorve toda a radiação que nele incide (é um absorvedor perfeito). A intensidade e o espectro da radiação que emite apenas dependem da sua temperatura: é o corpo que mais radiação emite a essa temperatura (é um emissor perfeito).
- **Lei de Stefan-Boltzmann:** a intensidade total (potência por unidade de área:  $P/A$ ) da radiação emitida por um corpo negro é diretamente proporcional à quarta potência da sua temperatura absoluta,  $T$ , ou seja,  $I = \sigma T^4$  ( $\sigma$ : constante de Stefan-Boltzmann); potência emitida:  $P = A\sigma T^4$  ( $A$ : área superficial do corpo).
- **Emissividade de uma superfície,  $e$ :** relaciona-se com a emissão de radiação pela superfície, dependendo da sua constituição;  $0 \leq e \leq 1$ ; a emissividade é máxima para um corpo negro:  $e = 1$ .
- **Emissão e absorção de energia por um corpo:** é sempre inferior à que ocorre num corpo negro. Potência emitida:  $P = \sigma e A T^4$  ( $A$ : área superficial do corpo;  $e$ : emissividade da superfície;  $T$ : temperatura absoluta da superfície). Potência absorvida:  $P = \sigma e A T^4$ , sendo  $T$  a temperatura absoluta da vizinhança do corpo.
- **Lei do deslocamento de Wien:** no espectro da radiação térmica, o comprimento de onda,  $\lambda$ , em que é máxima a emissão de radiação do corpo negro, é inversamente proporcional à temperatura absoluta,  $T$ , do corpo:  $\lambda T = B$  ( $B$ : constante de Wien).
- **Catástrofe do ultravioleta:** discrepância entre a curva para a radiação do corpo negro prevista pela teoria eletromagnética e a curva experimental.
- **Postulado de Planck (quantização da energia):** a energia elementar (*quantum* de energia) de um oscilador eletromagnético é proporcional à frequência,  $f$ , de oscilação,  $E_0 = hf$  ( $h$ : constante de Planck); a energia emitida pelo oscilador não é qualquer, tem de ser um múltiplo inteiro da energia elementar:  $E = nhf$ .
- **Teoria dos fótons de Einstein:** a luz existe em quantidades discretas, os *quanta* de radiação ou fótons, sendo a energia de um fóton dada por  $E_{\text{fóton}} = hf$ ; a energia de um feixe de luz de dada frequência é um múltiplo inteiro da energia do fóton:  $E = nhf$ .
- **Efeito fotoelétrico:** emissão de eletrões por um metal em consequência da incidência de luz de frequência adequada. Só ocorre se a energia do fóton incidente for superior à função trabalho,  $W$  (energia mínima para remover o eletrão ao metal); não depende da intensidade da luz incidente. A energia cinética máxima dos eletrões emitidos é  $E_{\text{c,máx}} = E_{\text{fóton}} - W$ .
- **Dualidade onda-partícula para a luz:** o comportamento ondulatório da luz manifesta-se nos fenómenos de interferência e difração; o comportamento corpuscular manifesta-se em certas interações da luz com a matéria, tal como no efeito fotoelétrico.



ALBERT EINSTEIN\*NOBELPREIS PHYSIK 1921



DEUTSCHE BUNDESPOST

1979



# QUESTÕES

## Nota

Na resolução das questões, considere os seguintes valores:

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}; B = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$$

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}; h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

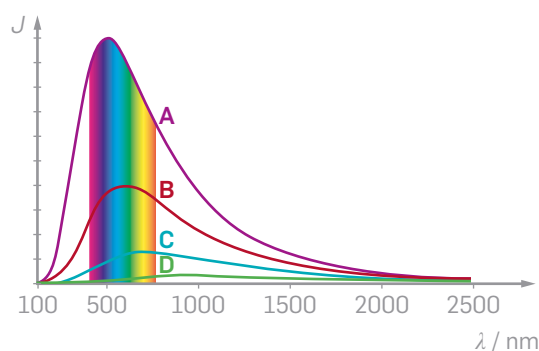
### 3.1.1 Emissão e absorção de radiação: Lei de Stefan-Boltzmann e deslocamento de Wien

- A radiação eletromagnética emitida por um corpo:
  - é designada por radiação térmica e não depende da temperatura do corpo.
  - é independente da frequência com que oscilam os seus átomos e moléculas.
  - tem origem nas oscilações das cargas elétricas no corpo.
  - apresenta um espectro de emissão descontínuo.
- Um corpo negro:
  - reflete toda a radiação que nele incide.
  - absorve toda a radiação que nele incide, não emitindo nenhuma radiação.
  - absorve e emite radiação, cuja intensidade depende da sua constituição e forma.
  - é o corpo que melhor absorve radiação e que mais emite radiação a uma dada temperatura.
- Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
  - De acordo com a Lei de Wien, o comprimento de onda para o qual se dá o máximo de emissão é diretamente proporcional à temperatura absoluta.
  - De acordo com a Lei de Wien, o comprimento de onda para o qual se dá o máximo de emissão é diretamente proporcional à quarta potência da temperatura absoluta.
  - De acordo com a Lei de Stefan-Boltzmann, a intensidade total da radiação emitida é diretamente proporcional à quarta potência da temperatura absoluta.
  - De acordo com a Lei de Stefan-Boltzmann, a intensidade total da radiação emitida é inversamente proporcional à temperatura absoluta.

- Qual das opções completa a seguinte frase?  
«Uma barra de alumínio é aquecida. À medida que a sua temperatura aumenta, o comprimento de onda da radiação emitida de máxima intensidade ... e a potência da radiação emitida pela sua superfície ...»

- diminui ... aumenta
- diminui ... diminui
- aumenta ... diminui
- aumenta ... aumenta

- A figura mostra o espectro de quatro corpos negros às temperaturas de 3000 K, 4000 K, 5000 K e 6000 K.



- Associe as temperaturas a cada curva.
  - Indique, justificando, que corpo tem maior intensidade total de radiação emitida.
  - Relacione numericamente a potência total emitida por unidade de área do corpo a 6000 K e do corpo a 3000 K.
  - Faça uma estimativa da cor dos corpos.
  - Um corpo negro **E** tem uma temperatura absoluta que é o dobro da de **A**. Faça uma estimativa do comprimento de onda onde será máxima a sua emissão.
- Um corpo negro, à temperatura de 300 K, emite  $1,00 \times 10^5 \text{ J}$  durante 100 s. Determine:
    - a intensidade total da radiação emitida e a área do corpo.
    - o comprimento de onda para o qual é máxima a emissão de radiação.
  - Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira: «Um corpo à temperatura de 0 °C não emite radiação».



8. O Sol, cuja superfície está a 5778 K, tem o máximo da emissão térmica na zona do verde.
- Qual é a frequência da radiação em que é máxima a emissão?
  - Por que razão o Sol tem cor amarelada?
  - Qual seria a cor do Sol se fosse uma estrela mais fria? E se fosse mais quente?
9. Os microprocessadores utilizados nos computadores radiam a uma taxa aproximada de 30 watts por centímetro quadrado. A que temperatura está um corpo negro com o mesmo poder radiativo?
10. Duas estrelas, **A** e **B**, têm uma emissão máxima para comprimentos de onda respetivamente iguais a 400 nm e 700 nm. Relacione:
- as suas temperaturas à superfície.
  - as potências totais emitidas por unidade de área.
11. Um objeto ficou ao sol numa estrada, tendo atingido o equilíbrio térmico com a sua temperatura superficial a 30 °C. O asfalto da estrada atingiu-o a 50 °C. Supondo que a emissividade do asfalto é dupla da emissividade do objeto, quantas vezes a energia emitida pelo asfalto, por unidade de área e unidade de tempo, é superior à do objeto?
12. Numa viagem no espaço intergaláctico, um acidente destrói o veículo espacial, expondo os astronautas a temperaturas próximas do zero absoluto. Suponha a área superficial de um astronauta cerca de 2,00 m<sup>2</sup>, a temperatura da sua pele 34,0 °C e a sua emissividade 0,50.
- Indique, justificando, se se pode desprezar a transferência de energia das vizinhanças para o astronauta.
  - Que energia perde o astronauta em cada segundo?
  - Como varia a temperatura do astronauta?
  - A transferência de energia do astronauta para a sua vizinhança faz-se sempre com a mesma rapidez? Justifique.
13. Os animais de menor dimensão têm, na proporção com o seu volume (ou a sua massa), uma área superficial relativamente maior do que os animais de maior porte e, por isso, têm necessidade de comer muitas vezes. Encontre uma razão para este facto.
14. Sendo a temperatura média da superfície da Terra praticamente constante (as suas variações devem-se ao efeito de estufa), que relação há entre a intensidade da radiação absorvida pelo planeta e a emitida para o espaço?

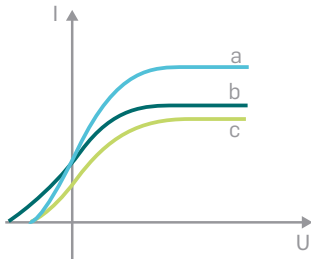
### 3.1.2 A quantização da energia segundo Planck

15. Assinale a opção que completa a seguinte frase:
- «De acordo com a teoria formulada em 1900 pelo físico alemão Max Planck, os corpos emitem ou absorvem radiação de forma ..., emitindo ou absorvendo *quanta*, cuja energia é diretamente proporcional à ... da radiação.»
- contínua ... amplitude
  - contínua ... frequência
  - descontínua ... amplitude
  - descontínua ... frequência
16. A hipótese de Planck:
- explica a radiação emitida por um corpo negro, admitindo que a energia dos osciladores eletromagnéticos é qualquer.
  - afirma que a energia de um oscilador eletromagnético é múltipla de  $hf$ .
  - afirma que a energia de um oscilador eletromagnético só pode ser  $hf$ .
  - descreve corretamente a curva de radiância espectral na região dos grandes comprimentos de onda, o que não era feito pela teoria clássica.

### 3.1.3 Efeito fotoelétrico e teoria dos fótons de Einstein

17. O efeito fotoelétrico, descoberto por Hertz em 1887, não era explicado pela teoria ondulatória. O que é o efeito fotoelétrico? Qual foi a explicação dada por Einstein?
18. Sobre o efeito fotoelétrico, quais das afirmações são verdadeiras?
- (A) Maior intensidade da luz incidente pode produzir a emissão de maior número de fótons.
- (B) A energia cinética máxima dos elétrons ejetados depende do número de fótons da luz incidente.
- (C) A energia cinética máxima dos elétrons ejetados é, para uma certa frequência de luz incidente, independente da intensidade dessa luz mas dependente do tempo de exposição do metal à luz.
- (D) A energia cinética dos elétrons ejetados será tanto maior quanto maior for a frequência da radiação incidente e menor a função trabalho do metal.
- (E) Para o mesmo metal, se ocorrer efeito fotoelétrico com luz verde, também ocorrerá com luz UV.
- (F) Para metais diferentes e para a mesma luz incidente, a energia cinética máxima dos elétrons emitidos será tanto maior quanto menor for a função trabalho para o metal.
19. Qual das afirmações é correta?
- (A) Quanto mais ligados estiverem os elétrons num metal, maior terá de ser o comprimento de onda da luz incidente para produzir efeito fotoelétrico.
- (B) Uma luz verde arranca menos elétrons a um metal do que uma luz vermelha com o mesmo número de fótons.
- (C) Para luz incidente do mesmo comprimento de onda e da mesma intensidade com capacidade para ionizar dois metais, o número de elétrons emitidos será maior no metal que tiver menor função trabalho.
- (D) Uma luz violeta pouco intensa pode arrancar elétrons a um metal, tendo cada um deles maior energia cinética do que os arrancados por luz azul muito intensa.
20. A energia necessária para dissociar os átomos de uma molécula de monóxido de carbono é 11,0 eV. Verifique que a frequência mínima da radiação incidente capaz de quebrar a ligação química corresponde a luz ultravioleta (a zona da luz visível situa-se entre 400 nm e 700 nm).
21. A função trabalho do lítio é 2,13 eV.
- a) Verifique que o comprimento de onda máximo da radiação que arranca elétrons a este metal está na zona do visível (entre 400 nm e 700 nm).
- b) Qual é a energia cinética máxima dos elétrons emitidos, em eV, se a luz incidente tiver um comprimento de onda de 500 nm?
22. Um metal só emite elétrons se nele incidir luz com frequência mínima de  $4,80 \times 10^{14}$  Hz. Uma luz de  $6,50 \times 10^{14}$  Hz incide sobre o metal. A emissão de elétrons é detetada através de uma corrente elétrica.
- a) Determine a função trabalho do metal e a energia cinética máxima dos elétrons emitidos.
- b) Se aproximássemos mais a fonte de luz incidente do metal, produzir-se-ia uma corrente elétrica:
- (A) mais intensa, tendo os elétrons a mesma energia cinética máxima.
- (B) mais intensa, tendo os elétrons maior energia cinética máxima.
- (C) menos intensa, tendo os elétrons a mesma energia cinética máxima.
- (D) menos intensa, tendo os elétrons maior energia cinética máxima.
- c) Se usássemos luz incidente com maior frequência, mas mais distanciada do metal, produzir-se-ia uma corrente elétrica:
- (A) mais intensa, tendo os elétrons a mesma energia cinética máxima.
- (B) mais intensa, tendo os elétrons maior energia cinética máxima.
- (C) menos intensa, tendo os elétrons a mesma energia cinética máxima.
- (D) menos intensa, tendo os elétrons maior energia cinética máxima.

23. O gráfico representa curvas características para uma célula fotoelétrica: representa-se a intensidade da luz incidente em função da diferença de potencial elétrico aplicada nos terminais da célula. Associe as curvas a feixes de luz incidente:
- ultravioleta pouco intensa.
  - violeta pouco intensa.
  - violeta muito intensa.



24. Que fonte de luz emite mais fótons num segundo?
- Uma fonte de luz de comprimento de onda 633 nm emitida por um *laser* de hélio-néon, utilizado num laboratório escolar, com potência de saída de 0,50 mW.
  - Uma lâmpada de 100 W, com uma eficiência de apenas 10%, que emite luz com comprimento de onda médio de 500 nm.
25. Por que razão uma queimadura pode ser mais perigosa quando originada com luz ultravioleta do que com luz visível, mesmo sendo a da luz visível mais intensa?
26. A tabela seguinte indica a frequência da luz incidente num metal e a energia cinética máxima dos eletrões arrancados a um metal por efeito fotoelétrico.

$f / (10^{14} \text{ Hz})$	$E_c / (10^{-20} \text{ J})$
5,5	0,66
5,6	1,33
5,7	2,00
5,8	2,60
5,9	3,30
6,0	4,01

Determine a constante de Planck e a função trabalho para esse metal. Consultando a Tab. 1 (página 237), identifique o metal.

27. Ilumina-se um metal com feixes de luz de diferentes frequências,  $f_1$  e  $f_2$ . As velocidades máximas dos eletrões emitidos têm módulos respetivamente iguais a  $v_1$  e  $v_2$ , com  $v_1 = 2v_2$ . Sendo  $h$  a constante de Planck, mostre que se verifica a seguinte relação entre as frequências

$$f_1 - f_2 = \frac{3mv_2^2}{2h}$$

### 3.1.4 Dualidade onda-corpúsculo para a luz

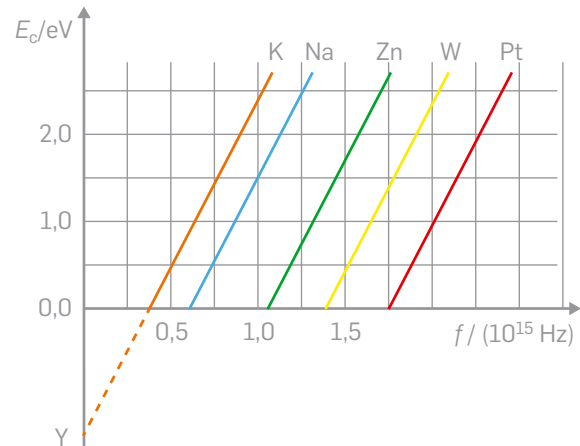
28. Indique a opção que completa a frase:  
Quando a luz atravessa uma fenda, cuja dimensão é da ordem do seu comprimento de onda, ocorre \_\_\_\_\_ que é resultado do comportamento \_\_\_\_\_ da luz. Mas quando a luz incide num metal e há emissão de eletrões por parte deste, ocorre \_\_\_\_\_, que resulta do comportamento \_\_\_\_\_ da luz.
- refração ... ondulatório ... efeito fotoelétrico ... corpuscular
  - refração ... corpuscular ... difração ... ondulatório
  - difração ... ondulatório ... efeito fotoelétrico ... corpuscular
  - difração ... corpuscular ... efeito fotoelétrico ... ondulatório

### Questões globais

29. Uma estrela de cor azul tem uma temperatura superficial:
- superior à do Sol, de acordo com a Lei de Stefan-Boltzmann, sendo maior a intensidade total da radiação emitida.
  - superior à do Sol, de acordo com a Lei do deslocamento de Wien, sendo maior a intensidade total da radiação emitida.
  - inferior à do Sol, de acordo com a Lei de Stefan-Boltzmann, sendo menor a intensidade total da radiação emitida.
  - inferior à do Sol, de acordo com a Lei do Deslocamento de Wien, sendo menor a intensidade total da radiação emitida.

- 30.** Uma cafeteira com água previamente aquecida foi abandonada sobre uma bancada até a água ficar à temperatura ambiente. Conclua, justificando, se a taxa temporal de transferência de energia como calor, através das paredes da cafeteira, aumentou, diminuiu ou se manteve constante, desde o instante em que se abandonou a cafeteira com água sobre a bancada até ao instante em que a água ficou à temperatura ambiente.
- 31.** Um esquiador, cuja temperatura superficial é  $35,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , está no seu quarto e, antes de vestir o equipamento, fica sem roupa durante  $1,0\text{ min}$ . A temperatura do quarto é  $25,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Que energia perde o esquiador por radiação, por unidade de área superficial, nesse minuto, supondo a sua emissividade igual a  $0,90$ ?
- 32.** O que se designou por «catástrofe do ultravioleta»? Qual foi o seu impacto na física no início do século XX?
- 33.** Pretende escolher-se um metal para uma fotocélula que irá operar com luz visível. Dos seguintes materiais, quais devem ser escolhidos?
- Tântalo:  $W = 4,2\text{ eV}$
  - Tungstênio:  $W = 4,5\text{ eV}$
  - Alumínio:  $W = 4,08\text{ eV}$
  - Bário:  $W = 2,5\text{ eV}$
  - Lítio:  $W = 2,3\text{ eV}$
- 34.** Em 2005 comemorou-se o Ano Internacional da Física em homenagem aos trabalhos de Albert Einstein, em particular o da explicação do efeito fotoelétrico em 1905.
- Segundo essa explicação, de que depende:
    - a energia de um fóton da radiação incidente?
    - o número de eletrões emitidos pelo metal?
  - Em que ideia fundamental se apoiou Einstein para explicar o efeito fotoelétrico?
  - Por que razão se pode atribuir uma frequência, que é uma característica de uma onda, a uma partícula como o fóton?

- 35.** O gráfico representa a energia cinética máxima dos eletrões emitidos por vários metais – potássio, sódio, zinco, tungstênio e platina – em função da frequência da luz incidente sobre cada um deles.



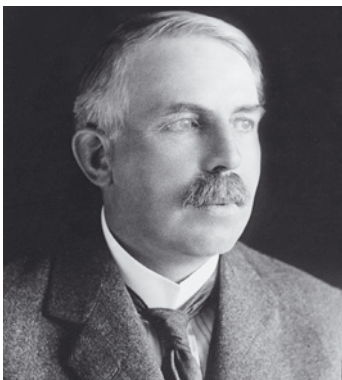
- Indique, justificando, o significado físico:
  - do módulo da ordenada Y do gráfico;
  - do declive das retas do gráfico.
- Para que metal é necessária menor energia para remover um eletrão?
- Verifique se ocorre efeito fotoelétrico quando luz visível, de  $500\text{ nm}$ , incide no zinco.
- Para a platina, determine:
  - o comprimento de onda máximo capaz de produzir efeito fotoelétrico.
  - a função trabalho.
  - a velocidade do eletrão emitido se o metal fosse iluminado com luz de frequência  $2,0 \times 10^{15}\text{ Hz}$  (a massa do eletrão é  $9,109 \times 10^{-31}\text{ kg}$ ).
  - a energia cinética máxima de  $1,0\text{ mol}$  de eletrões emitidos, na unidade SI, se o metal fosse iluminado com luz de frequência  $2,0 \times 10^{15}\text{ Hz}$ ; quantos fótons teriam colidido com o metal nestas circunstâncias?



# 3.2 NÚCLEOS ATÔMICOS E RADIOATIVIDADE

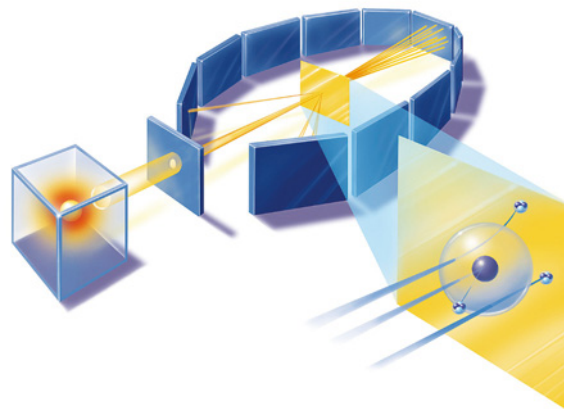
- 3.2.1 Energia de ligação nuclear e estabilidade dos núcleos
- 3.2.2 Processos de estabilização dos núcleos: decaimento radioativo. Propriedades das emissões radioativas  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$
- 3.2.3 Reações de fissão nuclear e de fusão nuclear

- 3.2.4 Lei do Decaimento Radioativo; atividade de uma amostra radioativa; período de semidesintegração
- 3.2.5 Radioatividade: efeitos biológicos, aplicações e detetores



**Fig. 1** Ernest Rutherford realizou uma experiência que revelou a existência do núcleo atômico.

**Fig. 2** Esquema da experiência de Rutherford. Mostra-se em ampliação o desvio das partículas alfa quando estas passam junto ao núcleo atômico ou colidem com ele.



**Partículas  $\alpha$ :** núcleos de átomos de hélio ( $\text{He}^{2+}$ ).

**Estabilidade nuclear:** existe quando as forças nucleares fortes, que são atrativas entre prótons e nêutrons, predominam sobre as forças de repulsão elétrica entre prótons. Se essa condição não se verificar, os núcleos serão instáveis.

**Radioatividade:** emissão espontânea de partículas ou de radiação por núcleos atômicos instáveis.

O físico Ernest Rutherford (**Fig. 1**), nascido na Nova Zelândia e naturalizado britânico, concluiu, em 1911, que o átomo era constituído por um pequeno núcleo central, de carga positiva, e por elétrons à sua volta, de carga negativa. Essa conclusão baseou-se numa experiência em que uma fina folha de ouro foi bombardeada por partículas muito energéticas conhecidas por «partículas alfa» (**Fig. 2**). Uma **partícula  $\alpha$**  é um núcleo de um átomo de hélio.

Segundo o modelo atômico aceite na altura – o modelo atômico de Thomson do «pudim de passas» –, o átomo seria uma esfera com carga positiva, estando os elétrons distribuídos uniformemente dentro dela. De acordo com este modelo, na experiência de Rutherford as partículas  $\alpha$  deveriam atravessar as folhas de ouro sem sofrerem grandes desvios. Isso ocorria, de facto, para a maioria das partículas. Contudo, algumas partículas eram muito desviadas, chegando mesmo a voltar para trás (**Fig. 2**). Tal resultado levou Rutherford a concluir que a carga positiva não estava distribuída em todo o volume do átomo, mas antes localizada no seu centro, que passou a ser designado por **núcleo atômico**, onde também estava concentrada quase toda a massa do átomo.

Mais tarde concluir-se-ia que o núcleo atômico era constituído por **prótons** e **nêutrons**. O próton tem carga simétrica da do elétron, mas a sua massa ( $1,6726 \times 10^{-27}$  kg) é 1836 vezes superior. O nêutron, partícula sem carga descoberta experimentalmente em 1932 (embora tivesse sido prevista antes), tem uma massa ( $1,6750 \times 10^{-27}$  kg) praticamente igual à do próton.

Os nêutrons não contribuem para a carga dos núcleos (por serem neutros), mas contribuem para a sua massa e para a **estabilidade nuclear**.

Os prótons e os nêutrons (chamados nucleões) exercem entre si uma atração muito forte, devido à força nuclear forte, que compensa a força de repulsão elétrica entre prótons que também existe. Quando os núcleos se tornam maiores, a força de repulsão entre prótons, que tem longo alcance, começa a dominar sobre a força nuclear forte, que tem curto alcance, ficando, assim, comprometida a estabilidade nuclear.

A **instabilidade dos núcleos** pode manifestar-se na emissão espontânea de partículas ou de radiação. Esses núcleos dizem-se radioativos e o fenómeno designa-se por **radioatividade**. Ele será objeto do nosso estudo, assim como algumas suas aplicações no dia a dia.

## 3.2.1 Energia de ligação nuclear e estabilidade dos núcleos

Um elemento químico é caracterizado pelo **número atômico**, que é o número de prótons no núcleo,  $Z$ . Sendo  $N$  o número de neutrões, o **número de massa**,  $A$ , é o número de nucleões:  $A = Z + N$ . Um átomo de um elemento, com símbolo químico  $X$ , representa-se por  ${}^A_ZX$ .

Todos os núcleos de um dado elemento químico têm o mesmo número de prótons,  $Z$ , mas podem ter diferente número de neutrões,  $N$ . Os núcleos do mesmo elemento com diferente número de neutrões designam-se por isótopos: é o caso do carbono-12 e do carbono-14, representados respetivamente por  ${}^{12}_6\text{C}$  e  ${}^{14}_6\text{C}$  (o primeiro é estável, mas o segundo não).

Antes de abordarmos a formação de um núcleo atômico, consideremos a formação do átomo mais simples, que é o de hidrogénio: um próton e um eletrão estão ligados devido à interação eletromagnética. Mas a massa do átomo (massa do próton e do eletrão ligados) é menor do que a soma das massas do próton e do eletrão quando separados (**Fig. 3**). Portanto, a formação do átomo, que é mais estável do que as partículas separadas, é acompanhada de um decréscimo de massa.

Essa diferença de massa está relacionada com uma diferença de energia, de acordo com a relação estabelecida por Einstein em 1905, e que é, sem dúvida, a equação mais conhecida da física. Sendo  $c$  a velocidade da luz, a fórmula de Einstein que relaciona energia,  $E$ , e massa,  $m$ , estabelecendo a equivalência entre massa e energia ou **equivalência massa-energia**, é:

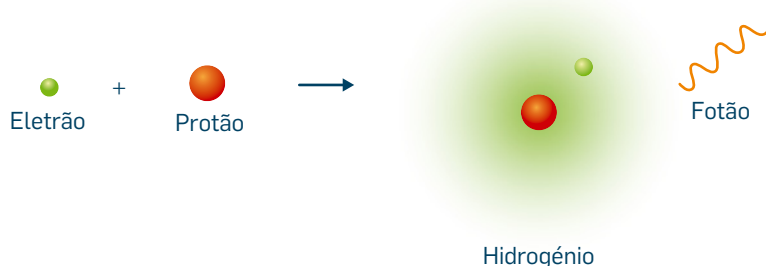
$$E = m c^2$$

Então, à diferença de massa  $\Delta m$  corresponde uma diferença de energia  $\Delta E$ :

$$\Delta E = \Delta m c^2$$

Esta expressão mostra que, mesmo que a diferença de massa seja muito pequena, a diferença de energia correspondente é ampliada pelo valor elevado da velocidade da luz,  $c$  ( $3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  no vazio).

Na formação de um átomo, essa diferença de energia chama-se **energia de ligação atômica**, que se exprime normalmente em eletrões-volt ( $1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$ ). No caso do hidrogénio,  ${}^1_1\text{H}$ , essa energia é 13,6 eV. Um átomo de hidrogénio tem menor energia do que um eletrão e um próton separados e tem também menor massa (**Fig. 4**).



**Fig. 3** Um átomo de hidrogénio tem massa menor do que a soma das massas de um próton e de um eletrão separados (a balança é imaginária!).

**Equivalência massa-energia de Einstein:** permite concluir que a uma diferença de massa, na formação de átomos ou de núcleos atômicos, corresponde uma diferença de energia.

**Fig. 4** Na formação do átomo de hidrogénio a partir de um eletrão e de um próton, a massa (ou energia) diminui, sendo emitida radiação.



Também na formação de um núcleo atômico há diminuição de massa. Quando os constituintes de um núcleo (com  $Z$  prótons e  $N$  nêutrons) estão separados uns dos outros a sua massa total é  $Z m_p + N m_n$ . Mas, quando estão ligados no núcleo, a massa do núcleo,  $M$ , é menor. A diferença de massa é:

$$\Delta m = Z m_p + N m_n - M$$

**Núcleo atômico:** é sempre mais estável do que os seus nucleões separados.

**Energia de ligação nuclear:** diferença de energia entre os nucleões separados e os nucleões ligados no núcleo.

É a energia necessária para separar os constituintes do núcleo.

É cerca de um milhão de vezes superior à energia de ligação atômica.

Portanto, quando prótons e nêutrons se juntam para formar um núcleo, há uma diminuição de massa a que corresponde uma diminuição de energia. Isso significa que o **núcleo atômico** é sempre mais estável, pois tem menor energia do que os seus nucleões separados.

Essa diferença de energia, designada por **energia de ligação nuclear** e simbolizada por  $B$  (do inglês *binding*, que significa ligação), relaciona-se com a diferença de massa pela fórmula de Einstein:

$$B = [Z m_p + N m_n - M] c^2$$

Vista de outra forma, a energia de ligação nuclear é a energia necessária para o núcleo atômico se desagregar nos seus nucleões. Portanto, é igual à energia libertada quando prótons e nêutrons se agregam formando um núcleo.

A energia de ligação nuclear é cerca de um milhão de vezes superior à energia de ligação atômica: é da ordem do megaeletrão-volt (símbolo MeV). Por exemplo, o núcleo do deutério, que é o isótopo de hidrogénio  ${}^2_1\text{H}$ , tem a energia de ligação nuclear mais baixa: 2,2 MeV. Mas, para o bismuto-209 ( ${}^{209}_{83}\text{Bi}$ ), o isótopo estável com número de massa maior, a energia de ligação nuclear é naturalmente ainda mais elevada: 1640 MeV.

### Como calcular uma energia de ligação nuclear?

A massa das partículas constituintes do átomo e a do próprio átomo é dada, muitas vezes, na **unidade de massa atômica unificada**, cujo símbolo é u.

Por definição, uma unidade de massa atômica unificada é  $\frac{1}{12}$  da massa do átomo de carbono-12, no estado fundamental. É por isso que a massa do átomo de carbono-12 é exatamente 12 u, ou seja, um número inteiro!

Na **Tab. 1** indicam-se as massas do próton, nêutron e eletrão em unidades de massa atômica unificada, assim como o valor desta na unidade SI.

Massa do próton	1,007 28 u
Massa do nêutron	1,008 67 u
Massa do eletrão	0,000 55 u
$1 \text{ u} = 1,660 54 \times 10^{-27} \text{ kg}$	

**Tab. 1** Massas de partículas em unidades de massa atômica unificada e valor desta na unidade SI.

**Unidade de massa atômica unificada:**

é  $\frac{1}{12}$  da massa do átomo de carbono-12.



Calculemos, por exemplo, a energia de ligação nuclear para um átomo de carbono-12.

Tendo em conta os valores da **Tab. 1**, a soma das massas de todos os constituintes de um átomo de carbono-12, quando separados, é:

$$6m_p + 6m_n + 6m_e = 12,099\ 00\ \text{u}$$

Como a massa deste átomo é 12 u, a diferença de massa é:

$$\Delta m = 0,099\ 00\ \text{u} = 0,099\ 00 \times 1,660\ 54 \times 10^{-27}\ \text{kg} = 1,643\ 93 \times 10^{-28}\ \text{kg}$$

A correspondente diferença de energia é:

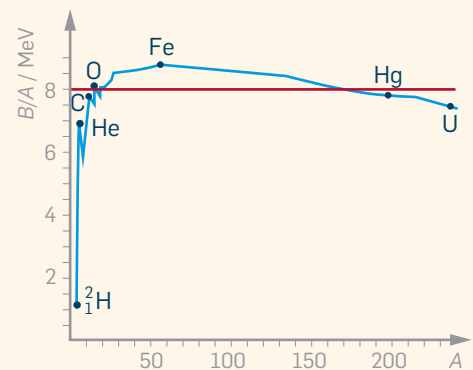
$$\Delta E = 1,643\ 93 \times 10^{-28} \times (3,00 \times 10^8)^2 = 1,480 \times 10^{-11}\ \text{J} = \frac{1,480 \times 10^{-11}}{1,60 \times 10^{-19}}\ \text{eV} = 92,5\ \text{MeV}$$

A energia calculada é a soma da energia de ligação nuclear e da energia de ligação atômica. Mas aquela energia é aproximadamente a energia de ligação nuclear, pois a energia de ligação atômica é da ordem do milhão de vezes inferior à energia de ligação nuclear.

A energia de ligação nuclear aumenta com o número de massa. Por isso, é habitual estudar-se a energia de ligação por nucleão, ou seja, o quociente da energia de ligação,  $B$ , pelo número de massa,  $A$ :  $\frac{B}{A}$ . Na **Fig. 5** apresenta-se a energia de ligação por nucleão,  $\frac{B}{A}$ , em função do número de massa,  $A$ . Eis a sua interpretação:

### Energia de ligação por nucleão

- é máxima para o níquel-62, ferro-58 e ferro-56 (8,8 MeV / nucleão), pelo que esses núcleos são mais estáveis;
- é mínima para o deutério (hidrogénio-2), pelo que é relativamente fácil separar os seus nucleões;
- tem um valor médio de 8 MeV / nucleão (linha vermelha na **Fig. 5**);
- é quase constante para  $A > 30$ ;
- decresce suavemente para  $A > 56$  (núcleos pesados);
- cresce rapidamente até  $A = 20$  (núcleos leves), embora se observe um comportamento irregular; a partir daí, cresce suavemente até  $A = 56$ .



**Fig. 5** Energia de ligação por nucleão em função do número de massa.

Os valores da energia de ligação por nucleão justificam a libertação de energia em reações em que há formação de núcleos mais estáveis.

As reações em que há transformações de núcleos, e que envolvem elevadas energias, chamam-se **reações nucleares** (recorde-se que as reações químicas são apenas transformações de substâncias, envolvendo só eletrões de valência).

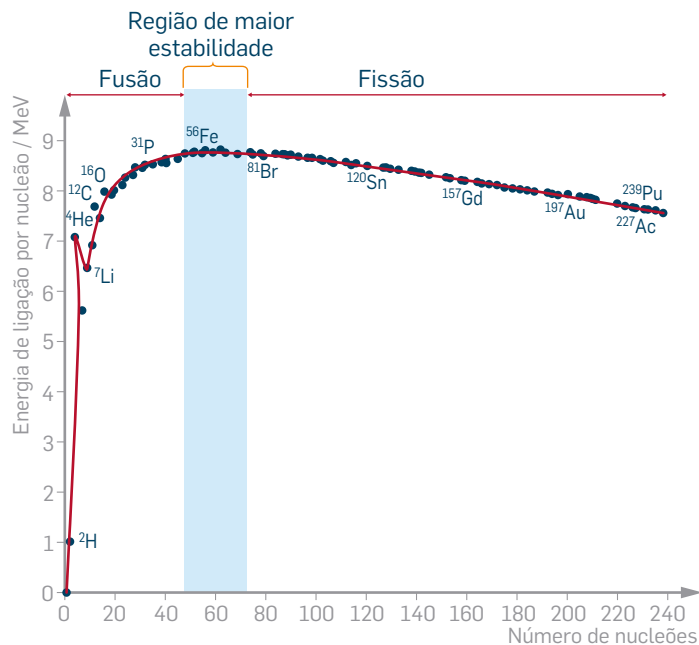
**Reações nucleares:** transformações de núcleos envolvendo elevada energia.

**Fusão nuclear:** núcleos com baixa energia de ligação por nucleão (núcleos leves) originam um núcleo com maior energia de ligação por nucleão e, portanto, mais estável.

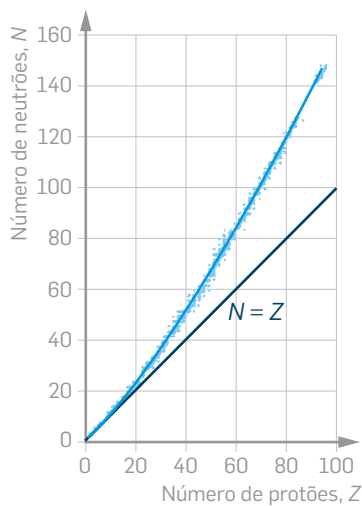
**Fissão (ou cisão) nuclear:** um núcleo pesado pode cindir-se e originar núcleos de massas semelhantes com maiores energias de ligação por nucleão e, portanto, mais estáveis.

Como mostra a **Fig. 5** (página 249), os núcleos mais leves têm baixas energias de ligação por nucleão. Para esses núcleos é favorável um processo que, a partir deles, leve à formação de um núcleo mais pesado e, de acordo com a **Fig. 6**, mais estável, ou seja, com maior energia de ligação por nucleão. A este tipo de reação nuclear dá-se o nome de **fusão nuclear**. Como se formam núcleos mais estáveis, liberta-se energia. É uma reação deste tipo que ocorre quando dois núcleos de deutério formam um núcleo de hélio (**Fig. 6**).

Por outro lado, também os núcleos pesados (como o urânio-235) podem cindir-se originando núcleos mais estáveis, ou seja, mais leves (de massas semelhantes) e com maior energia de ligação por nucleão. Uma reação nuclear deste tipo é designada por **fissão** ou **cisão nuclear** (**Fig. 6**). Neste caso também há liberação de energia.



**Fig. 6** A fusão nuclear ocorre com núcleos leves, enquanto a fissão nuclear ocorre com núcleos pesados, de modo a obterem-se núcleos mais estáveis, ou seja, com maior energia de ligação por nucleão.



**Fig. 7** Número de nêutrons em função do número de prótons e curva de estabilidade (em cima).

A estabilidade do núcleo atômico resulta do balanço das repulsões entre prótons, devido à força elétrica, e das atrações entre prótons e nêutrons, devido à força nuclear forte.

A **Fig. 7** mostra o número de nêutrons em função do número de prótons para núcleos estáveis e a curva correspondente aos núcleos estáveis.

Para os núcleos mais leves, a estabilidade verifica-se quando há, aproximadamente, um número igual de prótons e de nêutrons:  $N = Z$ .

Mas, para os núcleos maiores, a estabilidade exige maior número de nêutrons,  $N > Z$ . O maior número de nêutrons contribui para aumentar as forças de atração (através da força nuclear forte) já que a repulsão elétrica também aumenta por haver maior número de prótons.

Os núcleos que estejam acima ou abaixo da curva de estabilidade da **Fig. 7** são instáveis, tendendo a desintegrar-se, libertando energia.

## 3.2.2 Processos de estabilização dos núcleos: decaimento radioativo. Propriedades das emissões radioativas $\alpha$ , $\beta$ e $\gamma$

Certos núcleos instáveis tendem a estabilizar emitindo espontaneamente parte da sua energia na forma de partículas carregadas ou de radiação, originando outros núcleos. Tais **núcleos** instáveis dizem-se **radioativos**.

As emissões radioativas foram detetadas pela primeira vez, em 1896, pelo físico francês Henri Becquerel (**Fig. 8**, em cima).

No ano anterior, o alemão Wilhelm Roentgen tinha detetado os raios X a partir da fluorescência produzida em determinados materiais (a fluorescência é um processo de absorção de luz com uma certa frequência e sua reemissão com outra frequência). Becquerel, ao investigar um processo inverso – emissão de raios X a partir da fluorescência de sais de urânio –, notou que estes sais emitiam uma radiação penetrante, mesmo sem influência externa. Depois de investigar o fenómeno, concluiu que outros compostos de urânio e o próprio urânio emitiam o mesmo tipo de radiação.

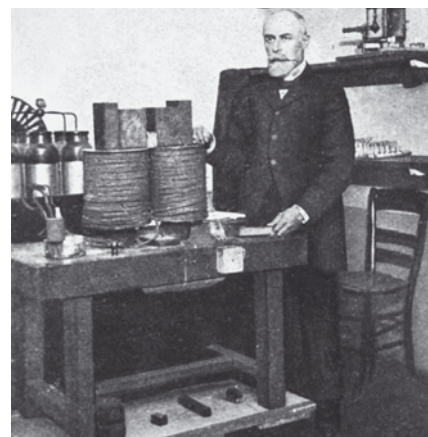
Também o casal de franceses Pierre e Marie Curie, sendo Marie mais conhecida por Madame Curie (**Fig. 8**, em baixo), se dedicou à descoberta de materiais com esse comportamento, concluindo que o tório se comportava como o urânio. Marie Curie chamou «radioatividade» ao fenómeno de emissão espontânea de radiação pelo urânio e pelo tório. A investigação dos Curie levou à descoberta de novos elementos: o rádio (nome dado por ser muito mais radioativo do que o urânio) e o polónio (nome que homenageia a terra natal de Madame Curie, a Polónia).

Na natureza existem **núcleos radioativos**, sendo, por isso, **naturais**. Podem também produzir-se núcleos radioativos em laboratório através de colisões nucleares, que, por isso, são **artificiais**.

Foi o casal Frédéric Joliot e Irène Joliot-Curie (filha do casal Curie) quem, em 1934, anunciou a produção dos primeiros núcleos radioativos artificiais (**Fig. 9**).

A produção de núcleos radioativos artificiais tem permitido obter elementos químicos desconhecidos na Natureza: estes têm vida extremamente curta, por serem fortemente radioativos, e convertem-se rapidamente em elementos naturais. Produzem-se isótopos radioativos artificiais, chamados **radioisótopos**, com várias utilizações, em particular em medicina, tanto no diagnóstico como na terapêutica.

Designa-se por **decaimento radioativo**, ou emissão radioativa, a emissão de partículas com carga ou de radiação eletromagnética de alta energia (fotões) por núcleos instáveis. O núcleo resultante tem energia mais baixa do que o inicial, podendo ser estável ou ainda radioativo.



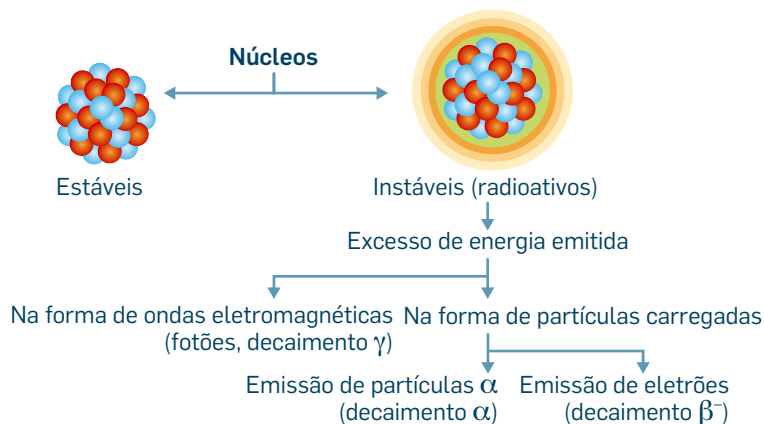
**Fig. 8** Henri Becquerel e o casal Pierre e Marie Curie partilharam o Prémio Nobel da Física, em 1903, pela descoberta da radioatividade.



**Fig. 9** O casal Frédéric Joliot e Irène Joliot-Curie, que partilhou o Prémio Nobel da Física, em 1935, pelos seus trabalhos sobre radioatividade artificial.

**Decaimento radioativo:** emissão de partículas com carga ou de fotões de alta energia, por núcleos instáveis, originando-se outros núcleos estáveis ou ainda radioativos mas de mais baixa energia.

Na Natureza, todos os elementos com  $Z > 83$  são radioativos. Mas também em numerosos elementos com números atômicos menores se observam decaimentos radioativos, como, por exemplo, no trítio (hidrogênio-3), no carbono-14, no potássio-40, etc. Na **Fig. 10** apresentam-se os tipos de decaimento radioativos identificados nos estudos iniciais sobre radioatividade, para os quais Rutherford contribuiu: emissão de partículas  $\alpha$  (decaimento  $\alpha$ ), emissão de elétrons (decaimento  $\beta^-$ ) e emissão de fótons de energia elevada (decaimento  $\gamma$ ).



**Fig. 10** Os núcleos instáveis (radioativos) libertam energia emitindo espontaneamente partículas. Um exemplo são emissões  $\alpha$ ,  $\beta^-$  e  $\gamma$ .

Vejam na **Fig. 11** o que são e o que distingue as partículas emitidas.

### Emissões $\alpha$ , $\beta^-$ e $\gamma$

Papel Aço Chumbo

$\alpha$   
 $\beta^-$   
 $\gamma$

Fontes radioativas alfa, beta e gama

$\vec{B}$

Alvo

$\alpha$   
 $\gamma$   
 $\beta^-$

**Partículas  $\alpha$ :** são núcleos de hélio.

- Têm pequeno poder de penetração: são facilmente detidas por uma folha de papel ou de metal; penetram apenas na superfície da pele e cerca de 5 cm no ar.
- Têm grande poder ionizante; no caso de contaminação interna (ingestão, inalação, entrada na circulação sanguínea) é a emissão radioativa mais danosa para as células.
- São ligeiramente defletidas por um campo magnético por terem carga elétrica.

**Partículas  $\beta^-$ :** são elétrons.

- Têm maior poder de penetração do que as partículas  $\alpha$  (penetram 1 cm ou 2 cm nos tecidos humanos e alguns metros no ar).
- Têm poder ionizante menor do que o das partículas  $\alpha$ .
- São fortemente defletidas por um campo magnético por terem carga elétrica e menor massa do que as partículas  $\alpha$ .

**Radiação  $\gamma$ :** radiação eletromagnética de muito alta frequência.

- Tem elevado poder de penetração: só é absorvida por espessas placas de chumbo.
- Tem poder ionizante inferior ao das partículas  $\alpha$  e  $\beta^-$ .
- Não é defletida por campos magnéticos porque é eletricamente neutra.

**Fig. 11** Comparação entre características das emissões  $\alpha$ ,  $\beta^-$  e  $\gamma$  quanto ao poder de penetração em materiais e capacidade de os ionizar, e comportamento em campos magnéticos.



A **Tab. 2** indica outras propriedades das emissões  $\alpha$ ,  $\beta^-$  e  $\gamma$ . A diferença de massa e de carga das partículas  $\alpha$  e  $\beta^-$  permite explicar a diferença na deflexão a que são sujeitas quando são lançadas, com a mesma velocidade, perpendicularmente ao mesmo campo magnético, uma vez que o raio da sua trajetória circular é  $R = \frac{mv}{|q|B}$ .

	Decaimento $\alpha$	Decaimento $\beta^-$	Decaimento $\gamma$
Natureza	Núcleos de hélio (2 prótons e 2 nêutrons)	Elétrons	Fótons
Massa	$2 m_p + 2 m_n = 4 u$	$m_e \approx \left(\frac{1}{1836}\right) u$	—
Carga	$+2e$	$-e$	—
Velocidade	$\approx 2 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$	$\approx 2 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	$\approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Capacidade de penetração relativa	1	$\approx 100$	$\approx 1000$

**Tab. 2** Propriedades das emissões  $\alpha$ ,  $\beta^-$  e  $\gamma$ .

Um **decaimento radioativo** pode ser descrito por uma equação (como uma equação química) em que há **conservação da carga elétrica** e do **número de massa**. Na escrita destas equações utiliza-se a notação  ${}^A_Z X$  para simbolizar um núcleo: A indica o número de nucleões e Z a sua carga elétrica. Para representar as partículas subatômicas usa-se uma notação semelhante, em que se identifica o símbolo, a massa e a carga da partícula, tal como se indica na **Tab. 3**: o índice superior esquerdo é o número de massa e o índice inferior esquerdo indica a carga elétrica da partícula.

**Decaimento radioativo:** pode ser descrito por uma equação onde se verifica a conservação da carga elétrica e a conservação do número de massa.

Partículas	Símbolo	Notação
Próton	p	${}^1_1\text{p}$ ou ${}^1_1\text{H}$
Nêutron	n	${}^1_0\text{n}$
Elétron	$e^-$ ou $\beta^-$	${}^0_{-1}e^-$ ou ${}^0_{-1}\beta^-$
Positrão	$e^+$ ou $\beta^+$	${}^0_1e^+$ ou ${}^0_1\beta^+$
Neutrino	$\nu$	${}^0_0\nu$
Antineutrino	$\bar{\nu}$	${}^0_0\bar{\nu}$

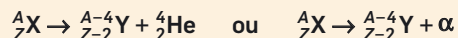
**Tab. 3** Partículas subatômicas, símbolos e respetiva notação.

A **Tab. 3** indica as partículas que surgem nos decaimentos radioativos  $\alpha$ ,  $\beta^-$  e  $\gamma$ . Os **positrões**,  $e^+$ , são partículas em tudo semelhantes aos elétrons, mas com carga elétrica positiva. Previstos teoricamente nos anos vinte do século XX, só mais tarde foram detetados experimentalmente.

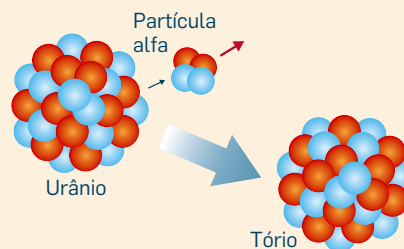
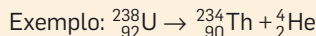
O **neutrino**,  $\nu$ , e o **antineutrino**,  $\bar{\nu}$ , não têm carga elétrica e a sua massa é extremamente pequena. O neutrino foi previsto cerca de 25 anos antes de ser detetado experimentalmente, em 1955, pois só a emissão de uma partícula como o neutrino poderia garantir a conservação de momento linear e de energia nos processos radioativos  $\beta$ .

Nas primeiras descobertas sobre radioatividade detetaram-se as emissões  $\alpha$ ,  $\beta^-$  e  $\gamma$ . Mais tarde detetou-se uma emissão semelhante à  $\beta^-$ , designada por  $\beta^+$ . Na Fig. 12 apresentam-se esses decaimentos radioativos e respetivas equações.

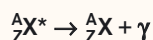
### Decaimento $\alpha$



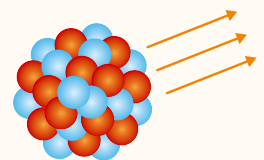
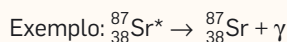
Um núcleo origina outro com número de massa diminuído de quatro unidades e número atómico diminuído de duas unidades, emitindo um núcleo de hélio. É um decaimento vulgar em núcleos pesados.



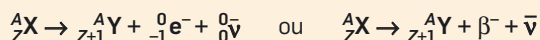
### Decaimento $\gamma$



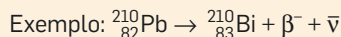
Um núcleo passa de um estado de energia mais alta,  $X^*$ , para um estado de energia mais baixa,  $X$ , sem alteração do número de massa e do número atómico (processo semelhante ao que ocorre quando um átomo passa de um estado excitado para o estado fundamental emitindo um fóton, mas, neste caso, o fóton tem uma energia um milhão de vezes superior). Este decaimento é acompanhado normalmente de outros decaimentos.



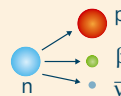
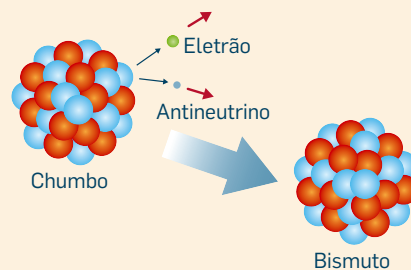
### Decaimento $\beta^-$



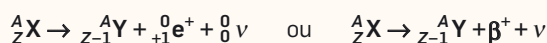
Um núcleo origina outro com igual número de massa e número atómico aumentado de uma unidade, emitindo um eletrão e um antineutrino.



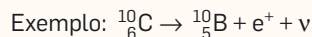
Ocorre quando o núcleo inicial tem excesso de neutrões; um neutrão transforma-se num próton emitindo um eletrão e um antineutrino:



### Decaimento $\beta^+$



Um núcleo origina outro com igual número de massa e número atómico diminuído de uma unidade, emitindo um positrão e um neutrino.



Ocorre quando o núcleo inicial tem excesso de prótões; um próton transforma-se num neutrão emitindo um positrão e um neutrino:

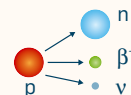
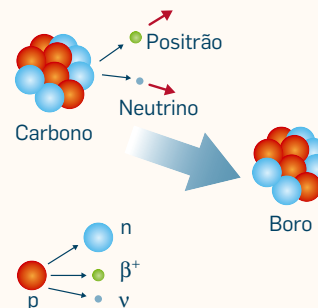


Fig. 12 Decaimentos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  e respetivas equações.

Enquanto a força nuclear forte é responsável pela estabilidade do núcleo, a força nuclear fraca é responsável pelos decaimentos  $\beta$ .

Atualmente conhecem-se outros tipos de emissões radioativas: captura eletrônica, emissão de neutrões, de prótons, de deuteron, etc.

O núcleo instável inicial é, muitas vezes, designado por «núcleo-mãe», e o núcleo resultante da transformação, que pode ser estável ou ainda radioativo, designa-se por «núcleo-filho».

Em todos os **decaimentos radioativos** liberta-se energia, pois o núcleo-mãe é instável: transforma-se num núcleo-filho mais estável, ou seja, de menor energia. Essa energia libertada obtém-se, pela famosa fórmula de Einstein, a partir da diferença de massa entre o núcleo-mãe e o núcleo-filho.

**Decaimentos radioativos:** há sempre libertação de energia, pois os núcleos-filho são sempre mais estáveis do que os núcleos-mãe.

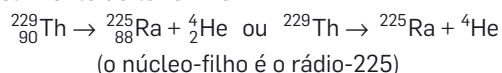
### Questão resolvida 1

Recorrendo à Tabela Periódica, escreva as equações das seguintes reações nucleares, identificando os núcleos-filho:

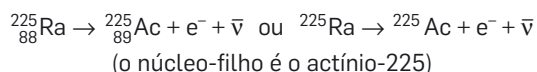
- emissão  $\alpha$  pelo tório-229.
- emissão  $\beta^-$  pelo rádio-225.
- emissão  $\beta^+$  pelo germânio-68.
- emissão  $\gamma$  pelo tálio-203.



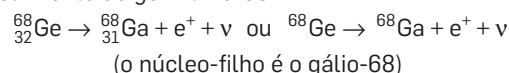
a) Decaimento do tório-229:



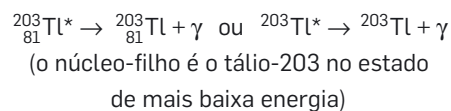
b) Decaimento do rádio-225:



c) Decaimento do germânio-68:



d) Decaimento do tálio-203:



### Atividade 1

Após pesquisar, faça um relato histórico sobre aspetos da radioatividade, destacando:

- as investigações que estiveram na base da descoberta da radioatividade natural e artificial, os cientistas envolvidos e as condições do seu trabalho;
- o grande impacto social dessas descobertas, traduzido na oferta dos mais diversos produtos e terapias milagrosos com «radioatividade adicionada».



### 3.2.3 Reações de fissão nuclear e de fusão nuclear



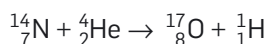
**Fig. 13** O físico italiano Enrico Fermi desenvolveu o primeiro reator nuclear.



**Fig. 14** O químico alemão Otto Hahn e a física austríaca Lise Meitner investigaram a cisão nuclear, em Berlim.

**Fig. 15** Bombardeamento de um núcleo de urânio-235 por um neutrão.

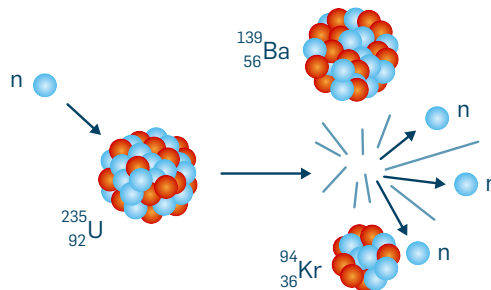
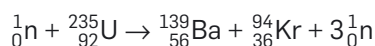
Na experiência de Rutherford, as partículas  $\alpha$  não tinham energia suficiente para atingir os núcleos atômicos da folha de ouro: eram desviadas devido à repulsão entre a sua carga positiva e a carga positiva dos núcleos. Mas em experiências posteriores, fornecendo mais energia às partículas  $\alpha$ , Rutherford conseguiu que estes entrassem no núcleo-alvo. Realizou, assim, a primeira reação nuclear, processo em que são removidos ou adicionados prótons ou neutrões a um núcleo. Em 1919, através do bombardeamento com partículas  $\alpha$ , Rutherford conseguiu transformar nitrogénio em oxigénio:



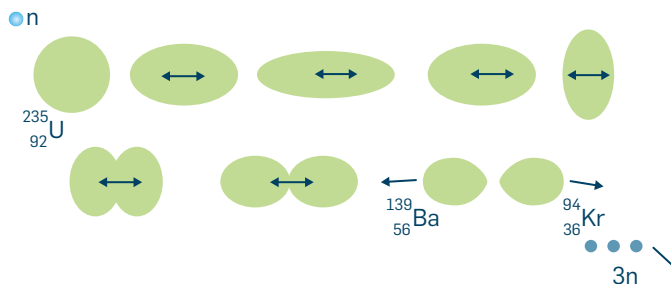
A descoberta de Rutherford levou à investigação das reações nucleares com a finalidade de obter energia. Nascia, assim, a era da **física nuclear**.

Uma reação nuclear logo estudada, e que esteve na origem da bomba atômica, foi a **fissão ou cisão nuclear**: um núcleo pesado cinde-se em dois núcleos mais estáveis, com massas semelhantes, libertando elevada energia.

Foi o italiano Enrico Fermi (**Fig. 13**) quem, em 1934, começou por bombardear urânio com neutrões, tentando obter outro núcleo. Quatro anos depois, os alemães Otto Hahn e Fritz Strassman cindiram o urânio-235 bombardeando-o com neutrões e obtiveram o bário, de número atômico muito menor do que o urânio. A explicação do processo foi dada pelos austríacos Lise Meitner (**Fig. 14**) e Otto Frisch. Uma das reações que ocorre na cisão nuclear do urânio é a da **Fig. 15**.



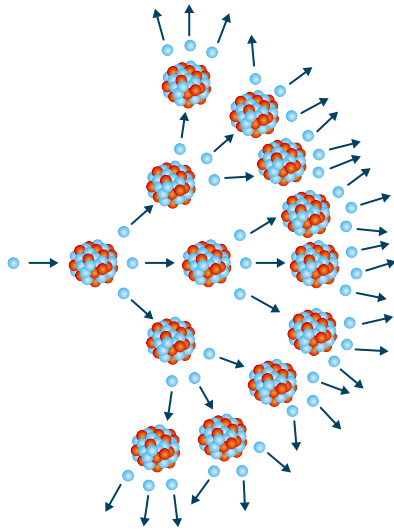
Neste processo, o núcleo de urânio-235 absorve um neutrão, começa a vibrar e forma um «pescoço», o qual acaba por se partir em dois fragmentos (**Fig. 16**).



**Fig. 16** Cisão do núcleo de urânio ao absorver um neutrão.



Os neutrões emitidos podem cindir outros núcleos de urânio, ocorrendo uma **reação em cadeia** (Fig. 17).



Em média, são produzidos 2,5 neutrões em cada reação de cisão, o que torna muito rápida a reação em cadeia. Por cada núcleo que cinde, liberta-se elevada energia. A velocidade da reação em cadeia pode ser controlada com materiais, como o cádmio ou o boro, que absorvem neutrões sem se cindirem. A falta de controlo desta velocidade faz com que a energia se liberte muito rapidamente, com um potencial destruidor, como na bomba atômica (Fig. 18).

É uma reação de **cisão nuclear** que ocorre nas **centrais nucleares** (Fig. 19): a energia libertada na cisão de urânio ou plutônio é usada para mover as turbinas de modo a produzir-se energia elétrica.

Outra reação nuclear com elevada libertação de energia é a **fusão nuclear**: dois núcleos leves instáveis originam um núcleo mais pesado e mais estável.

A fusão nuclear ocorreu por todo o lado nos primeiros minutos do Universo e ainda hoje ocorre nas estrelas. No Sol, fabrica-se hélio a partir da fusão nuclear, como mostra a Fig. 20. A energia libertada garante a nossa vida na Terra.

**Fig. 17** Reação em cadeia na cisão nuclear do urânio.

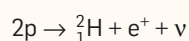


**Fig. 18** As reações de cisão nuclear foram usadas nas bombas atômicas de Hiroshima e Nagasaki.

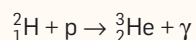


**Fig. 19** Central nuclear: obtém-se energia a partir de reações de cisão nuclear do urânio ou do plutônio.

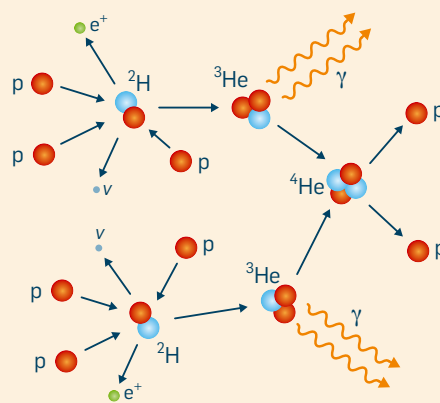
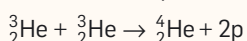
Dois prótons originam um deutério:



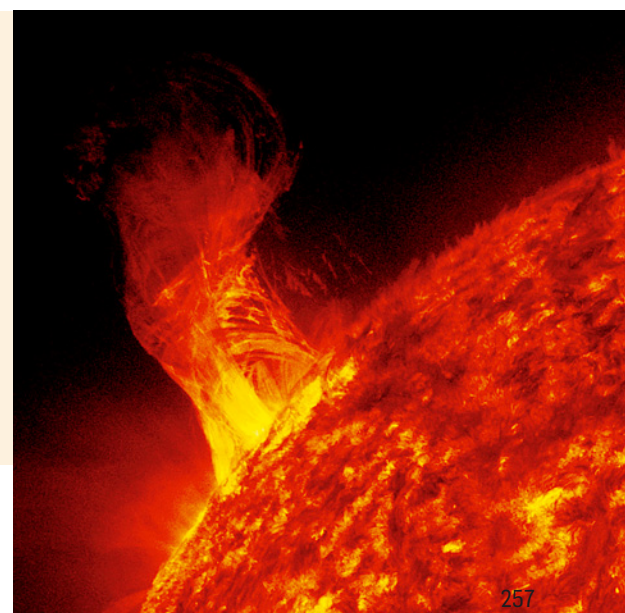
A colisão do deutério com um próton produz hélio-3:



A colisão de dois núcleos de hélio-3 produz o hélio-4, sendo libertados dois prótons:



**Fig. 20** Reações de fusão nuclear no Sol, com formação de hélio.



As reações de fusão nuclear produzidas na Terra usam os isótopos hidrogênio-2 (deutério) e hidrogênio-3 (trítio).

No futuro a longo prazo, as centrais nucleares usarão provavelmente reatores de fusão nuclear, que têm vantagens relativamente aos atuais reatores de fissão nuclear:

- a matéria-prima é abundante na Terra: o deutério pode ser extraído da água e o trítio pode ser obtido a partir do lítio, que existe com abundância na crosta terrestre;
- não há produção de resíduos radioativos de longa duração, o que, em caso de acidente, não traz consequências, que podem ser devastadoras para os seres vivos, como as dos reatores de fissão nuclear.

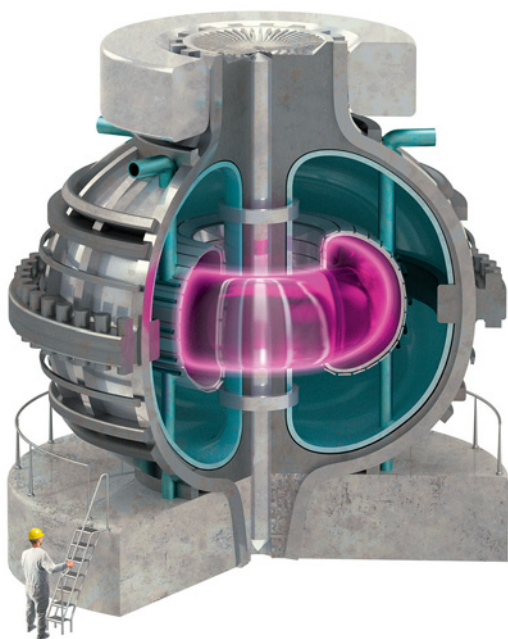
Está em construção perto de Marselha, França, o *International Thermonuclear Experimental Reactor*, ITER (palavra que em latim significa «caminho»), um grande reator de fusão nuclear internacional, que servirá para investigação. As reações de fusão que aí se produzirão serão diferentes das que ocorrem no Sol (estas são lentas e, portanto, desaconselhadas para produzir energia). Para se obter energia de forma controlada, são mais indicadas as seguintes reações nucleares:



Uma reação nuclear é dificultada pela força elétrica: os núcleos repelem-se devido à sua carga positiva, que será tanto maior quanto mais próximos eles estiverem. Mas, se a distância se reduzir suficientemente, entrarão em jogo as forças nucleares fortes, mais intensas do que a força de repulsão elétrica.

As reações de fusão nuclear exigem que os dois núcleos tenham energias cinéticas suficientes para vencer a repulsão elétrica. Para se atingirem essas energias, tem de se aquecer o combustível nuclear (pelo menos a cem milhões de graus Celsius), formando um plasma (elétrons e núcleos separados). Esse plasma tem de permanecer isolado das paredes do recipiente que o contém – por exemplo, a câmara de um *tokamak* (**Fig. 21**) –, o que se consegue aplicando campos magnéticos muito fortes.

No entanto, há muitos problemas técnicos a resolver antes que as centrais de fusão nuclear rentáveis fiquem operacionais. Sendo otimistas, prevê-se que entrem em funcionamento ainda durante o século XXI.



**Fig. 21** O tokamak é um reator de fusão nuclear particular. Partículas carregadas (íons e elétrons) estão confinadas num anel a uma temperatura da ordem de cem milhões de graus Celsius.

## Atividade 2



Elabore um trabalho que sistematize os seguintes aspetos da física nuclear:

1. Impacto das tecnologias nucleares atualmente disponíveis na produção de energia: vantagens relativamente às fontes tradicionais; riscos associados.
2. Reator de fusão ITER: finalidade e etapas de construção.

## 3.2.4 Lei do Decaimento Radioativo; atividade de uma amostra radioativa; período de semidesintegração

Os decaimentos radioativos são processos estatísticos: não se pode saber quando é que um certo núcleo radioativo vai sofrer um decaimento, apenas se pode conhecer a probabilidade de ocorrência desse processo. Para medir a rapidez do decaimento, ou seja, o número de decaimentos por unidade de tempo, define-se a **atividade de uma amostra radioativa** (símbolo  $A$ ). Se  $N$  for o número de núcleos na amostra, a atividade num dado instante é simétrica da derivada temporal do número de núcleos da amostra:

$$A = -\frac{dN}{dt}$$

O sinal menos aparece na expressão anterior para a atividade ser positiva, pois a derivada é negativa, uma vez que o número de núcleos diminui ao longo do tempo.

A unidade SI de atividade é o becquerel (símbolo Bq): 1 Bq é 1 decaimento por segundo. Se a atividade de uma amostra for, por exemplo,  $3,15 \times 10^{15}$  Bq, significa que, nesse instante, ocorrem  $3,15 \times 10^{15}$  decaimentos por segundo. Verifica-se experimentalmente que a atividade num dado instante é proporcional ao número de núcleos existente na amostra nesse instante:

$$A = \lambda N \quad \text{ou} \quad -\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

A constante  $\lambda$ , chamada **constante de decaimento**, é uma característica do núcleo: representa a probabilidade, por unidade de tempo, de ocorrência de um certo processo radioativo. Está relacionada com o **período de semidesintegração** (ou **tempo de meia-vida**), simbolizado por  $T_{1/2}$ , que é o tempo ao fim do qual o número de núcleos se reduz a metade.

A função  $N(t)$ , solução da equação  $-\frac{dN}{dt} = \lambda N$ , tem como derivada temporal a própria função, a menos do fator  $-\lambda$ . Só a função exponencial satisfaz esta exigência. Obtém-se assim a **Lei do Decaimento Radioativo**:

**Atividade de uma amostra radioativa:** número de decaimentos por unidade de tempo. É diretamente proporcional ao número de núcleos da amostra. A sua unidade SI é o becquerel (Bq).

**Constante de decaimento:** é uma característica do núcleo. Está relacionada com o período de semidesintegração.

### Lei do Decaimento Radioativo

O número de núcleos de uma amostra radioativa,  $N$ , diminui exponencialmente com o tempo:

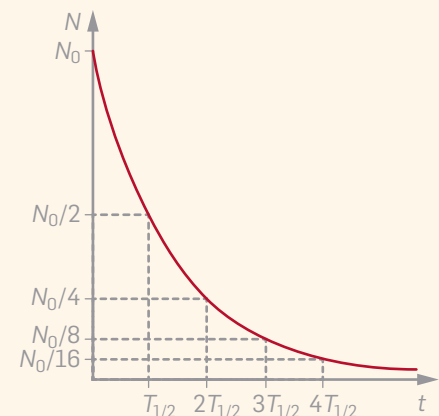
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$N_0$ : número inicial de núcleos

$\lambda$ : constante de decaimento

**Período de semidesintegração** ou **tempo de meia-vida**,  $T_{1/2}$ : tempo ao fim do qual o número de núcleos se reduz a metade.

$$\text{Se } t = T_{1/2}, \text{ então } N = \frac{N_0}{2}: \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$





Radioisótopo	Tempo de meia-vida
Polónio-215	$1,8 \times 10^{-3}$ s
Tecnécio-99	6,0 h
Radão-222	3,8 dias
Iodo-131	8,0 dias
Cobalto-60	5,3 anos
Hidrogénio-3	12,26 anos
Rádio-226	$1,6 \times 10^3$ anos
Carbono-14	$5,73 \times 10^3$ anos
Plutónio-239	$2,4 \times 10^4$ anos
Urânio-235	$4,5 \times 10^9$ anos

**Tab. 4** Radioisótopos e respetivos tempos de meia-vida.

Como  $A = -\frac{dN}{dt}$  e  $A = \lambda N$ , e sendo  $A_0 = \lambda N_0$  a atividade no instante inicial, então também a atividade decresce exponencialmente com o tempo:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

Os tempos de meia-vida são muito variados, como se mostra na **Tab. 4**. O tempo de meia-vida é essencial quando se tem de escolher núcleos radioativos para utilização em aplicações práticas como, por exemplo, em medicina.

Por exemplo, o iodo-131, utilizado em terapia da tiroide, possui um tempo de meia-vida de oito dias. Decorridos oito dias, o número de núcleos será reduzido para metade. Passados mais oito dias, será um quarto do número inicial e assim sucessivamente. Após 80 dias (10 meias-vidas), o número de núcleos é 1000 vezes menor do que o número inicial (e a atividade também se reduziu do mesmo fator).

### Atividade 3



A idade de certos materiais pode ser determinada a partir da atividade de isótopos neles contidos. O carbono-14, isótopo radioativo do carbono com um tempo de meia-vida de 5730 anos, é um emissor  $\beta^-$ , transformando-se em nitrogénio-14:  ${}^{14}_6\text{C} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + e^- + \bar{\nu}$ . Medindo a atividade do carbono-14 presente na madeira velha de uma casa, e comparando-a com a atividade da madeira nova da região, pode conhecer-se a idade da construção. Recolha informação sobre esta técnica de datação e sobre outros isótopos utilizados em datação e respetivas escalas de tempo.

### Questão resolvida 2



A atividade devida ao carbono-14 de restos de madeira encontrados em Conimbriga é 10,8 decaimentos por segundo por grama de material. A madeira nova do mesmo tipo tem uma atividade de carbono-14 de 13,5 decaimentos por segundo por grama. O período de semidesintegração do carbono-14 é 5730 anos.

- Determine a constante de decaimento deste isótopo.
- Em que época foi usada a madeira?



a) A constante de decaimento é  $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} = 1,21 \times 10^{-4} \text{ ano}^{-1}$ .

- b) Admitamos que a atividade da madeira nova na altura em que a madeira encontrada foi utilizada é igual à atividade da mesma madeira nos nossos dias:  $A_0 = 13,5 \text{ Bq}$ . Então, para 1 g de material vem  $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$  sendo  $A(t) = 10,8 \text{ Bq}$ . Portanto (com  $t$  em anos):

$$10,8 = 13,5 e^{-1,21 \times 10^{-4} t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{10,8}{13,5}\right) = -1,21 \times 10^{-4} t$$

donde  $t = 1844$  anos. A madeira foi usada na segunda metade do século II.

### QUESTÕES p. 266



## 3.2.5 Radioatividade: efeitos biológicos, aplicações e detetores

As emissões radioativas ionizam átomos e moléculas dos organismos vivos, danificando as células. Esse efeito ionizante depende da energia transferida para o organismo vivo por unidade de massa, do tipo de emissão (emissões diferentes com a mesma energia por unidade de massa têm diferente poder ionizante) e do tipo de tecido vivo que é atingido.

Os efeitos biológicos da radioatividade manifestam-se a curto prazo (náuseas, perda de apetite, febre, hemorragias, etc.) e a longo prazo (efeitos genéticos, com mutações nas células reprodutoras, e efeitos somáticos, como o aparecimento de doenças cancerígenas). Há organizações internacionais que estabelecem as doses máximas permitidas de radiação e fiscalizam o respeito por esses valores. Os espaços onde haja ou possa haver valores elevados de radiação têm de estar sinalizados com o símbolo da **Fig. 22**.

O corpo humano está sujeito a emissões radioativas naturais e artificiais.

Como fontes naturais de radioatividade há os solos e rochas, os raios cósmicos e mesmo o próprio corpo humano. Por exemplo, um adulto tem 2 g de potássio por cada quilograma, e 0,01% desse potássio tem uma atividade de 60 Bq por quilograma (o potássio radioativo é o potássio-40).

O radão, gás radioativo proveniente do decaimento do urânio e do rádio, está presente em muitas rochas e solos, como são exemplo as zonas graníticas. Embora a sua concentração seja normalmente baixa num espaço aberto, em espaços fechados (caves, casas) pode atingir concentrações elevadas e ser nocivo. O radão decai originando outros elementos radioativos que, quando inalados, podem fixar-se nos brônquios, aumentando o risco de cancro no pulmão.

Como fontes artificiais de radioatividade existem os isótopos radioativos utilizados na agricultura, na indústria, nos reatores nucleares e em medicina.

Na agricultura, utilizam-se marcadores radioativos para estudar o metabolismo das plantas e a ação dos adubos e pesticidas.

Na indústria, usam-se isótopos radioativos para esterilizar produtos alimentares e farmacêuticos, pois não alteram a sua qualidade nem deixam produtos tóxicos. Usam-se ainda para detetar defeitos em materiais e verificar desgaste de peças.

Em arqueologia usa-se o carbono-14, que é radioativo, na datação de fósseis (**Fig. 23**). Todos os organismos vivos absorvem e perdem uma pequena quantidade de carbono-14. Após a sua morte, o carbono-14 que decai já não é substituído. Sendo o tempo de meia-vida do carbono-14 de 5730 anos, medindo a atividade deste radioisótopo pode determinar-se a idade da amostra.

Em medicina nuclear, para terapêutica e diagnóstico de doenças, usam-se fontes radioativas com emissões gama com tempos de meia-vida relativamente curtos.

Na terapêutica de doenças cancerígenas, a energia da radiação foca-se numa região limitada, poupando os tecidos vizinhos sãos. É usado, muitas vezes, o cobalto-60. Outro radioisótopo, o samário-153, cuja meia-vida é de 1,9 dias, é injetado em metástases ósseas como paliativo para a dor.



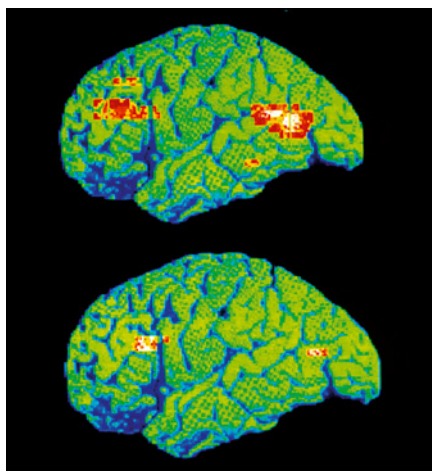
**Fig. 22** Símbolo que identifica zona com níveis elevados de radiação.



**Fig. 23** Amostra arqueológica de osso humano para datação por carbono-14.



**Fig. 24** Câmara gama: deteta «marcadores» radioativos.



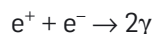
**Fig. 25** Imagem PET: cérebro de um paciente com depressão (em cima) e cérebro saudável (em baixo).



**Fig. 26** Contador Geiger.

Em diagnóstico clínico, os isótopos radioativos usam-se como «marcadores». Exemplos são o iodo-131 e o tecnécio-99 que se introduzem no doente de modo que as radiações sejam detetadas no exterior (**Fig. 24**). Esse exame permite mapear o organismo do doente.

Uma técnica de diagnóstico médico que também usa emissores radioativos é a Tomografia por Emissão de Positrões (sigla PET, da designação em inglês), a qual permite obter imagens de uma certa zona do corpo (**Fig. 25**) a partir da deteção de fótons. São administrados emissores  $\beta^+$  (positrões) ao doente, com tempos de meia-vida de 2 a 100 minutos. Os positrões emitidos aniquilam-se com eletrões de acordo com a reação



Neste processo são emitidos dois fótons, ambos com energias iguais a 511 keV, mas em sentidos opostos. Os isótopos usados têm de ser produzidos próximo dos centros clínicos onde são utilizados. Por isso, junto aos hospitais centrais funcionam aceleradores necessários à sua produção.

O organismo do doente elimina os isótopos radioativos após algumas horas através das secreções, mas os radioisótopos continuam o seu decaimento até que a sua atividade se extinga.

Os profissionais de saúde que trabalham na terapia ou diagnóstico com isótopos radioativos estão sujeitos a riscos e os danos podem ser irreparáveis se não tomarem os devidos cuidados e proteção adequada (usam aventais de chumbo e mantêm-se afastados dos equipamentos).

As emissões radioativas são detetadas por aparelhos próprios. Um exemplo é um contador Geiger (**Fig. 26**). É constituído por um tubo metálico, contendo um gás nobre a baixa pressão, e um fino fio metálico no seu interior. O tubo exterior e o fio central são as armaduras de um condensador entre os quais se estabelece uma diferença de potencial da ordem de  $10^3$  V. As emissões radioativas podem ionizar os átomos e as moléculas do gás do tubo. Formam-se iões positivos, sendo emitidos eletrões cuja energia e número depende da energia da radiação ionizante. Estes eletrões provocam novas ionizações e o gás torna-se condutor, originando uma corrente elétrica. O sinal elétrico produzido pode traduzir-se num sinal sonoro ou na oscilação de um ponteiro.

#### Atividade 4

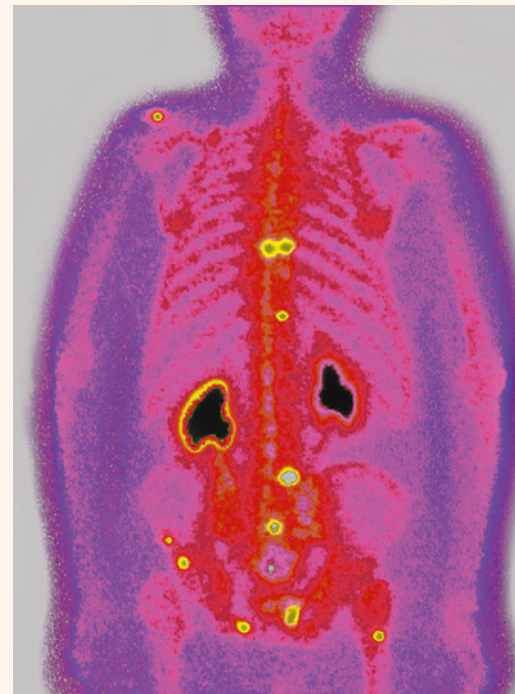
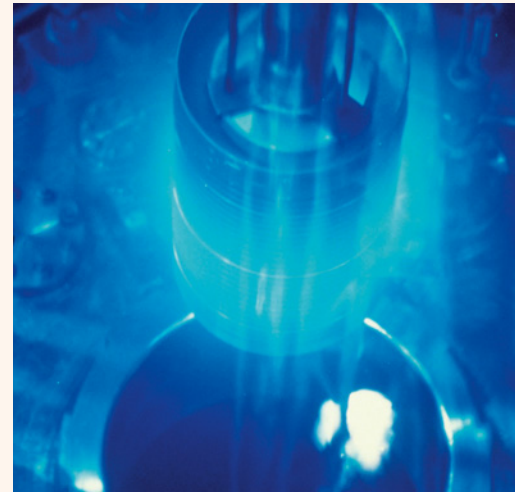
Se existir um detetor de Geiger e fontes radioativas na escola, realize medições usando diferentes fontes. Interponha entre o contador e as fontes vários materiais (papel, vidro, metal, etc.), a diferentes distâncias, e avalie o poder penetrante de cada emissão radioativa. Verifique que, mesmo longe das fontes, as partículas

ionizantes continuam a ser detetadas, embora em menor número.

As fontes radioativas escolares são de baixa atividade; o seu manuseamento, sob a supervisão do professor e respeitando as regras de segurança do equipamento, não oferece perigo!

## RESUMO

- **Estabilidade nuclear:** deve-se ao facto de as forças nucleares fortes, que são atrativas entre nucleões, predominarem sobre as forças elétricas de repulsão entre prótons.
- **Massa do núcleo atômico:** é sempre menor do que a massa de todos os seus nucleões separados.
- **Equivalência massa-energia de Einstein:**  $\Delta E = \Delta m c^2$ ; a diferença de massa na formação de um núcleo atômico corresponde uma diferença de energia.
- **Energia de ligação nuclear:** diferença entre a energia dos nucleões separados e dos nucleões ligados formando um núcleo. É a energia necessária para separar os nucleões.
- **Energia de ligação por nucleão:** será tanto maior quanto mais estável for o núcleo atômico.
- **Reações nucleares:** transformações de núcleos envolvendo elevada energia. Exemplos: fissão nuclear e fusão nuclear. São descritas por equações onde se verifica a conservação da carga elétrica e a conservação do número de massa.
- **Fusão nuclear:** núcleos com baixa energia de ligação por nucleão (núcleos leves) originam um núcleo com maior energia de ligação por nucleão (mais estável). Há emissão de energia neste processo. Ocorre nas estrelas e será a base dos futuros reatores nucleares de fusão para produção de energia elétrica.
- **Fissão (ou cisão) nuclear:** um núcleo pesado pode cindir-se e originar núcleos de massas semelhantes com maiores energias de ligação por nucleão (mais estáveis). Há emissão de energia neste processo. Ocorre nos reatores nucleares de fissão das atuais centrais nucleares para produção de energia elétrica.
- **Decaimento radioativo ou emissão radioativa:** emissão espontânea de partículas com carga, ou de fótons de alta energia, por núcleos instáveis (núcleos radioativos), originando núcleos estáveis ou ainda radioativos mas de mais baixa energia. Há libertação de energia. Há núcleos radioativos naturais e artificiais.
- **Decaimento  $\alpha$**  (núcleos de hélio):  ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He}$ .
- **Decaimento  $\beta^-$**  (elétrões):  ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_{-1} e^- + {}^0_0 \bar{\nu}$ ;  $n \rightarrow p + \beta^- + \bar{\nu}$ .
- **Decaimento  $\beta^+$**  (positrões):  ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + {}^0_{+1} e^+ + {}^0_0 \nu$ ;  $p \rightarrow n + \beta^+ + \nu$ .
- **Decaimento  $\gamma$**  (radiação eletromagnética):  ${}^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + \gamma$
- **Atividade de uma amostra radioativa, A:** número de decaimentos por unidade de tempo. É diretamente proporcional ao número de núcleos:  $A = \lambda N$  ( $\lambda$  é a constante de decaimento, característica da amostra). Unidade SI: becquerel (Bq).
- **Lei do Decaimento Radioativo:**  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$  ou  $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ .
- **Período de semidesintegração ou tempo de meia-vida,  $T_{1/2}$ :** tempo ao fim do qual o número de núcleos (ou a atividade) se reduz a metade;  $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ .





## QUESTÕES

### Nota

Na resolução das questões considere os seguintes valores:

$$1 \text{ u} = 1,660\,54 \times 10^{-27} \text{ kg};$$

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J};$$

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

### 3.2.1 Energia de ligação nuclear e estabilidade dos núcleos

- Que importância teve a experiência de Rutherford?
- Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).
  - Um núcleo é tanto mais estável quanto maior for a sua energia de ligação por nucleão.
  - A estabilidade nuclear deve-se à força eletromagnética.
  - Para desagregar um núcleo é necessário fornecer-lhe energia, da ordem dos MeV, enquanto para desagregar um átomo bastam energias da ordem dos eV.
  - À formação de um núcleo a partir dos seus constituintes está associada uma energia que se relaciona com o decréscimo de massa através da fórmula da massa-energia de Einstein.
- Indique a opção que completa a frase seguinte.  
Quando se forma um núcleo a partir dos seus nucleões, a massa do núcleo é:
  - igual à massa dos nucleões separados, libertando-se energia na sua formação.
  - igual à massa dos nucleões separados, absorvendo-se energia na sua formação.
  - menor do que a massa dos nucleões separados, libertando-se energia na sua formação.
  - menor do que a massa dos nucleões separados, absorvendo-se energia na sua formação.
- A energia de ligação por nucleão do néon-20 é 8,04 MeV. Qual é a diferença de massa na formação desse núcleo?
- A diferença de massa na formação do núcleo de hélio  ${}^4_2\text{H}$  é  $\Delta m = 0,030\,377 \text{ u}$  e na formação do núcleo de nitrogénio  ${}^{14}_7\text{N}$  é  $\Delta m = 0,112\,35 \text{ u}$ .
  - Qual das afirmações é correta?
    - Há um ganho maior de massa na formação do núcleo de nitrogénio do que do núcleo de hélio.
    - Liberta-se mais energia na formação do núcleo de hélio do que na formação do núcleo de nitrogénio.
    - É necessário mais energia para desagregar o núcleo de nitrogénio do que o núcleo de hélio.
    - A energia envolvida na formação dos núcleos é da ordem da respetiva energia de ligação atómica.
  - Determine a energia de ligação nuclear, em MeV, para cada núcleo.
  - Verifique que a energia de ligação nuclear por nucleão é semelhante.
- Qual das opções completa a seguinte frase?  
A fusão nuclear ocorre com núcleos ..., ao contrário da cisão nuclear, havendo nos dois casos ... de energia e formação de núcleos com ... energia de ligação por nucleão.
  - leves ... absorção ... maior
  - pesados ... absorção ... menor
  - pesados ... libertação ... maior
  - leves ... libertação ... maior
- Indique duas diferenças entre reações químicas e reações nucleares.

### 3.2.2 Processos de estabilização dos núcleos: decaimento radioativo. Propriedades das emissões radioativas $\alpha$ , $\beta$ e $\gamma$

- Por que são mais instáveis os núcleos maiores? Como se manifesta essa instabilidade?



9. Quais das afirmações são verdadeiras?
- Quando há uma emissão radioativa forma-se outro núcleo que é sempre estável.
  - Em todos os decaimentos radioativos há emissão de partículas.
  - Em todos os decaimentos radioativos há libertação de energia.
  - Numa emissão radioativa forma-se obrigatoriamente um elemento diferente.
  - Numa emissão radioativa há conservação da carga e do número de nucleões.
  - Só existem núcleos radioativos naturais.

10. Considere as emissões alfa, beta e gama.

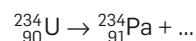
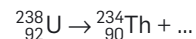
- Ordene-as por poder ionizante crescente.
- Ordene-as por poder de penetração decrescente.
- Indique a afirmação correta.
  - A radiação gama é defletida por campos magnéticos por ter carga elétrica.
  - A partícula alfa tem menor massa do que a beta e, por isso, é menos defletida por um campo magnético.
  - A partícula alfa é facilmente detida por um metal, tal como a radiação gama.
  - A partícula alfa é a mais ionizante e a mais perigosa para os tecidos humanos quando ingerida ou inalada.

11. Justifique por que razão as partículas alfa são menos desviadas do que as partículas beta por um campo magnético perpendicular à velocidade dessas partículas.

12. Em 2011 comemorou-se o Ano Internacional da Química, no centenário do Prémio Nobel de Química concedido a Marie Curie pela descoberta dos elementos radioativos rádio e polónio. No decaimento do rádio-224 em radão-220 e do polónio-216 em chumbo-212 há, respetivamente, emissões:

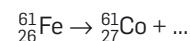
- (A)  $\alpha$  e  $\alpha$       (B)  $\alpha$  e  $\beta$       (C)  $\beta$  e  $\beta$       (D)  $\beta$  e  $\alpha$

13. O urânio-238 decai originando o tório-234, e este decai originando o protactínio-234. Os decaimentos são representados pelas equações seguintes:



- Complete as equações, identificando as partículas emitidas.
  - Qual é o núcleo que tem maior energia de ligação por nucleão? Justifique.
14. Consultando a Tabela Periódica, escreva as equações para as seguintes reações de decaimento:
- $\beta^-$  do hidrogénio-3.
  - $\beta^+$  do cálcio-39.
  - $\gamma$  de um núcleo de cobalto-60 excitado.
  - $\alpha$  do polónio-210.

15. Uma supernova é a explosão de uma estrela supergigante. Uma reação nuclear que então ocorre é:

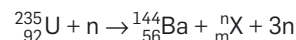


Qual das afirmações é correta?

- Um próton transforma-se num neutrão com emissão  $\beta^+$ .
- Um neutrão transforma-se num próton com emissão  $\beta^-$ .
- O núcleo inicial tem excesso de prótons e há emissão  $\beta^-$ .
- O núcleo inicial tem excesso de neutrões e há emissão  $\beta^+$ .

### 3.2.3 Reações de fissão nuclear e de fusão nuclear

16. Uma reação nuclear é representada por:



- Indique o valor de m e n do elemento químico representado por X.
- Identifique o tipo de reação nuclear e indique uma aplicação.

17. No *big bang*, formou-se hélio-3 a partir do deutério (hidrogénio-2) com emissão de radiação gama. Escreva a respetiva equação.
18. As reações de fissão nuclear envolvem núcleos:
- (A) leves, como o urânio, e ocorrem em centrais nucleares.
  - (B) pesados, como o plutónio, e ocorrem nas estrelas.
  - (C) leves, como o hélio, e ocorrem nas estrelas.
  - (D) pesados, como o plutónio e o urânio, e foram usadas para fazer bombas atómicas.

### 3.2.4 Lei do Decaimento Radioativo; atividade de uma amostra radioativa; período de semidesintegração

19. O tempo de meia-vida de um isótopo radioativo é 1 d. Passados três dias a sua atividade é:
- (A) 1/2 da inicial.
  - (B) 1/4 da inicial.
  - (C) 1/8 da inicial.
  - (D) 1/16 da inicial.
20. O ouro-198 é um emissor  $\beta^-$  com o tempo de meia-vida de 2,7 d.
- a) Consultando a Tabela Periódica, escreva a equação do decaimento.
  - b) Uma amostra tem inicialmente uma atividade de 7,0 MBq. Qual é a sua atividade após uma semana?
21. O isótopo radioativo fósforo-32 é usado em medicina nuclear para localizar tumores no cérebro e metástases ósseas. Tem um tempo de meia-vida de 14,3 d e é um emissor  $\beta^-$ , o que requer muitos cuidados no seu manuseamento.
- a) Ao fim de quantas horas a sua atividade decresce 5%?
  - b) Consultando a Tabela Periódica, escreva a equação do decaimento.
22. Num centro de diagnóstico usa-se, para um exame ao coração, o isótopo radioativo telúrio-201, cujo tempo de meia-vida é aproximadamente 3,0 d. Num dado instante há 18,0 g desse isótopo. Que massa haverá após 48 h?

23. Um contador Geiger indica que o número de decaimentos por unidade de tempo cai para metade em cerca de 10 h. Qual é a diminuição percentual do número de núcleos radioativos após 30 h?
24. Um contador Geiger, a uma certa distância de uma amostra radioativa, regista 1300 contagens/minuto. Sem alterar a sua posição, voltou a fazer-se nova medição passadas 4,0 h, tendo sido registadas 124 contagens/minuto. Qual é, em horas, o tempo de meia-vida da amostra?
25. A atividade,  $A$ , de um isótopo radioativo desconhecido foi registada em intervalos de tempo de 24,0 horas, obtendo-se os seguintes valores, em MBq:

32,1	27,2	23,0	19,5	16,5
------	------	------	------	------

- a) A partir da Lei do Decaimento Radioativo, mostre que  $\ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = \lambda t$ .
- b) Construa o gráfico  $\ln\left(\frac{A_0}{A}\right)$  em função de  $t$  e, a partir da reta de ajuste aos dados, determine o tempo de meia-vida.

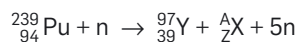
### 3.2.5 Radioatividade: efeitos biológicos, aplicações e detetores

26. Que características deve ter um núcleo radioativo para diagnóstico médico quanto ao seu poder de penetração, poder ionizante e tempo de meia-vida? Faça uma pesquisa sobre os núcleos radioativos mais utilizados em diagnóstico médico e a razão da sua utilização. Verifique que o tecnécio-99 num estado excitado tem as características exigidas.
27. Será perigoso transportar numa pasta uma amostra radioativa que emite partículas  $\alpha$ ?
28. Procure saber o que designa a expressão «lixo atómico» e quais as suas implicações.

**29.** Uma técnica de diagnóstico por imagem é o PET – Tomografia por Emissão de Positrões (*Positron Emission Tomography*) – que permite mapear a atividade cerebral. O doente ingere uma solução contendo o isótopo radioativo flúor-18, que tem uma meia-vida de 110 min e decai emitindo um positrão. Os positrões emitidos, ao encontrarem elétrons, sofrem aniquilação e emitem fótons de elevada energia que permitem depois obter a imagem do cérebro. Se não houvesse eliminação da solução pelo organismo, que percentagem de flúor-18 da quantidade ingerida ainda permaneceria no doente 6,0 h após a ingestão?

### Questões globais

**30.** Em 1945, na cidade japonesa de Hiroshima foi lançada uma bomba de urânio-235 e em Nagasaki uma de plutônio-239, as quais originaram mais de cem mil mortes imediatas e milhares de outras em consequência das emissões radioativas. Uma das reações que teve lugar foi a do plutônio-239 com um neutrão, descrita pela equação seguinte, onde X não é um símbolo químico:



Nesta reação há libertação de 207,1 MeV por cada núcleo de plutônio que reage.

- Determine A e Z para o elemento X.
  - Identifique o tipo de reação nuclear.
  - Por que razão se liberta energia nesta reação nuclear?
  - O tempo de meia-vida deste isótopo de plutônio é  $2,4 \times 10^4$  anos. Ao fim de quanto tempo apenas restará 1/16 do número de núcleos numa amostra?
- 31.** Qual das afirmações é correta?
- Na fissão nuclear, um núcleo divide-se em núcleos mais leves mas menos estáveis.
  - Na fusão nuclear, dois núcleos originam um núcleo mais pesado, absorvendo energia.

**(C)** Na fusão nuclear, a massa do núcleo formado é maior do que a soma das massas dos núcleos iniciais.

**(D)** Na fissão nuclear, a soma das massas dos núcleos resultantes com a dos neutrões emitidos é menor do que a massa do núcleo que sofreu a fissão.

**32.** O roentgênio é um elemento radioativo produzido em laboratório com um tempo de meia-vida muito curto (cerca de 15 ms). Alguns dos decaimentos radioativos que ocorrem são os seguintes:



- Que partículas são emitidas nos decaimentos representados?
  - Indique, justificando, que comportamento apresentam essas partículas se a emissão for feita na presença de um campo magnético perpendicular à velocidade das partículas.
  - Quem, pela primeira vez, sintetizou isótopos radioativos artificiais?
- 33.** O cobalto-60 e o céσιο-137 são usados para esterilização de certos produtos alimentares (chamada irradiação de alimentos). O tempo de meia-vida do cobalto é 5,3 anos e o do céσιο é 30 anos.
- O cobalto é mais usado por ser mais rentável e facilmente encapsulado, e ter maior poder penetrante. Atendendo ao tempo de meia-vida, o céσιο terá alguma vantagem sobre o cobalto? Justifique.
  - O cobalto-60 emite radiação  $\gamma$ . Seria mais vantajoso utilizar núcleos com emissões  $\alpha$  ou  $\beta^-$ ? Justifique.
  - Ao fim de quanto tempo o número de núcleos de uma amostra de cobalto-60 diminui 80%?
  - Faça uma pesquisa e elabore um pequeno trabalho sobre benefícios da irradiação de alimentos e o modo como se processa.

## ANEXO 1 Questão resolvida 2 (p. 12)

Os procedimentos mencionados na descrição das atividades e questões referem-se às calculadoras TEXAS TI-84 PLUS, CASIO FX-CG20 e Texas Instruments TI-Nspire CX. Porém, outras calculadoras poderão ser usadas.

Com a calculadora gráfica no modo paramétrico, introduza as seguintes equações paramétricas (com valores em unidades SI) e verifique a trajetória correspondente:

- $x = 2 - 15t + 10t^2$  e  $y = 5 + 10t^2$ , nos primeiros 2 s de movimento. Caracterize o movimento ao longo de cada eixo. Quais são as coordenadas no instante  $t = 0,05$  s?
- $x = 2t^3 - 5t^2 + 1$  e  $y = -t^2 + 3t + 2$ , nos primeiros 3 s. Caracterize o movimento ao longo de cada eixo. Indique o instante em que a coordenada  $x$  tem o valor mínimo.
- $x = 2 \sin(2t)$  e  $y = 2 \cos(2t)$ , com o ângulo expresso em radianos, nos primeiros 3,2 s. No **ZOOM**, utilize a opção **ZSquare** para as escalas vertical e horizontal serem iguais. A trajetória é conhecida?

### A – Procedimento para a TEXAS TI-84 PLUS

Para visualizar trajetórias, introduzem-se as equações no modo paramétrico, sendo necessário pressionar previamente a tecla **MODE** e ativar, na quinta linha, a opção **PARAMETRIC** (Fig. A.1).

- O movimento é uniformemente variado nos dois eixos. Introduzem-se as equações na calculadora. Na tecla **WINDOW** escolhe-se a melhor escala para ver a trajetória para 2 s: por exemplo, escolhe-se um passo (**Tstep**) de 0,05 s – a máquina realiza então os cálculos de 0,05 em 0,05 s – e os valores mínimo e máximo de  $x$  e  $y$  adequados àquele intervalo de tempo. Pressionando **GRAPH** obtém-se uma curva e pressionando **TRACE** obtém-se as coordenadas espaciais em qualquer instante (Fig. A.2). Para chegar às coordenadas mais rapidamente para um instante  $t$ , carrega-se em **2nd [CALC]**, opção **1: value**, indica-se o instante e aparecem de imediato as coordenadas. Para  $t = 0,05$  s, obtém-se  $x = 1,275$  e  $y = 5,025$ .



Fig. A.1 Configuração da máquina no modo paramétrico.

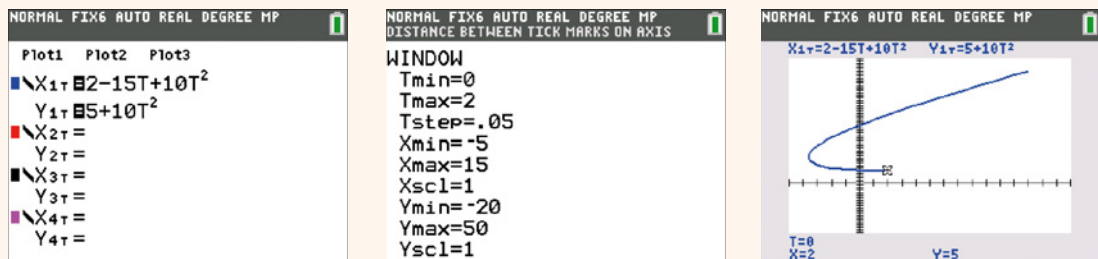
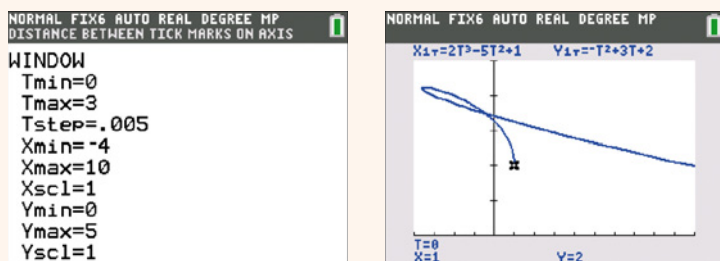


Fig. A.2 Equações paramétricas, escala escolhida e trajetória respetiva.

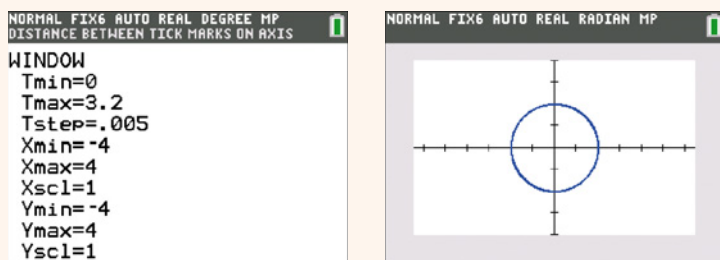


- b) O movimento é variado segundo  $x$  e uniformemente variado segundo  $y$ . Seguindo os procedimentos anteriores, obtém-se a trajetória indicada na **Fig. A.3**, sendo  $x$  mínimo em  $t = 1,67$  s (pode estudar-se a função  $x(t)$  no modo função – **FUNC**).



**Fig. A.3** Escala escolhida e trajetória de uma partícula.

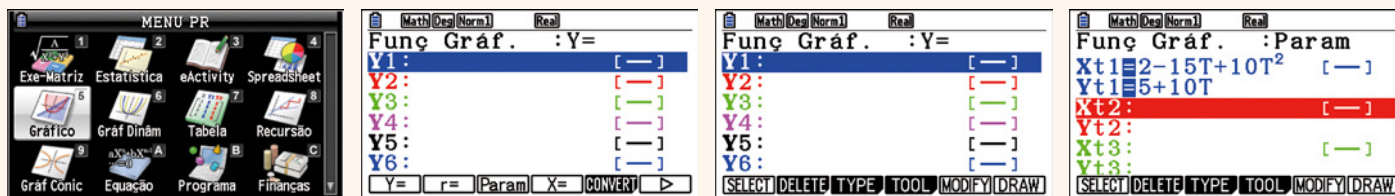
- c) Neste caso deve ter-se o cuidado de configurar a máquina para radianos, utilizando a tecla **MODE**. E, para que as escalas vertical e horizontal sejam iguais, deve utilizar-se o **ZSquare** no **ZOOM**. A curva obtida é uma circunferência de raio 2 e centro na origem do referencial (**Fig. A.4**).



**Fig. A.4** Escala escolhida e trajetória de uma partícula.

## B – Procedimento para a CASIO FX-CG20

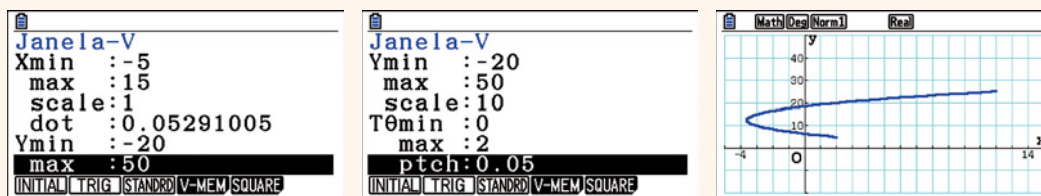
- a) Para construir o gráfico da trajetória, pressiona-se **MENU** e seleciona-se **GRAPH**. Deve alterar-se o tipo de função pressionando a tecla **F3** (TYPE) e novamente **F3** (PARAM). Escrevem-se as expressões e pressiona-se **EXE** para memorizar e passar à seguinte (**Fig. A.5**).



**Fig. A.5** Procedimentos para introduzir as equações paramétricas.

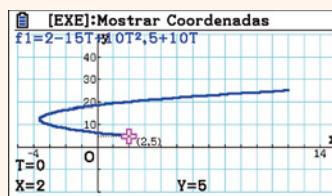
A janela de visualização deve ser configurada (**Fig. A.6**). Para ajustar o gráfico à escala pretendida, utiliza-se o V-Window, ou seja, pressiona-se **SHIFT** seguido de **F3** e introduzem-se os valores. Confirma-se sempre com **EXE**. Para regressar ao ecrã anterior, pressiona-se **EXIT**. Com a janela «Graf Func» no ecrã, pressiona-se **F6** (DRAW).

**Fig. A.6** Configuração da escala e trajetória.

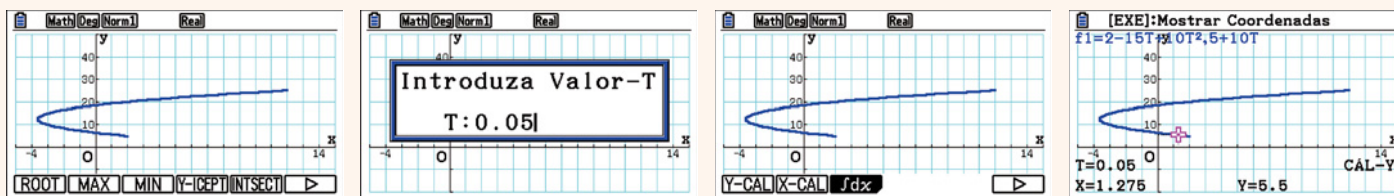


Pressionando **F1** (Trace), visualizamos o gráfico (**Fig. A.7**), a função e os valores das coordenadas.

**Fig. A.7** Trajetória, função e valores das coordenadas.



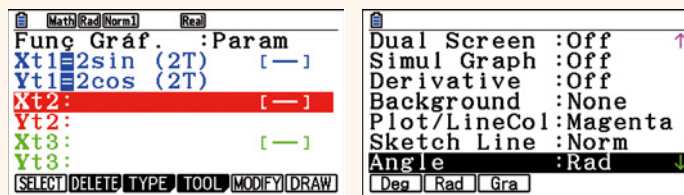
Para encontrar as coordenadas de um ponto (**Fig. A.8**), pressiona-se **SHIFT** seguido de **F5** (G-Solv), roda-se a barra de ferramentas pressionando **F6** e escolhe-se a opção **F1** (Y-CAL). Introduce-se o valor de  $t$  e pressiona-se **EXE**.



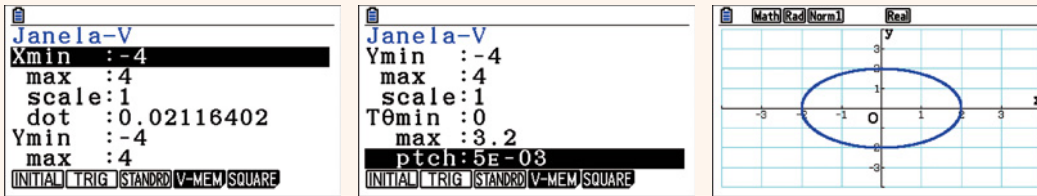
**Fig. A.8** Determinação das coordenadas de um ponto.

- b) Procedimento análogo ao da alínea anterior.
- c) Introduzem-se as expressões. Para estudar o movimento é necessário configurar a máquina para radianos (**Fig. A.9**): pressiona-se **SHIFT** seguido da tecla **MENU** (SET UP). Percorre-se a lista até encontrar a opção «Angle» e escolhe-se radianos pressionando a tecla **F3** (Rad).

**Fig. A.9** Configuração para radianos.

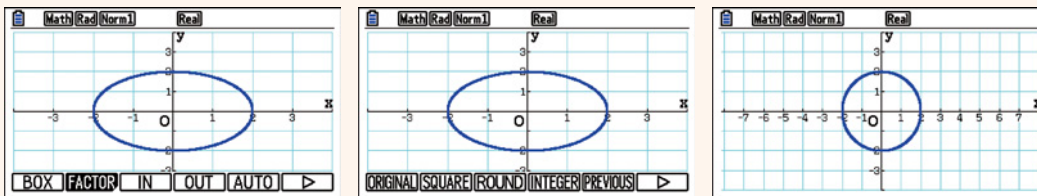


Depois, seguem-se os procedimentos anteriores para configurar a janela de visualização (**Fig. A.10**) (**SHIFT + F3**) e para desenhar (**F5 – DRAW**).



**Fig. A.10** Configuração da escala e trajetória.

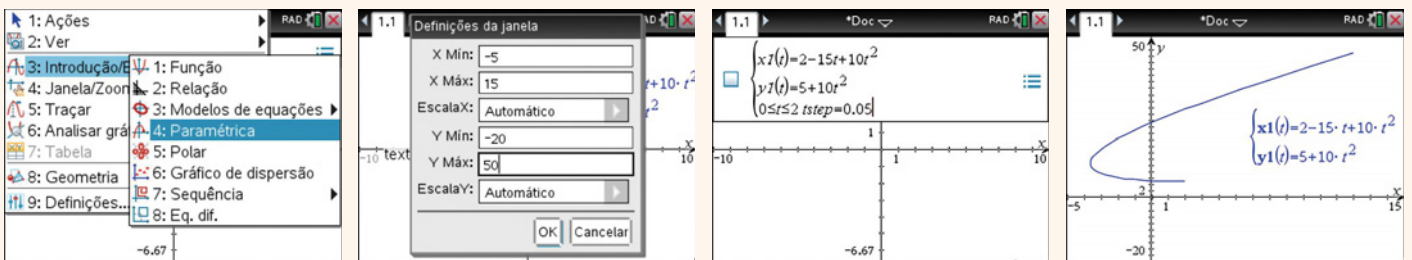
Com o gráfico desenhado, pressiona-se **F2** (Zoom), roda-se o menu (**F6**) e seleciona-se **F2** (SQR) – ver **Fig. A.11**.



**Fig. A.11** Adequação da escala.

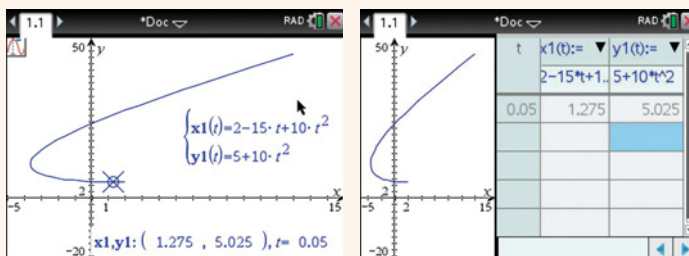
## C – Procedimento para a Texas Instruments TI-Nspire CX

- a) Pressionar **ON** e abrir um novo documento com a aplicação **Gráficos**. Para introduzir as equações paramétricas do movimento, premir sucessivamente **MENU, 1:Ações, 3:Introdução/Edição de gráficos e 4:Paramétrica**. Introduzir as equações, definir o domínio da variável  $t$  ( $0 \leq t \leq 2$ ), o respetivo incremento ( $tstep=0,05$ ) e premir **ENTER**. Definir uma janela adequada, para uma boa visualização do gráfico, pressionando **MENU, 4:Janela/Zoom, 1:Definições da janela** e **OK** (**Fig. A.12**).



**Fig. A.12** Configuração no modo paramétrico, equações paramétricas, escala e trajetória.

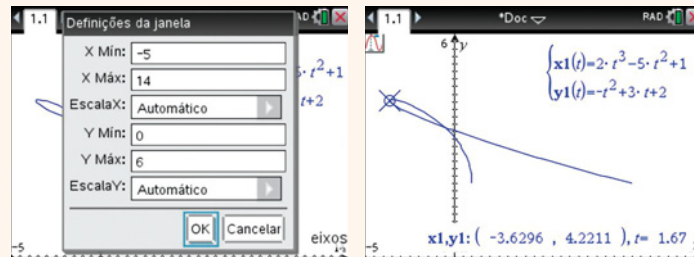
Para obter as coordenadas no instante  $t = 0,05$  s, pressionar sucessivamente **MENU, 5:Traçar, 1:Traçado do gráfico** e mover o cursor para o instante pretendido. Obter-se-á, para  $t = 0,05$  s,  $x = 1,275$  e  $y = 5,025$  (**Fig. A.13**).



**Fig. A.13** Determinação das coordenadas de um ponto.

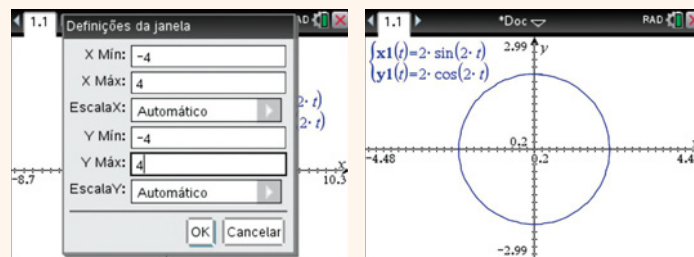
Em alternativa, podem obter-se as coordenadas para qualquer instante, pressionando **MENU, 7:Tabela e 1:Tabela de ecrã dividido**. Na tabela, pressionar **MENU, 2:Tabela de valores, 5:Editar definições da tabela e**, na janela da variável **Independente**, alterar o modo **Auto** para **Perguntar**. Agora é só digitar o valor de  $t$  e obter as respetivas coordenadas.

- b) Repetindo os procedimentos da alínea anterior, obtém-se a trajetória indicada na figura (A.14). Para obter um incremento mais fino da variável  $t$ , posicionar o cursor sobre a curva, pressionar **CTRL e MENU** e selecionar **7:Traçar, 3:Definições do traçado e**, em incremento do traçado, introduzir 0,01 e **OK**. Para alterar o número de dígitos apresentado nas coordenadas, pressionar **MENU e 9:Definições**. Obter-se-á  $x$  mínimo para  $t = 1,67$  s. Pode ainda obter-se este valor através da tabela ou por determinação do mínimo da função  $x(t)$ , no modo de gráficos de funções.



**Fig. A.14** Trajetória e coordenadas de um ponto.

- c) Verificar se a aplicação gráficos está configurada para calcular ângulos em radianos, pressionando **MENU e 9:Definições**. Repetindo os procedimentos das alíneas anteriores, obtém-se a trajetória indicada na figura (A.15). Para obter uma simetria da trajetória, face à distorção do ecrã, pressionar **MENU, 4:Janela/Zoom, B:Zoom - Quadrado e OK**.



**Fig. A.15** Configuração da escala e trajetória.



## ANEXO 2 Questão resolvida 6 (p. 24)

Uma partícula move-se durante 3 s, de acordo com as seguintes equações paramétricas:  $x = 5,00 + 4,00t - 3,50t^2$  e  $y = -1,00t + 2,00$  (SI).

- Preveja o tipo de trajetória e determine a expressão do módulo da velocidade para um instante qualquer.
- Introduza a função anterior na calculadora e veja como varia a velocidade da partícula, caracterizando o movimento. Em que instante é mínima a velocidade? E qual é o respetivo módulo? E em que posição se encontra a partícula?
- Em que instante o módulo da velocidade está a variar mais rapidamente, em  $t = 0,3$  s ou  $t = 1,6$  s? Justifique.
- Em que instante a direção da velocidade está a variar mais rapidamente, em  $t = 0,3$  s ou  $t = 1,6$  s? Justifique.
- Em que instante,  $t = 0,3$  s ou  $t = 1,6$  s, o raio de curvatura da trajetória é maior? Justifique.

### A – Procedimento para a TEXAS TI-84 PLUS

- A partícula descreve uma trajetória parabólica, pois há uma equação paramétrica do primeiro grau em  $t$  e outra do segundo grau em  $t$ . As equações da velocidade são:  $v_x = 4,00 - 7,00t$  e  $v_y = -1,00$ , e o módulo é  $v = \sqrt{(4,00 - 7,00t)^2 + 1,00}$  ( $\text{m s}^{-1}$ ).
- Verifica-se que o módulo da velocidade diminui até um valor mínimo e depois aumenta. Por isso, o movimento é inicialmente retardado e depois acelerado. A velocidade é mínima para  $t = 0,57$  s e o respetivo módulo é  $1,00 \text{ m s}^{-1}$  (Fig. A.16).  
Para saber a posição, substitui-se o valor 0,57 s nas equações paramétricas ou introduz-se essas equações no modo **Function** da calculadora e determinam-se os respetivos valores. Ou, introduzindo-se as equações paramétricas no modo **Par**, não só se vê a trajetória nos 2 s como se determinam as coordenadas em  $t = 0,57$  s (Fig. A.17):  $x = 6,14$  m e  $y = 1,43$  m.
- O módulo da velocidade varia mais rapidamente quando a aceleração tangencial for maior. Como esta é a derivada do módulo da velocidade, basta aceder ao gráfico do módulo da velocidade em função do tempo (Fig. A.16) e calcular a derivada através da opção **2nd [CALC]**. Para  $t = 0,3$  s, obtém-se  $a_t = -6,19 \text{ m s}^{-2}$  e, para  $t = 1,6$  s, obtém-se  $a_t = 6,93 \text{ m s}^{-2}$ . Por isso, o módulo da velocidade varia mais rapidamente em  $t = 1,6$  s.
- Varia mais rapidamente quando a aceleração normal for maior. Como  $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$  e  $a = 7 \text{ m s}^{-2}$ , obtém-se  $a_n = 3,27 \text{ m s}^{-2}$  para  $t = 0,3$  s e  $a_n = 0,99 \text{ m s}^{-2}$  para  $t = 1,6$  s. Por isso, varia mais rapidamente em  $t = 0,3$  s.
- Como  $R = \frac{v^2}{a_n}$ , obtém-se  $R = 1,4$  m para  $t = 0,3$  s e  $R = 53,4$  m para  $t = 1,6$  s. O gráfico da trajetória valida estes resultados, pois a curva torna-se mais aberta à medida que o tempo avança.

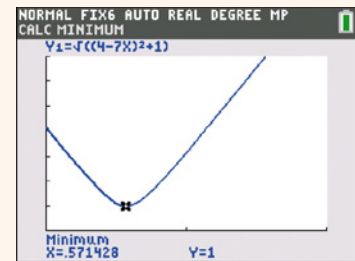


Fig. A.16 Gráfico do módulo da velocidade em função do tempo e determinação do mínimo.

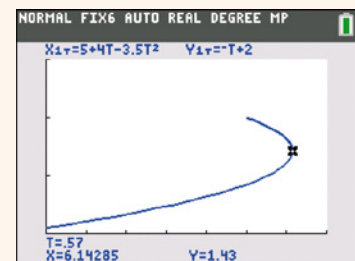
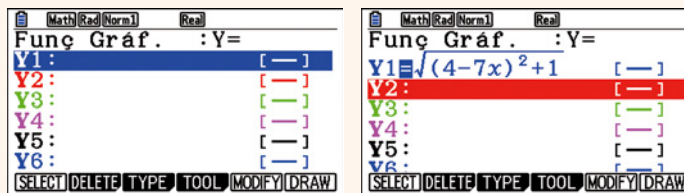


Fig. A.17 Gráfico da trajetória da partícula e coordenadas da posição no instante em que a velocidade é mínima.

## B – Procedimento para a CASIO FX-CG20

- b) Tal como foi feito anteriormente na questão resolvida 2, entra-se no menu **GRAPH**. Deve alterar-se o tipo de função pressionando a tecla **F3** (TYPE) e novamente **F1** (FUNC). Escreve-se a expressão e pressiona-se **EXE** para memorizar e passar à seguinte (Fig. A.18).

Fig. A.18 Procedimento para introduzir a função.



A janela de visualização deverá ser configurada: pressiona-se **SHIFT** seguido de **F3** (V-Window) e introduzem-se os valores mínimos e máximos de x e de y, confirmando com a tecla **EXE**. Para regressar ao ecrã anterior, pressiona-se **EXIT** e para desenhar o gráfico pressiona-se **F5** (DRAW), tal como se mostra na Fig. A.19.

Fig. A.19 Configuração da escala e traçado do gráfico.

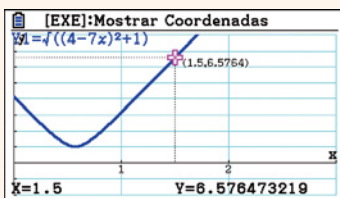
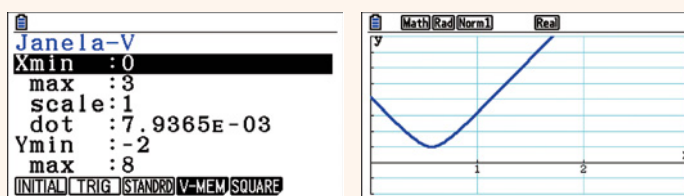
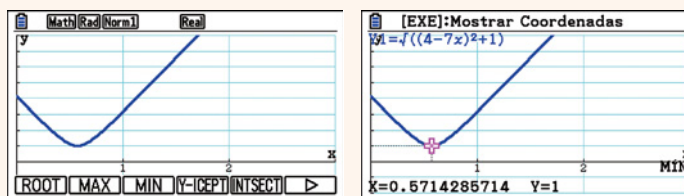


Fig. A.20 Visualização das coordenadas da função.

Com o gráfico desenhado, para ter acesso às coordenadas dos pontos, pressiona-se **SHIFT + F1** (Trace). Pressionando as setas do cursor para a direita ou para a esquerda, podem visualizar-se os diversos pontos da função (Fig. A.20).

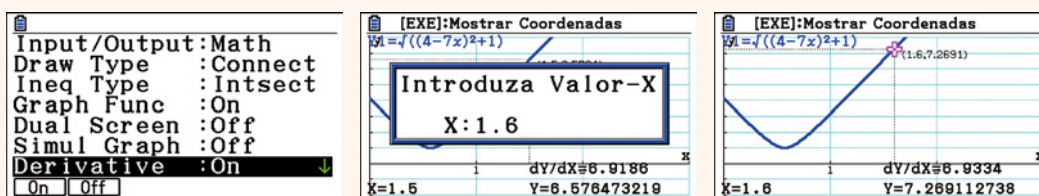
Para encontrar o mínimo da função, pressiona-se **SHIFT** seguido de **F5** (G-Solv). Escolhe-se a opção MIN com a tecla **F3**. Encontra-se não só o mínimo da velocidade, como o instante em que ocorre (Fig. A.21).

Fig. A.21 Determinação do mínimo da velocidade.



- c) Para determinar as derivadas nos diversos pontos do gráfico, pressiona-se **SHIFT + MENU** (SET UP) e coloca-se «On» a opção «Derivative». Com a combinação das teclas **SHIFT + F1** (Trace), será exibido o valor da derivada no(s) ponto(s) selecionado(s) (Fig. A.22).

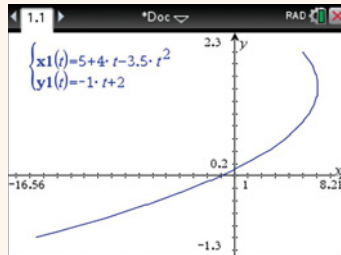
Fig. A.22 Determinação da componente tangencial da aceleração.



## C – Procedimento para a Texas Instruments TI-Nspire CX

- a) A partícula descreve uma trajetória parabólica, o que pode ser verificado obtendo o gráfico da trajetória.

Pressionar **ON** e abrir um novo documento com a aplicação **Gráficos**. Repetindo os procedimentos da questão 2, obtém-se a trajetória indicada (**Fig. A.23**) (o incremento foi alterado para 0,01).

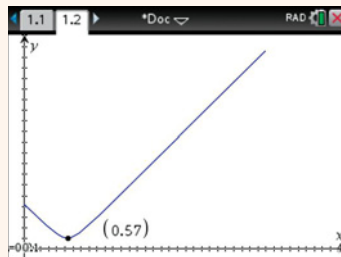


**Fig. A.23** Trajetória parabólica descrita pela partícula.

- a) O módulo da velocidade em qualquer instante é dado por

$$v(t) = \sqrt{(4,00 - 7,00t)^2 + 1,00} \text{ m s}^{-1}$$

- b) Acrescentar uma nova página (**CTRL** e **DOC**) com a aplicação **Gráficos**. Introduzir a expressão de  $v(t)$ , restringida ao intervalo  $0 \leq x \leq 3$  segundos (após digitar a expressão, pressionar **CTRL** e **=**, selecionar o segmento vertical, digitar o referido intervalo e fazer **ENTER**). Selecionar uma escala adequada para uma boa visualização do gráfico. Pode concluir-se que a velocidade é mínima para  $t = 0,57$  s e o respetivo módulo é  $1,00 \text{ m s}^{-1}$  (**Fig. A.24**).



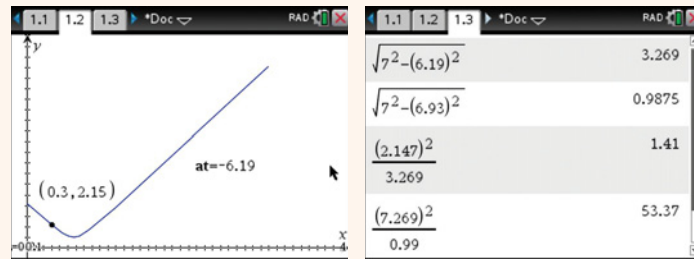
**Fig. A.24** Determinação do mínimo da velocidade.

Para saber a posição naquele instante, acrescentar uma nova página com a aplicação **Calculadora**, digitar a variável  $x_1(0,57)$  e **ENTER** e repetir para a variável  $y_1$ . Obter-se-ão as coordenadas  $x = 6,14$  m e  $y = 1,43$  m.

- c) O módulo da velocidade varia mais rapidamente quando a aceleração tangencial for maior. Voltar à página do gráfico  $v(t)$  e pressionar sucessivamente **MENU**, **5:Traçar**, **1:Traçado do gráfico** e com o cursor em qualquer parte da curva pressionar **ENTER**; obter-se-á um ponto sobre a curva e as respetivas coordenadas. Em seguida, determinar a derivada nesse ponto, premindo **MENU**, **6:Analisar gráfico**, **5:dy/dx**, e, posicionando o cursor sobre o ponto, premir **ENTER**, obtendo, assim, o valor da aceleração tangencial. Pôr o cursor sobre o valor da variável independente e, pressionando duas vezes **ENTER**, alterar o valor para os instantes

pretendidos. Para  $t = 0,3$  s, obtém-se  $a_t = -6,19$  m s<sup>-2</sup> e para  $t = 1,6$  s, obtém-se  $a_t = 6,93$  m s<sup>-2</sup>. Assim, o módulo da velocidade varia mais rapidamente em  $t = 1,6$  s (**Fig. A.25**).

**Fig. A.25** Determinação da componente tangencial da aceleração.



- d) A direção da velocidade varia mais rapidamente quando a aceleração normal for maior. Como  $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$  e  $a = 7$  m s<sup>-2</sup>, obtém-se  $a_n = 3,27$  m s<sup>-2</sup> para  $t = 0,3$  s e  $a_n = 0,99$  m s<sup>-2</sup> para  $t = 1,6$  s. Por isso, a direção da velocidade varia mais rapidamente em  $t = 0,3$  s.
- e) Como  $R = \frac{v^2}{a_n}$ , tem de se calcular a velocidade nos instantes pretendidos. Assim, na página 1.3 com a aplicação **Calculadora**, digitar **f1**(valor) e **ENTER**. Obtém-se, para  $t = 0,3$  s,  $v = 2,147$  m s<sup>-1</sup> e  $R = 1,41$  m, e para  $t = 1,6$  s,  $v = 7,269$  m s<sup>-1</sup> e  $R = 53,37$  m. O gráfico da trajetória confirma estes resultados, pois a curva torna-se mais aberta à medida que o tempo avança.



GRUPO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
PERÍODO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1 <b>H</b> 1,01 Hidrogênio	Metals										2 <b>He</b> 4,00 Hélio						
2	3 <b>Li</b> 6,94 Lítio	4 <b>Be</b> 9,01 Berílio	Semimetals										5 <b>B</b> 10,81 Boro	6 <b>C</b> 12,01 Carbono	7 <b>N</b> 14,01 Azoto	8 <b>O</b> 16,00 Oxigênio	9 <b>F</b> 18,99 Fluor	10 <b>Ne</b> 20,18 Néon
3	11 <b>Na</b> 22,99 Sódio	12 <b>Mg</b> 24,31 Magnésio	Não-metals										13 <b>Al</b> 26,98 Alumínio	14 <b>Si</b> 28,09 Silício	15 <b>P</b> 30,97 Fósforo	16 <b>S</b> 32,06 Enxofre	17 <b>Cl</b> 35,45 Cloro	18 <b>Ar</b> 39,95 Árgon
4	19 <b>K</b> 39,10 Potássio	20 <b>Ca</b> 40,08 Cálcio	21 <b>Sc</b> 44,96 Escândio	22 <b>Ti</b> 47,87 Titânio	23 <b>V</b> 50,94 Vanádio	24 <b>Cr</b> 51,99 Crômio	25 <b>Mn</b> 54,94 Manganês	26 <b>Fe</b> 55,85 Ferro	27 <b>Co</b> 58,93 Cobalto	28 <b>Ni</b> 58,69 Níquel	29 <b>Cu</b> 63,55 Cobre	30 <b>Zn</b> 65,39 Zinco	31 <b>Ga</b> 69,72 Gálio	32 <b>Ge</b> 72,61 Germânio	33 <b>As</b> 74,92 Arsênio	34 <b>Se</b> 78,96 Selênio	35 <b>Br</b> 79,90 Bromo	36 <b>Kr</b> 83,80 Cripton
5	37 <b>Rb</b> 85,47 Rubídio	38 <b>Sr</b> 87,62 Estrôncio	39 <b>Y</b> 88,91 Ítrio	40 <b>Zr</b> 91,22 Zircônio	41 <b>Nb</b> 92,91 Nióbio	42 <b>Mo</b> 95,94 Moibdênio	43 <b>Tc</b> (98) Tecnécio	44 <b>Ru</b> 101,07 Rutênio	45 <b>Rh</b> 102,91 Ródio	46 <b>Pd</b> 106,42 Paládio	47 <b>Ag</b> 107,87 Prata	48 <b>Cd</b> 112,41 Cádmio	49 <b>In</b> 114,82 Índio	50 <b>Sn</b> 118,71 Estanho	51 <b>Sb</b> 121,75 Antimônio	52 <b>Te</b> 127,60 Telúrio	53 <b>I</b> 126,90 Iodo	54 <b>Xe</b> 131,29 Xénon
6	55 <b>Cs</b> 132,91 Césio	56 <b>Ba</b> 137,33 Bário	57 <b>La</b> 138,91 Lantânio	72 <b>Hf</b> 178,49 Háfnio	73 <b>Ta</b> 180,95 Tântalo	74 <b>W</b> 183,84 Volfrâmio	75 <b>Re</b> 186,21 Rênio	76 <b>Os</b> 190,23 Ósmio	77 <b>Ir</b> 192,22 Írídio	78 <b>Pt</b> 195,08 Platina	79 <b>Au</b> 196,97 Ouro	80 <b>Hg</b> 200,59 Mercúrio	81 <b>Tl</b> 204,38 Tálio	82 <b>Pb</b> 207,20 Chumbo	83 <b>Bi</b> 208,98 Bismuto	84 <b>Po</b> (209) Polônio	85 <b>At</b> (210) Astató	86 <b>Rn</b> (222) Rádón
7	87 <b>Fr</b> (223) Frâncio	88 <b>Ra</b> (226) Rádio	89 <b>Ac</b> (227) Actínio	104 <b>Rf</b> (261) Rutherfordório	105 <b>Db</b> (262) Dúbnio	106 <b>Sg</b> (263) Seabórgio	107 <b>Bh</b> (264) Bóhrio	108 <b>Hs</b> (265) Hássio	109 <b>Mt</b> (268) Meitnério	110 <b>Uun</b> (269) Ununílio	111 <b>Uuu</b> (272) Ununúlio	112 <b>Uub</b> (277) Ununbório	113 <b>Uut</b> (284) Ununtrio	114 <b>Uuq</b> (285) Ununquádio	115 <b>Uup</b> (288) Ununpentório	116 <b>Uuh</b> (289) Ununhélio	118 <b>Uuo</b> (291) Ununóctio	
			58 <b>Ce</b> 140,12 Cério	59 <b>Pr</b> 140,91 Praseodímio	60 <b>Nd</b> 144,24 Neodímio	61 <b>Pm</b> (145) Promécio	62 <b>Sm</b> 150,36 Samário	63 <b>Eu</b> 151,96 Európio	64 <b>Gd</b> 157,25 Gadolínio	65 <b>Tb</b> 158,93 Térbio	66 <b>Dy</b> 162,50 Disprósio	67 <b>Ho</b> 164,93 Hólmio	68 <b>Er</b> 167,26 Érbio	69 <b>Tm</b> 168,93 Túlio	70 <b>Yb</b> 173,04 Ítérbio	71 <b>Lu</b> 174,97 Lutécio		
			90 <b>Th</b> 232,04 Tório	91 <b>Pa</b> 231,04 Protactínio	92 <b>U</b> 238,03 Urânio	93 <b>Np</b> (237) Neptúlio	94 <b>Pu</b> (244) Plutónio	95 <b>Am</b> (243) Americio	96 <b>Cm</b> (247) Cúrio	97 <b>Bk</b> (247) Berquélío	98 <b>Cf</b> (251) Califórnio	99 <b>Es</b> (252) Einsteinío	100 <b>Fm</b> (257) Férmio	101 <b>Md</b> (258) Mendelévio	102 <b>No</b> (259) Nobélio	103 <b>Lr</b> (262) Laurêncio		

## ANEXO 4 Tabelas de constantes

Constantes físicas	
Aceleração da gravidade	$g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$
Constante de gravitação universal	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Permitividade elétrica do vácuo $1 / (4\pi \epsilon_0)$	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ C}^2 \text{ m}^{-2}$ $k_0 = 9,0 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ T m A}^{-1}$ $\mu_0 / (4\pi) = 1,0 \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}$
Velocidade da luz no vácuo	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Carga elementar	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Massa do eletrão	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Massa do próton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Constante de Planck	$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$

Alguns dados astronómicos	
Raio médio da Terra	$6,37 \times 10^6 \text{ m}$
Raio médio da Lua	$1,74 \times 10^6 \text{ m}$
Raio médio do Sol	$6,96 \times 10^8 \text{ m}$
Massa volúmica média da Terra	$5,52 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Distância média Terra-Lua	$3,84 \times 10^8 \text{ m}$
Distância média Terra-Sol	$1,50 \times 10^{11} \text{ m}$
Massa da Terra	$5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Massa da Lua	$7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$
Massa do Sol	$1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Período de rotação da Terra	0,997 dias
Período de translação da Lua em volta da Terra	27,3 dias
Período de translação da Terra em volta do Sol	365,25 dias

Alguns dados relativos à água, ao ar e ao mercúrio	Valor em unidades SI
Massa volúmica da água (20 °C)	$999 \text{ kg m}^{-3}$
Massa volúmica do gelo (0 °C)	$917 \text{ kg m}^{-3}$
Massa volúmica do ar (PTN)	$1,293 \text{ kg m}^{-3}$
Massa volúmica do mercúrio (PTN)	$13\,595 \text{ kg m}^{-3}$

# RESPOSTAS

## 1. Mecânica

### 1.1 Cinemática e dinâmica da partícula a duas dimensões

#### 1.1.1 (pág. 64)

1. A-II. B-I. C-III. D-V. E-IV.

2. A distância à origem do referencial é igual ao módulo do vetor posição. É a posição 1, pois  $r_1 = 5$  m,  $r_2 = 4,5$  m e  $r_3 = 3$  m.

3. (C). Os deslocamentos são  $\Delta \vec{r}_1 = 300\vec{e}_y$ ,  $\Delta \vec{r}_2 = 400 \cos 45^\circ \vec{e}_x + 400 \sin 45^\circ \vec{e}_y$  e  $\Delta \vec{r}_3 = 500\vec{e}_x$ ; a soma é  $\Delta \vec{r} = (500 + 400 \cos 45^\circ)\vec{e}_x + (300 + 400 \sin 45^\circ)\vec{e}_y$ .

4. Distância percorrida:  $s = 15$  m.

Deslocamentos:  $\Delta \vec{r}_1 = 5 \cos 37^\circ \vec{e}_x + 5 \sin 37^\circ \vec{e}_y$  e  $\Delta \vec{r}_2 = -10 \cos 30^\circ \vec{e}_x + 10 \cos 60^\circ \vec{e}_y$ ; a soma é  $\Delta \vec{r} = -4,7\vec{e}_x + 8,0\vec{e}_y$  (m), por isso ficou a uma distância do ponto de partida igual a  $|\Delta \vec{r}| = 9,3$  m.

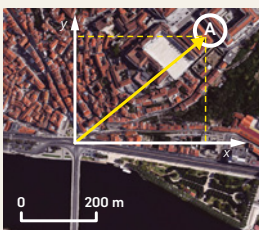
5. (A). A trajetória é retilínea.

6. a) I: em  $x$  é uniformemente variado (primeiro uniformemente retardado e depois uniformemente acelerado); em  $y$  é uniforme. II: em  $x$  é uniformemente variado (primeiro uniformemente retardado e depois uniformemente acelerado); em  $y$  é uniformemente variado (primeiro uniformemente retardado e depois uniformemente acelerado).

III: em  $x$  é acelerado; em  $y$  é uniformemente acelerado. b) (B): parábola com concavidade voltada para cima, com posição inicial positiva e com um mínimo correspondente à inversão de sentido.

c) (D). No intervalo de tempo considerado,  $x_{II}(t)$  toma valores negativos e nulos nos extremos do intervalo:  $x_{II}(0) = x_{II}(4) = 0$ . A variação de posição em  $y$  é dupla da variação de posição em  $x$ . Logo, o gráfico é linear. Ou: multiplicando a equação de  $x(t)$  por  $-2$  e somando membro a membro com a equação de  $y(t)$ , obtém-se a equação de uma reta:  $y - 2x = 6$  ou  $y = 2x + 6$ .

7. a) O vetor posição tem origem no largo e extremidade no edifício.



Na escala indicada obtém-se, aproximadamente,  $x = 347$  m e  $y = 293$  m, logo,  $\Delta \vec{r}_1 = 347\vec{e}_x + 293\vec{e}_y$ ; a distância

à origem é  $r = \sqrt{347^2 + 293^2} = 454$  m.

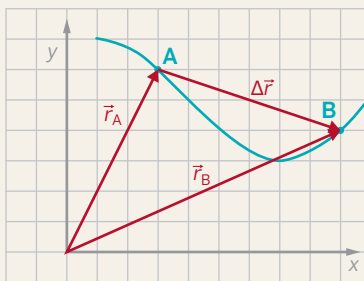
b) i) Movimento uniformemente acelerado em qualquer um dos eixos (velocidade e aceleração, em cada eixo, sempre do mesmo sinal). ii) Multiplicando a equação de  $y(t)$  por 2 e somando membro a membro com a equação de  $x(t)$ , obtém-se a equação

da trajetória:  $x + 2y = 150$  ou  $y = -\frac{x}{2} + 75$ ;

o automóvel descreve uma trajetória retilínea.

#### 1.1.2 (pág. 65)

8. a)



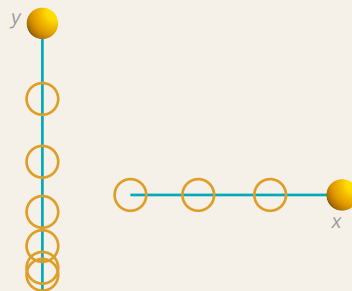
b)  $\vec{r}_A = 3\vec{e}_x + 6\vec{e}_y$  e  $\vec{r}_B = 9\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$ ;  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (9 - 3)\vec{e}_x + (4 - 6)\vec{e}_y = 6\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$ , tal como se representa na figura da alínea a).

c)  $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = 1,5\vec{e}_x - 0,5\vec{e}_y$  m s<sup>-1</sup>

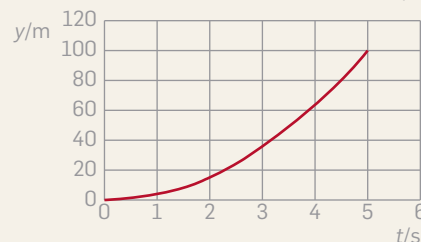
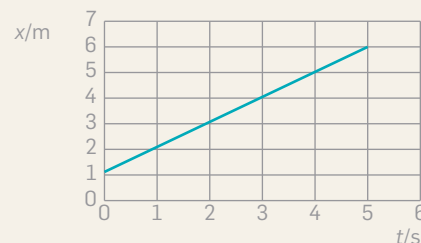
e  $v_m = \sqrt{1,5^2 + 0,5^2} = 1,6$  m s<sup>-1</sup>.

9. (B):  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (4t - 5)\vec{e}_x + (3t^2 - 6t)\vec{e}_y$  (SI).

10. a) Movimento uniforme segundo o eixo  $x$  e movimento uniformemente acelerado segundo o eixo  $y$ . Representação estroboscópica:



Gráficos posição-tempo:

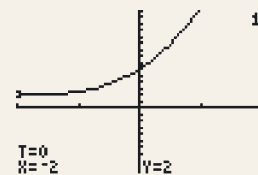


b) Parabólica: de  $x(t) = t + 1$ , resulta  $t = x - 1$ ; substituindo em  $y(t)$ , obtém-se  $y = 4x^2 - 8x + 4$ , que é a equação de uma parábola. c) Fazendo  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(2) - \vec{r}(0)$ , obtém-se  $\Delta \vec{r} = 2\vec{e}_x + 16\vec{e}_y$  (m). O módulo deste deslocamento é inferior à distância percorrida sobre a trajetória porque esta é curvilínea.

d) (A).  $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{2\vec{e}_x + 16\vec{e}_y}{2} = \vec{e}_x + 8\vec{e}_y$  (m s<sup>-1</sup>).

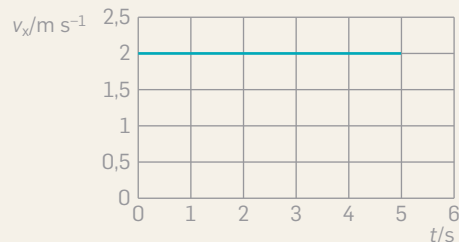
e) Tem-se, no SI,  $v_x = 1$  m s<sup>-1</sup> e  $v_y = 8t$ ;  $v_x(1) = 1$  m s<sup>-1</sup> e  $v_y(1) = 8$  m s<sup>-1</sup>, logo,  $v(1) = 8,1$  m s<sup>-1</sup>;  $v_x(3) = 1$  e  $v_y(3) = 24$ , logo,  $v(3) = 24$  m s<sup>-1</sup>. A velocidade é maior no instante 3 s. Como  $a_x = 0$  e  $a_y = 8$  m s<sup>-2</sup>, tem-se  $a = 8,0$  m s<sup>-2</sup> em qualquer instante.

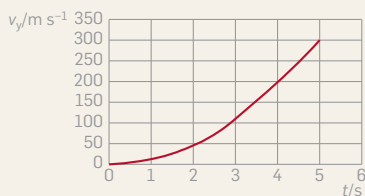
11. a)  $x = 2(t - 1)$ ,  $y = 4t^3 + 2$ .



b) (D). c)  $v_x = \frac{dx}{dt} = 2$  m s<sup>-1</sup> e  $v_y = \frac{dy}{dt} = 12t^2$  (SI).

O gráfico da função  $v_x(t)$  é uma reta horizontal com ordenada 2 e o gráfico de  $v_y(t)$  é uma parábola com origem (0, 0) e concavidade voltada para cima.





$v_x(0) = v_x(2) = 2 \text{ m s}^{-1}$  e  $v_y(0) = 0$   
e  $v_y(2) = 48 \text{ m s}^{-1}$ .

**d)** Muda mais depressa de posição no instante em que a velocidade for maior. Como  $v_x = 2 \text{ m s}^{-1}$  e  $v_y = 12 t^2 \text{ (SI)}$ , tem-se  $\vec{v}(0) = 2\vec{e}_x$ , ou seja,  $v(0) = 2 \text{ m s}^{-1}$ , e  $\vec{v}(2) = 2\vec{e}_x + 48\vec{e}_y$ , donde  $v(2) = 48 \text{ m s}^{-1}$ . Por isso, é aos 2 s.

**e)**  $\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(2) - \vec{v}(0)}{2} = 24\vec{e}_y \text{ m s}^{-2}$ .

**f)**  $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$  e  $a_y = \frac{dv_y}{dt} = 24t$ ; logo,

$\vec{a}(0) = \vec{0}$  e  $\vec{a}(2) = 48\vec{e}_y \text{ m s}^{-2}$ .

### 1.1.3 (pág. 66)

**12.** I-B, II-A, III-D, IV-C.

**13. a)** I-D, II-A, III-C, IV-B. (A velocidade é tangente à trajetória, anulando-se quando há inversão na trajetória; a aceleração aponta para o interior da curva).

**b)** Ponto D, pois o ângulo entre a velocidade e a aceleração é menor que  $90^\circ$ .

**14.** (A): movimento circular uniforme. (B): movimento circular uniforme. (C): nunca se verifica. (D): movimento uniformemente variado, com aceleração constante, quando há inversão de sentido. (E): qualquer movimento em que a aceleração é nula ou se anule (o corpo mantém a sua velocidade). (F): corpo em repouso num certo referencial. (G): movimento circular uniforme. (H): movimento circular uniforme. (I): movimento retilíneo acelerado ou retardado. (J): qualquer movimento, retilíneo ou curvilíneo, com aceleração.

**15.** (A):  $a_t = 0$ ,  $a_n = 0$ . (B):  $a_t = 0$ ,  $a_n \neq 0$  (velocidade perpendicular à aceleração). (C):  $a_t \neq 0$ ,  $a_n \neq 0$  (a velocidade faz um ângulo obtuso com a aceleração). (D):  $a_t \neq 0$ ,  $a_n \neq 0$  (a velocidade faz um ângulo obtuso com a aceleração quando a bailarina trava e um ângulo agudo quando ela aumenta o módulo da sua velocidade).

**16.** (A). Como  $a_n = \frac{v^2}{r}$ , no segundo caso há maior aceleração e, portanto, maior desconforto. (B). O desconforto será maior no caso da curva de menor raio ( $r_2$ ), pois a aceleração centrípeta será maior.

**17. a)**  $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{5^2}{80} = 0,31 \text{ m s}^{-2}$ . **b)** (C). Da figura conclui-se que  $a_n = a \cos 30^\circ = a \sin 60^\circ$ , pelo que  $a = \frac{v^2}{r \sin 60^\circ}$ .

**c)** A aceleração tangencial é

$$a_t = a \cos 60^\circ = \frac{v^2}{r \sin 60^\circ} \cos 60^\circ = 0,18 \text{ m s}^{-2}$$

O módulo da velocidade varia  $0,18 \text{ m s}^{-1}$  em cada segundo.

**18. a)**  $s = 2 \times 2 \pi R = 31,4 \text{ m}$ . **b)** (D). As posições inicial e final coincidem, pelo que o deslocamento é nulo. **c)** Módulo da

velocidade:  $v = \frac{31,4}{20,0} = 1,57 \text{ m s}^{-1}$ ; módulo

da aceleração:  $a = a_c = \frac{v^2}{r} = 0,986 \text{ m s}^{-2}$ ;

módulo da força resultante:  $F = ma = 39,4 \text{ N}$ . A força e a aceleração têm a mesma direção e sentido, apontando para o centro da trajetória, e são perpendiculares, em cada instante, à velocidade, que é sempre tangente à trajetória em cada ponto.

**19. a)** Para qualquer instante, e no SI:

$\vec{v}(t) = \vec{e}_x + 8t^2\vec{e}_y$  e  $\vec{a}(t) = 16t\vec{e}_y$ . Portanto,

$\vec{v}(1) = \vec{e}_x + 8\vec{e}_y \text{ (m s}^{-1}\text{)}$  e  $\vec{a}(1) = 16\vec{e}_y \text{ (m s}^{-2}\text{)}$ .

O produto escalar dos dois vetores é  $\vec{v}(1) \cdot \vec{a}(1) = 128 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ . Os módulos da velocidade e da aceleração são, respetivamente,  $v(1) = \sqrt{65} \text{ m s}^{-1}$  e  $a(1) = 16 \text{ m s}^{-2}$ .

Como  $\vec{v}(1) \cdot \vec{a}(1) = v(1) a(1) \cos \alpha$ , sendo  $\alpha$  o ângulo entre os dois vetores, podemos

concluir que  $\cos \alpha = \frac{128}{4 \sqrt{65}}$  e  $\alpha = 7,1^\circ$ .

(Ou, como a aceleração tem a direção e sentido do eixo  $y$ , e o ângulo que a velocidade faz com o eixo dos  $y$  calcula-se a partir de  $\tan \alpha = \frac{1}{8}$ , conclui-se que  $\alpha = 7,1^\circ$ ).

**b)** A aceleração tangencial é  $a_t = \frac{dv}{dt}$ ,

sendo  $v = \sqrt{1 + 64t^4}$ ,

pelo que  $a_t = \frac{4 \times 64t^3}{2\sqrt{1 + 64t^4}} = \frac{128t^3}{\sqrt{1 + 64t^4}}$

e  $a_t(1) = 15,9 \text{ m s}^{-2}$ . Como  $a^2 = a_n^2 + a_t^2$ , a

aceleração normal é  $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = 1,98 \text{ m s}^{-2}$ . Então  $\vec{a}(1) = 16\vec{e}_t + 1,8\vec{e}_n \text{ m s}^{-2}$ . Ou: a componente tangencial da aceleração é a sua projeção na direção da velocidade,  $a_t = a \cos 7,1^\circ = 15,9 \text{ m s}^{-2}$ , e a componente normal é  $a_n = a \sin 7,1^\circ = 1,98 \text{ m s}^{-2}$ .

**c)** Como  $a_n = \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{v^2}{a_n}$ , logo,

$r(1) = \frac{65}{15,9} = 4,1 \text{ m}$ .

### 1.1.4 (pág. 67)

**20.** (A) Falsa. A componente centrípeta existe sempre que a velocidade muda de direção. (B) Falsa. A componente tangencial pode existir qualquer que seja a trajetória (retilínea ou curvilínea) desde que varie o módulo da velocidade. (C) Falsa. A componente centrípeta aponta sempre para dentro da curva e a componente tangencial tem a direção da velocidade, mas pode ter o mesmo sentido (movimento acelerado) ou sentido oposto (movimento retardado).

**21.** (A). A aceleração tangencial é

constante e igual a  $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20}{10} = 2,0 \text{ m s}^{-2}$

e  $a_n = \frac{20^2}{100} = 4,0 \text{ m s}^{-2}$ .

As respetivas componentes da força obtêm-se multiplicando estes valores pela massa do automóvel.

**22.** A aceleração tangencial é  $a_t = 0,60 \text{ m s}^{-2}$

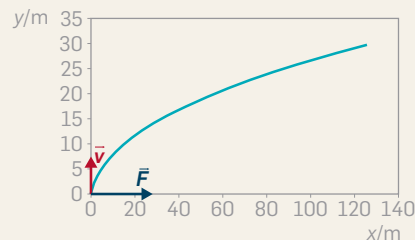
e a normal é  $a_n = \frac{10^2}{8,0} = 12,5 \text{ m s}^{-2}$ . Logo,

$\vec{a} = 0,6\vec{e}_t + 12,5\vec{e}_n \text{ (m s}^{-2}\text{)}$ . A força,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , é  $\vec{F} = 5,4 \times 10^2\vec{e}_t + 1,1 \times 10^4\vec{e}_n \text{ (N)}$ .

### 1.1.5 (pág. 68)

**23. a)** Condições iniciais:  $x_0 = 0,3 \text{ m}$ ,  $y_0 = 0 \text{ m}$ ,  $v_{0x} = 0$  e  $v_{0y} = 3,0 \text{ m s}^{-1}$ . Como  $F_x = 0,5 \text{ N}$  e  $F_y = 0 \text{ N}$ , então  $a_x = 2,5 \text{ m s}^{-2}$  e  $a_y = 0 \text{ m s}^{-2}$ . Logo,  $x = 0,3 + 1,25t^2$  e  $y = 3,0t$ .

**b)** A trajetória é parabólica tal como se representa na figura para os primeiros 10 s. Indica-se a velocidade inicial e a força que atua no carrinho.



**c)** Como  $v_x = 2,5t$  e  $v_y = 3,0 \text{ m s}^{-1}$ , então

$v = \sqrt{(2,5t)^2 + 9}$  (SI). **d)** **i.** O módulo da velocidade varia mais rapidamente onde for maior a aceleração tangencial; como

$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2 \times 2,5t \times 2,5}{2\sqrt{(2,5t)^2 + 9}} = \frac{2,5^2 t}{\sqrt{(2,5t)^2 + 9}}$ ,

então  $a_t(2) = 2,14 \text{ m s}^{-2}$  e  $a_t(5) = 2,43 \text{ m s}^{-2}$ ,

é no instante  $t = 5 \text{ s}$ . **ii.** A velocidade varia mais rapidamente em direção onde a aceleração centrípeta for maior; como

$a = 2,5 \text{ m s}^{-2}$  e  $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$ , então

$a_n(2) = 1,29 \text{ m s}^{-2}$  e  $a_n(5) = 0,59 \text{ m s}^{-2}$ , logo,

é no instante  $t = 2 \text{ s}$ . **iii.** O raio de curvatura é  $R(2) = \frac{5,83^2}{1,29} = 26 \text{ m}$  e  $R(5) = \frac{12,85^2}{0,59} = 280 \text{ m}$ ,

ou seja, é maior para  $t = 2 \text{ s}$ .

**24.** As equações paramétricas, num referencial convencional ligado ao solo, são:  $x = 40t$  e  $y = 100 - 5t^2$  e a equação

da trajetória parabólica é  $y = 100 - 5 \left(\frac{x}{40}\right)^2$ .

Quando atinge o solo,  $y = 0$  e  $t = 4,5 \text{ s}$ ; logo,  $x = 180 \text{ m}$ , ficando, pois, a  $20 \text{ m}$  do ponto pretendido.

**25.** (B). Pela conservação da energia mecânica, o módulo das quatro velocidades representadas tem de ser o mesmo, pois está-se sempre ao mesmo nível relativamente aos lançamentos feitos com velocidades de módulo igual.



**26. a)** As equações paramétricas, num referencial convencional ligado ao solo, são:  $x = v_0 t$  e  $y = 20,0 - 5t^2$ , por isso, a trajetória é parabólica. **b)** Quando  $y = 0$ , tem-se  $t = 2,0$  s. Como  $x = 5,0$  m, obtém-se  $v_0 = 2,5 \text{ m s}^{-1}$  e  $x = 2,5t$ . Se  $v_x = 2,5 \text{ m s}^{-1}$  e  $v_y = 1,0t$  (SI), então  $\vec{v}(2) = 2,5\vec{e}_x - 20\vec{e}_y$  ( $\text{m s}^{-1}$ ) e  $v(2) = 20 \text{ m s}^{-1}$ . **c)** Quando  $y = 10,0$  m, tem-se  $t = \sqrt{2} = 1,41$  s. Como

$v = \sqrt{2,5^2 + 100t^2}$ , vem  $v(1,41) = 14,4 \text{ m s}^{-1}$ ; sendo

$$a_t(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{2 \times 100t}{2\sqrt{2,5^2 + 100t^2}} = \frac{100t}{\sqrt{2,5^2 + 100t^2}}$$

logo,  $a_t(1,41) = 9,85 \text{ m s}^{-2}$ . A aceleração normal é  $a_n(1,41) = \sqrt{10^2 - 9,85^2} = 1,74 \text{ m s}^{-2}$ .

Portanto,  $R = \frac{v^2}{a_n} = 118 \text{ m}$ . Ou: quando

$y = 10$  m, tem-se  $t = 1,41$  s; a aceleração tem a direção vertical e o ângulo que a velocidade faz com a direção vertical calcula-se por  $\tan \alpha = \frac{v_x}{v_y} = \frac{2,5}{14,1}$ , logo

$\alpha = 10^\circ$ ; a componente tangencial da aceleração é a sua projeção na direção da velocidade,  $a_t = a \cos 10^\circ = 9,85 \text{ m s}^{-2}$ ; a componente normal é  $a_n = a \sin 10^\circ = 1,74 \text{ m s}^{-2}$ ,

logo,  $R = \frac{v^2}{a_n} = 118 \text{ m}$ . **d)** O mesmo tempo,

pois o movimento segundo a vertical seria exatamente o mesmo.

**27. a)** (C). **b)** (C). **c)** (C).

**28. a)** Equações paramétricas num referencial convencional ligado ao solo:  $x = 11 \cos 20^\circ t$  e  $y = 11 \sin 20^\circ t - 5t^2$ ; equações para a velocidade:  $v_x = 11 \cos 20^\circ$  e  $v_y = 11 \sin 20^\circ - 10t$ . Fazendo  $y = 0$ , obtemos o tempo de voo,  $t = 0,75$  s e o alcance é  $x = 7,8$  m. **b)** O tempo de subida é metade do tempo de voo, logo,  $y_{\text{máx}} = 0,71\text{m}$ ;  $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$  e  $v_y = 0$ , logo,  $\vec{v} = 10\vec{e}_x$  ( $\text{m s}^{-1}$ ).

**29. a)** As equações paramétricas, num referencial convencional ligado ao solo, são  $x = 20 \cos 53^\circ t$  e  $y = 20 \sin 53^\circ t - 5t^2$ . Para atingir o muro, tem de ser  $x = 36$  m; neste caso obtém-se  $t = 2,99$  s e  $y = 3,50$  m, por isso, passa por cima do muro. Para saber se é na subida ou descida, podemos, por exemplo, ver o sinal de  $v_y$  naquele instante:  $v_y(2,99) = 20 \sin 53^\circ - 10 \times 2,99 = -13,9 \text{ m s}^{-1}$ ; como é negativo, está a descer. Ou podemos determinar o tempo de subida,  $v_y = 0$ , o que ocorre para  $t = 1,6$  s, sendo este tempo inferior ao anterior. **b)** Se a força exercida pelo ar não for desprezável, este já não descreverá rigorosamente uma parábola. Por isso, pode ou não passar por cima do muro, dependendo da orientação do vento. **c)** Neste caso, as equações paramétricas são

$x = 10 \cos 32^\circ t$  e  $y = 0,40 + 10 \sin 32^\circ t - 5t^2$ . Para atingir o muro, tem de ser  $x = 36$  m, obtendo-se  $t = 4,24$  s e  $y = -67$  m, o que

significa que o alcance do projétil é inferior à distância ao muro (também fazendo  $y = 0$  se verifica que o tempo de voo é 1,1 s, ou seja, menor do que 4,24 s).

**30.** As equações paramétricas, num referencial convencional ligado à prancha, são  $x = v_0 \sin 14^\circ t$  e  $y = v_0 \cos 14^\circ t - 5t^2$ . Quando a altura máxima é atingida,  $v_y = 0$ , ou  $v_0 \cos 14^\circ - 10t = 0$  e, nesse instante,  $y = 1,3$  m. Resolvendo o sistema, obtém-se  $v_0 = 5,26 \text{ m s}^{-1}$  e  $t = 0,51$  s. Quando volta a passar pela prancha passou o dobro do tempo e  $x = 1,3$  m, que é superior a 1,0 m; por isso, o salto é seguro.

**31.** (A). Se a velocidade inicial for igual em módulo e os ângulos de lançamento forem complementares, o alcance, dado por

$$A = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

(A), os módulos das velocidades são iguais:

$v_{0A} = v_{0B} = 10 \text{ m s}^{-1}$ . Os ângulos de lançamento, dados por  $\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$ , são

complementares:  $\theta_A = 36,9^\circ$  e  $\theta_B = 53,1^\circ$ .

**32.** (B). O tempo de voo é  $t_{\text{voo}} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$ .

Como  $\theta_A > \theta_B$ , então terá de ser  $t_{\text{voo,A}} > t_{\text{voo,B}}$ .

**33.** (B). Pode demonstrar-se que o alcance é dado por  $A = \frac{2v_{0x} v_{0y}}{g}$ , o tempo de voo por

$$t_{\text{voo}} = \frac{2v_{0y}}{g}$$

e a altura máxima por  $y_{\text{máx}} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$ . Portanto, atendendo, aos valores das componentes escalares da velocidade, vem: para a altura máxima,  $y_{\text{máx,C}} > y_{\text{máx,A}} > y_{\text{máx,B}}$ ; para o tempo de voo,  $t_{\text{voo,C}} > t_{\text{voo,A}} > t_{\text{voo,B}}$ ; para o alcance,  $A_A = A_B = A_C$ .

**34.** (A). A força resultante é  $\vec{F}_R = \vec{P} + \vec{F}$ ; a sua componente segundo  $y$  é nula, pois  $F_y = -0,25 \times 10 + 2,5 = 0$ . Logo, o movimento segundo  $y$  é uniforme, ou seja, mantém-se a velocidade inicial,  $v_y = -2,5 \text{ m s}^{-1}$ , que é igual ao declive da reta do gráfico A.

**35. a)** (A). O módulo da velocidade primeiro decresce (até ao ponto de altura máxima) e depois aumenta, sem nunca se anular.

**b)** (D). Inicialmente, a aceleração tangencial é negativa (o vetor tem sentido oposto ao da velocidade e o módulo da velocidade diminui), anula-se no ponto de altura máxima, e depois passa a positiva e aumenta à medida que a velocidade cresce em módulo (o vetor tem o sentido da velocidade).

### 1.1.6 (pág. 70)

**36. a)** (C). Só atuam o peso e a força normal. O peso aponta para baixo e a força normal é perpendicular à calha (inclinada relativamente ao plano horizontal). **b)** A questão pode ser resolvida mais facilmente considerando a energia. A conservação da

energia mecânica permite escrever

$$\frac{1}{2} mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2} mv_f^2 + mgh_f$$

donde  $\Delta h = h_f - h_i = \frac{v_i^2 - v_f^2}{2g}$ . Introduzindo os dados,

obtém-se 9,4 cm. A inclinação do plano

é tal que  $\tan \theta = \frac{9,4}{150}$ , de onde se conclui que  $\theta = 3,6^\circ$ .

**37.** A Segunda Lei de Newton, aplicada a 1 e 2, permite escrever  $T = m_1 a$  e  $m_2 g - T = m_2 a$ , respetivamente. Resolvendo o sistema, obtém-se  $a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$ . Como

$\frac{m_2}{m_1 + m_2} < 1$ , então  $a < g$ . Ou: a resultante

das forças sobre os dois blocos é o peso do bloco B; como a massa do conjunto é maior do que a do bloco B, a aceleração é menor do que a gravítica.

**38. a)** O corpo B puxa o outro no sentido do seu peso, com  $P_B = 3,00$  N, e o corpo A puxa o B no sentido da componente do seu peso na direção do plano,  $P_{Ax} = 5,00 \sin 20^\circ = 1,7$  N. Como  $P_B > P_{Ax}$ , B desce e A sobe. **b)** As

tensões são iguais em módulo ( $T_1 = T_2 = T$ ) e as acelerações são iguais em módulo ( $a_1 = a_2 = a$ ), tal como as velocidades.

A Segunda Lei de Newton permite escrever:  $P_B - T = m_B a$  para B;  $T - P_A \sin 20^\circ = m_A a$  e  $N = P_A \cos 20^\circ$  para A. O sistema de equações conduz a  $a = 1,625 \text{ m s}^{-2}$  e  $T = 2,51$  N. Logo,  $v = at = 3,25 \text{ m s}^{-1}$ , que é igual para A e B. **c)**  $T = 2,51$  N, tal como se calculou em b).

**39. a)** Sobre o bloco 1 atuam o peso, a força normal e a tensão ( $\vec{T}_1$ ) e sobre o bloco 2 atuam o peso, a força normal e a tensão ( $\vec{T}_2$ ). As tensões são iguais em módulo.

A componente do peso na direção da linha de maior declive de cada plano inclinado é maior em 1 do que em 2:  $P \sin 60^\circ > P \sin 30^\circ$ . Logo, o bloco 1 desce e o bloco 2 sobe, com aceleração de igual módulo e movimento uniformemente acelerado. A Segunda Lei permite escrever, para 1 e 2:

$$P \sin 60^\circ - T = ma \text{ e } T - P \sin 30^\circ = ma$$

logo,  $a = 0,183 g$ . **b) i)** (D). Quando se corta o fio, os blocos descem os planos com

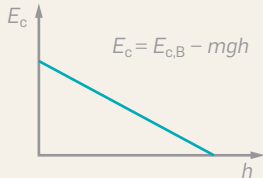
acelerações diferentes:  $a_1 = g \sin 60^\circ$  e  $a_2 = g \sin 30^\circ$ . Pela Lei de Conservação de Energia Mecânica, e como partem da mesma altura ao solo, têm de chegar com velocidades iguais em módulo. **ii)** (A).

Como  $v = at$  e  $v_1 = v_2$ , a razão dos tempos

$$\text{de descida é } \frac{t_1}{t_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}.$$

**40.** (A). Só há componente tangencial da força resultante: a componente centrípeta é nula, pois a velocidade é nula na altura máxima. Para os outros pontos, a resultante aponta para o interior da curva.

**41. a)** (B). Como  $a_c = \frac{v^2}{R}$ , em B a velocidade é máxima e em A e C é nula. **b)** Há conservação da energia mecânica que é, no ponto B, igual à energia cinética,  $E_{c,b}$ . Num ponto qualquer entre B e C, tem-se:  $E_c + E_p = E_{c,B} \Rightarrow E_c + mgh = E_{c,B}$  ou  $E_c = E_{c,B} - mgh$ , sendo  $h$  a altura relativamente ao nível de B (ver figura). O gráfico é uma reta como mostra a figura: a energia cinética diminui de um máximo, no ponto B, até se anular na altura máxima.



**42.** As equações para o movimento são  $T \sin \theta = \frac{mv^2}{R}$  e  $T \cos \theta = mg$ , sendo  $\theta$  o ângulo do fio com a vertical e  $R = L \sin \theta$ , com  $L$  o comprimento do fio. **A.** Verdadeira, pois, como o módulo da velocidade é constante, só há componente normal da força resultante. **B.** Verdadeira, pois das duas primeiras equações,  $v = \sqrt{Rg \tan \theta}$ . **C.** Verdadeira, porque a expressão anterior também se escreve  $v = \sqrt{Lg \sin \theta \tan \theta}$ . **D.** Verdadeira, porque  $v = \omega R$  e a expressão da velocidade também se pode escrever  $\omega R = \sqrt{Rg \tan \theta}$ , ou seja,  $\omega = \sqrt{\frac{g \tan \theta}{R}}$  ou  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L \cos \theta}}$ ; quando  $\theta$  aumenta,  $\cos \theta$  diminui e a velocidade angular aumenta. **E.** Verdadeira, pois nesse caso a equação  $T \cos \theta = mg$  seria impossível, ou seja, não haveria uma componente vertical da tensão que anulasse o peso.

**43. a)** (D). A resultante das duas forças que atuam no automóvel, peso e força normal, é a componente centrípeta da força resultante:  $P - N = ma_c \Rightarrow N = mg - m \frac{v^2}{R}$ . **b)** (A). A velocidade que, no limite, ainda garante contacto do automóvel com a estrada corresponde a  $N = 0$ . Para velocidades superiores, o automóvel perde o contacto com a estrada. Fazendo  $N = 0$  na expressão da alínea a), obtém-se  $v = \sqrt{gr}$ .

**44. a)** A perda de contacto poderia ocorrer no ponto L se a força normal se anulasse. De  $P - N = m \frac{v^2}{R}$ , concluiu-se que  $N = mg - m \frac{v^2}{R} = 160 \times \left(10 - \frac{5^2}{40}\right) > 0$ , ou seja, não é nula. **b)** Ponto M:  $N' - P = m \frac{v'^2}{R}$  e  $N' = 160 \times \left(10 + \frac{15^2}{80}\right) = 2,05 \times 10^3$  N.

**45.** No ponto mais baixo tem-se  $N - P = \frac{mv^2}{R}$ , ou seja,  $N = P + \frac{mv^2}{R}$  e, no ponto mais alto,  $P - N = \frac{mv^2}{R}$ , ou seja,  $N = P - \frac{mv^2}{R}$ : a força normal tem menor intensidade no ponto mais alto. Essa força e a força que atua na balança formam um par ação-reação, pelo que esta indica a intensidade da força normal. **46.** A-II. B-IV. C-V. D-III. E-I.

### 1.1.7 (pág. 72)

**47. (A)** Falsa. A força de atrito estático que atua num objeto pontual só existe, como o próprio nome sugere, se este estiver em repouso. **(B)** Falsa. Pode existir em situação de repouso se o corpo estiver a ser solicitado a mover-se por outras forças. **(C)** Falsa. As forças de atrito estático podem ter módulo entre zero e um valor máximo dado pelo produto do coeficiente de atrito estático pelo módulo da força normal. **(D)** Verdadeira. (Ver justificação anterior.) **(E)** Falsa. As forças de atrito não dependem da área de contacto aparente.

**48. (A)** Na direção vertical atuam o peso, a força normal e a componente da força:  $N - P + F \sin \theta = 0$ , logo,  $N = mg - F \sin \theta$ . O movimento é uniforme porque a força de atrito anula a componente da força na direção horizontal.

**49. (D)**. A intensidade das forças de atrito não depende da área de contacto.

**50. a)** (D). Não havendo força a solicitar o movimento do corpo, não existe força de atrito. **b)** (A). A força de atrito estático máxima é 8 N e, neste caso, tem intensidade igual à da força aplicada. **c)** (C) Como a força tem intensidade superior à força de atrito estático máxima, o corpo entra em movimento e o atrito é cinético, sendo a força de atrito cinético 6 N.

**51. (B)**. A resultante das forças é nula; assim,  $F - P \sin \theta - F_a = 0$  ou  $F_a = F - mg \sin \theta = F - 0,50$  mg.

**52.** Como  $-F_a = ma$  e  $N = mg$ , obtém-se  $a = -\mu g$ . Pelas equações do movimento, obtém-se a distância de travagem:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}(-\mu g)t^2 \text{ e } 0 = v_0 + (-\mu g)t, \text{ donde}$$

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu g}; \text{ num dia húmido o coeficiente}$$

de atrito é seis vezes menor, por isso a distância percorrida é seis vezes maior: 252 m (piso molhado) e 42 m (piso seco).

**53. (D)**. Estando o bloco em repouso, tem-se  $F_a = P$  e  $F = N$ . A força de atrito estático é máxima quando a força de compressão tiver intensidade mínima que ainda

mantém o corpo em repouso. Como  $F_a^{\max} = \mu N$ , então  $\mu N = P$  ou  $\mu F = P$ , logo,  $F = \frac{P}{\mu} > P$ , pois  $\mu < 1$ .

**54.** Para o bloco não deslizar em relação à carrinha tem de ter a aceleração dela. A força que o mantém em repouso é a força de atrito, que aponta no sentido do movimento da carrinha, pois impede o bloco de se mover em sentido contrário. Por isso,  $F_a = ma$ . Como  $F_a^{\max} = \mu N$  e  $N = mg$ , então  $a = \mu g$ . Logo, o coeficiente de atrito mínimo é  $\mu = a / g$ .

### 1.1.8 (pág. 73)

**55. a)** Havendo conservação de energia mecânica, o módulo da velocidade em C deveria ser o mesmo do que em A, e é menor:  $v_c < v_A$ . Relativamente ao ponto B, no caso de haver conservação de energia mecânica,

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B'^2 \Rightarrow v_B' = \sqrt{v_A^2 + 2gh} = 28,4 \text{ m s}^{-1}. \text{ Ora, a velocidade real é } 28,2 \text{ m s}^{-1} \text{ pelo que há atrito entre A e B.}$$

**b)** Ponto B:

$$N_B - P = m \frac{v_B^2}{r_B}; N_B = m \left( g + \frac{v_B^2}{r_B} \right) = 32,1m \approx 3,2P.$$

Ponto C:

$$P - N_C = m \frac{v_C^2}{r_C}; N_C = m \left( g - \frac{v_C^2}{r_C} \right) = 9,9m \approx 0,99P.$$

**56. a)** (A). A componente tangencial da aceleração é máxima nas posições extremas e anula-se em L, onde o módulo da velocidade é máximo.

**b)** (C). Conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v^2 = 2g \frac{l}{4} = \frac{1}{2}gl.$$

**c)** (B). Na alínea anterior viu-se que  $v^2 = \frac{1}{2}gl$  para a posição L, e o raio é  $l$ . Como

$$T - mg = \frac{v^2}{r} \Rightarrow T = \frac{3}{2}mg. \text{ Na posição}$$

extrema, a componente do peso na direção do fio anula a componente da tensão:

$$T = P \cos \theta. \text{ Por outro lado, } \cos \theta = \frac{l - \frac{\ell}{4}}{\ell} = \frac{3}{4}. \text{ Portanto, em K, } T = \frac{3}{4}mg.$$

**57. a)** (D). Em H, a velocidade tem de ser tal que garanta que  $N > 0$ . No ponto H tem-se  $mg + N = m \frac{v^2}{r}$  ou  $N = m \frac{v^2}{r} - mg$ ; como  $N > 0$ , vem  $m \frac{v^2}{r} \geq mg \Rightarrow v^2 \geq gr$ .

A velocidade mínima é  $v_{\min} = \sqrt{gr}$ .

A conservação da energia mecânica permite escrever  $mgh = \frac{1}{2}mv_{\min}^2 + mg2r \Rightarrow h = \frac{5}{2}r$ .

**b) i)** (A). Como  $a_c = \frac{v^2}{r}$  e, da conservação da energia mecânica,  $mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gh$ , obtém-se  $a_c = \frac{2gh}{r}$ . **ii)** (A) e (C).

**58. a)** (B). A tensão no fio é tal que

$$T - mg \cos 30^\circ = m \frac{v_B^2}{r_B} \text{ ou}$$

$$T = mg \cos 30^\circ + 2,5 m v_B^2 \text{ (SI), pois}$$

$r = 0,4 \text{ m}$ . **b)** No ponto C,  $P + N = \frac{v^2}{r_B}$  e, como

a velocidade mínima em C corresponde a  $N = 0$ , obtém-se  $v_c = \sqrt{rg}$ . A conservação da energia mecânica permite escrever

$$\frac{1}{2}mv_c^2 + mg2r = \frac{1}{2}mv_A^2 \text{ ou } \frac{1}{2}rg + 2rg = \frac{1}{2}v_A^2$$

ou  $v_A = \sqrt{5rg}$ , obtendo-se  $v_A = 4,5 \text{ m s}^{-1}$ .

**c)** Nesse percurso, a resultante das forças é a força de atrito. Aplicando o teorema da energia cinética, vem

$$0 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \mu_c Nd \cos 180^\circ \text{ e, como}$$

$$N = mg, \text{ obtém-se } d = \frac{v_A^2}{2g\mu_c} = 2,5 \text{ m.}$$

**59. a)** A resultante das forças é igual à sua componente centrípeta:

$$N - P = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow 3P - P = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{2gR},$$

obtendo-se  $v = 3,2 \text{ m s}^{-1}$ . **b)** Pela conservação da energia mecânica, no ponto mais alto a

$$\text{velocidade é: } \frac{1}{2}mv^2 + mg2r = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 =$$

$v^2 - 4gr$ . Neste caso,  $v^2 = 2gr - 4gr < 0$ , que é uma condição impossível, logo, não chega ao topo. Ou: no ponto mais alto o corpo perde o contacto se  $N = 0$ , ou seja,

$$N + mg = m \frac{v'^2}{r} \Rightarrow v' = \sqrt{gr}; \text{ aplicando a}$$

conservação da energia para este valor limite, e, como  $v = \sqrt{2gR}$ , obtém-se

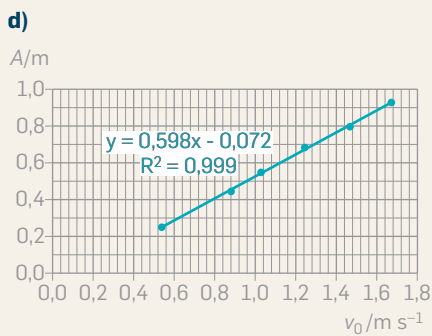
$$\frac{1}{2}mv^2 + mg2r = \frac{1}{2}mvr \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{3}{2}mgr,$$

que é uma equação impossível.

### Atividades laboratoriais (pág. 74)

**60. a)**  $(24,75 \pm 0,05) \text{ mm}$ . Como a régua principal está graduada em milímetros (menor divisão da escala) e como o nónio tem 20 divisões, estabelece-se como incerteza de leitura o quociente entre a menor divisão da escala principal pelo número de divisões do nónio. Neste caso é  $1\text{mm}/20 = 0,05 \text{ mm}$ . **b)** Fazendo a média dos três valores, encontra-se  $14,774 \text{ ms}$ ; o módulo do maior dos desvios é  $0,095 \text{ ms}$ . Portanto,  $t = 14,774 \times 10^{-3} \text{ s} \pm 0,64\%$ .

$$\text{c) } v_0 = \frac{24,75 \times 10^{-3}}{14,774 \times 10^{-3}} = 1,675 \text{ m s}^{-1}.$$



**i)** Como o objeto é lançado sempre da mesma altura  $h$ , o tempo de voo é o mesmo para todos os lançamentos:

$$\text{de } y = h - \frac{1}{2}gt^2 \text{ e } y = 0 \text{ resulta } t_{\text{voo}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Substituindo em  $x = v_0 t$ , o alcance é

$$A = \sqrt{\frac{2h}{g}} v_0; \text{ há uma proporcionalidade}$$

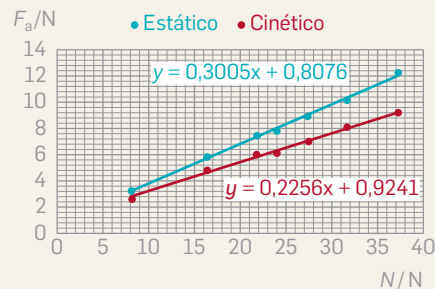
direta entre o alcance e o módulo da velocidade inicial, o que é evidenciado no gráfico obtido experimentalmente. Usando

$$\text{o declive da reta, tem-se } 0,598 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

obtendo-se  $h = 1,75 \text{ m}$ . Este valor tem um ligeiro desvio percentual relativamente ao medido em 1,7%. **ii)** Extrapolando a equação  $A \approx 0,598 v_0$  para a velocidade  $2,0 \text{ m s}^{-1}$ , obtém-se  $A = 1,2 \text{ m}$ .

**61. a) i)** A força de atrito estático tem uma intensidade igual à da força exercida e aumenta até um valor máximo que corresponde ao início do movimento do corpo. A força de atrito cinético é aproximadamente constante. **ii)** A força de atrito estático é igual à medida pelo sensor enquanto o corpo permanece em repouso. O seu valor máximo determina-se a partir do máximo da força medida, que é, aproximadamente, 8,0 N. A força de atrito cinético é também igual à força medida pelo sensor (desde que o corpo permaneça em movimento com velocidade constante). Como existem pequenas oscilações na medida da força, a força de atrito cinético pode determinar-se calculando o valor médio para o intervalo de tempo de movimento com velocidade constante; neste caso é, aproximadamente, 5,0 N. **iii)** É mais fácil mantê-lo em movimento, pois a força de atrito cinético é menor do que a força de atrito estático máxima.

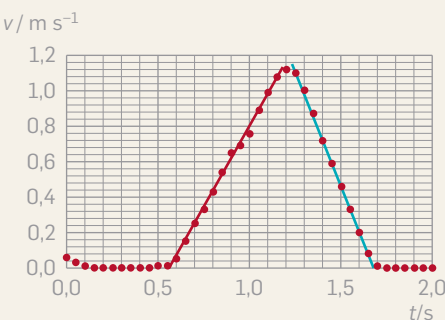
**b)**  $F_{\text{ae,máx}} = \mu_e N$  e  $F_{\text{ac}} = \mu_c N$ . A força normal é  $N = gm$ . O gráfico mostra as forças de atrito em função do módulo da normal. Em ambos os casos há uma dependência linear, sendo os declives das retas os coeficientes de atrito. Obtém-se  $\mu_e = 0,30$  e  $\mu_c = 0,23$ .



**c)** Como  $\mu_e = \tan \theta$ , vem  $\theta = \tan^{-1} \mu_e = 16,8^\circ$ .

**d)** Inicialmente permanece em repouso até a força de atrito estático atingir um valor máximo, pois a tensão exercida pelo fio vai aumentando. A partir de uma certa massa suspensa, o bloco entra em movimento.

**e)** O gráfico mostra as retas de ajuste aos pontos experimentais.



Quando a velocidade aumenta, o declive da reta é  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1,08 - 0}{1,15 - 0,55} = 1,80 \text{ m s}^{-2}$ .

Quando a velocidade diminui, o declive é

$$a' = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,20 - 0,72}{1,6 - 1,4} = -2,60 \text{ m s}^{-2}.$$

No movimento retardado tem-se  $-F_a = m_{\text{bloco}} a'$  ou  $-\mu m_{\text{bloco}} g = m_{\text{bloco}} a'$ , donde

$$\mu_c = -\frac{a'}{g}. \text{ Introduzindo o valor experimental,}$$

obtém-se  $\mu_c = 0,27$ . No movimento uniformemente acelerado tem-se, para o bloco,  $T - \mu_c m_{\text{bloco}} g = m_{\text{bloco}} a$  e, para o corpo suspenso,  $mg - T = ma$  ( $m$  é a massa do corpo suspenso). As duas equações permitem concluir que

$$mg - ma - \mu_c m_{\text{bloco}} g = m_{\text{bloco}} a \text{ e, portanto,}$$

$$\mu_c = \frac{mg - (m + m_{\text{bloco}})a}{m_{\text{bloco}}g}. \text{ Introduzindo}$$

os valores, obtém-se  $\mu_c = 0,28$ . Este valor é ligeiramente mais elevado que o anterior. Neste procedimento é maior o erro cometido: supõe-se que a roldana e o fio têm massa desprezável, condição que é aceitável se as massas do bloco e do corpo suspenso forem muito maiores do que as do fio e da roldana; desprezou-se também o atrito no movimento da roldana. Estes erros experimentais não existem no movimento retardado, pois o fio já não exerce tensão sobre o bloco, sendo a força de atrito a resultante das forças sobre o

bloco. **f)** Os coeficientes de atrito,

$$\mu_e = \frac{F_{aem\acute{a}x}}{mg} \text{ e } \mu_c = \frac{F_{ac}}{mg}, \text{ est\~{a}o calculados}$$

na tabela seguinte:

A / cm <sup>2</sup>	Material da base do bloco	$\mu_e$	$\mu_c$
48,0	Madeira polida	0,290	0,207
48,0	Feltro	0,348	0,305
32,0	Madeira polida	0,279	0,204

Os coeficientes de atrito, est\~{a}tico e cin\~{e}tico, dependem dos materiais em contacto (a tabela mostra valores significativamente diferentes), mas n\~{a}o dependem da \r{a}rea da superf\~{i}cie em contacto (a tabela mostra valores semelhantes).

### Quest\~{o}es globais (p\~{a}g. 76)

**62. a)** Equa\~{c}oes param\~{e}tricas do movimento:  $x = 1000t$  e  $y = 1,60 - 5,0t^2$ . Da primeira equa\~{c}oem obt\~{e}m-se o tempo para o qual  $x = 500$  m, que \r{e}  $t = 0,5$  s. A ordenada para este instante \r{e}  $y = 0,350$  m (a bala passa por baixo).

**b)** Equa\~{c}oes para a velocidade:

$$v_x = 1000 \text{ m s}^{-1}, v_y = -10t \text{ e}$$

$$v = \sqrt{1000^2 + 100t^2}. \text{ Acelera\~{c}oem tangencial:}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{10^2 t}{\sqrt{1000^2 + 10^2 t^2}} \text{ Ent\~{a}o}$$

$a_t(0,20) = 0,0200 \text{ m s}^{-2}$ . **c)** (D). No instante inicial (m\~{o}dulo da velocidade m\~{i}nimo) a acelera\~{c}oem tangencial \r{e} nula; aumenta quando a velocidade aumenta, tendendo para o m\~{o}dulo da acelera\~{c}oem grav\~{i}tica

$$(\text{para } t \text{ pequeno, } a_t \approx \frac{10^2 t}{\sqrt{1000^2}} = 0,1t,$$

ou seja, a acelera\~{c}oem tangencial \r{e} aproximadamente linear em  $t$ ; para  $t$  grande, a acelera\~{c}oem tangencial tende para

$$a \text{ da gravidade, } a_t \approx \frac{10^2 t}{\sqrt{10^2 t^2}} = 10 \text{ m s}^{-2}.$$

Este limite nunca chega a ocorrer porque a bala bate no ch\~{a}o.

**63. a)** O vetor posi\~{c}oem na posi\~{c}oem final, relativamente \r{a} origem (o centro do campo, que \r{e} o ponto de partida) \r{e}  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$ , com  $\vec{r}_1 = 26 \cos 60^\circ \vec{e}_x - 26 \sin 60^\circ \vec{e}_y$ ,  $\vec{r}_2 = 16 \vec{e}_x$  e  $\vec{r}_3 = 18 \cos 45^\circ \vec{e}_x + 18 \sin 45^\circ \vec{e}_y$ . Portanto,  $\vec{r} = 41,7 \vec{e}_x - 9,79 \vec{e}_y$ . Como o vetor posi\~{c}oem do centro da baliza \r{e}  $\vec{r}_b = 50 \vec{e}_x$ , a diferen\~{c}a \r{e}  $\vec{r}_d = (50 - 41,7) \vec{e}_x + 9,79 \vec{e}_y$ , pelo que o jogador ficou a  $|\vec{r}_d| = 12,8$  m do centro da baliza.

**b)** O m\~{o}dulo da velocidade inicial \r{e}  $v_0 = 25 \text{ m s}^{-1}$  e as equa\~{c}oes param\~{e}tricas do movimento s\~{a}o  $x = 25 \cos 20^\circ t$  e  $y = 25 \sin 20^\circ t - 5t^2$ . Para  $x = 11$  m,

ob\~{t}e}m-se  $t = 0,468$  s. Logo,  $y = 2,9$  m, valor superior \r{a} altura da baliza: a bola passa por cima da trave.

**64. a)** Pela conserva\~{c}oem da energia mec\~{a}nica,

$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh_D \Rightarrow h_A = h_D + \frac{v_D^2}{2g},$$

logo,  $h_D = 5,2$  m. **b)** Velocidade em C: pela conserva\~{c}oem da energia mec\~{a}nica, tem-se

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + mg2R = mgh_A \Rightarrow v_A = \sqrt{2g(h_A - 2R)},$$

ou seja,  $v_C = 6,6 \text{ m s}^{-1}$ . A velocidade em C a partir da qual o corpo perde o contacto com

a rampa obt\~{e}m-se com  $N_C = 0$ :  $P = m \frac{v_C^2}{R}$  ou

$$v_{C,\text{min}}^2 = \sqrt{gR} = 3,9 \text{ m s}^{-1}.$$

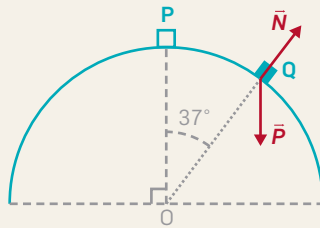
Como  $v_C = 6,6 \text{ m s}^{-1} > 3,9 \text{ m s}^{-1}$ , o carrinho passa por C sem cair. **c)** Como

$$P + N_C = m \frac{v_C^2}{R}, \text{ obt\~{e}m-se } N_C = 3,8 \text{ N. d)} \text{ (D).}$$

Uma vez que  $a_t = \frac{dv}{dt}$ , quando  $v$  \r{e} m\~{i}nimo

(ou m\~{a}ximo), a acelera\~{c}oem tangencial \r{e} nula.

**65. a)** Representam-se as for\~{c}as sobre o corpo em Q:



A componente centr\~{i}peta da for\~{c}a resultante \r{e}

$$P \cos 37^\circ - N_Q = \frac{mv_Q^2}{R} \Rightarrow P \cos 37^\circ - \frac{mv_Q^2}{R} = N_Q.$$

A velocidade em Q obt\~{e}m-se pela conserva\~{c}oem da energia mec\~{a}nica:

$$mgh_p = mgh_q + \frac{1}{2}mv_Q^2, \text{ sendo}$$

$$h_p = R \text{ e } h_q = R \cos 37^\circ, \text{ logo,}$$

$$mgR - mgR \cos 37^\circ = \frac{1}{2}mv_Q^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2gR(1 - \cos 37^\circ) = v_Q^2; \text{ substituindo na}$$

equa\~{c}oem anterior, obt\~{e}m-se

$$P \cos 37^\circ - \frac{2gRm(1 - \cos 37^\circ)}{R} = N_Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \cos 37^\circ - 2P(1 - \cos 37^\circ) = N_Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(3 \cos 37^\circ - 2) = N_Q, \text{ logo, } N_Q = 4,0 \text{ N.}$$

**b)** Se, na equa\~{c}oem da for\~{c}a normal (ver al\~{i}nea anterior), o \r{a}ngulo para uma posi\~{c}oem qualquer for  $\theta$ , teremos:  $P(3 \cos \theta - 2) = N_R$ ; para o bloco perder o contacto com a superf\~{i}cie,  $N_R = 0$ , logo,  $P(3 \cos \theta - 2) = 0 \Rightarrow \Rightarrow 3 \cos \theta = 2$  e  $\theta = 48^\circ$ .

## 1.2 Centro de massa e momento linear de sistemas de part\~{i}culas

### 1.2.1 (p\~{a}g. 98)

**1.** Verdadeiras: A, B, D, E. Falsas: C, F.

**2.** (C).

$$x_{\text{CM}} = \frac{-4 \times 18 + 2 \times 12 + 6 \times 20}{50} = 1,44 \text{ m;}$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{-4 \times 18 - 2 \times 12 + 6 \times 20}{50} = 0,48 \text{ m.}$$

**3.** (D). Os tr\~{e}s \r{a}tomos formam um tri\~{a}ngulo is\~{o}sceles, sendo de  $38^\circ$  cada um dos \r{a}ngulos entre a dire\~{c}oem do eixo dos  $xx$  e a que une cada hidrog\~{e}nio ao oxig\~{e}nio. Portanto:

$$x_{\text{CM}} = \frac{1 \times 0 + 16 \times 96 \cos 38^\circ + 1 \times (96 \cos 38^\circ) \times 2}{18} =$$

$$= 75,6 \text{ pm}$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{1 \times 0 + 16 \times 96 \sin 38^\circ + 1 \times 0}{18} = 52,5 \text{ pm}$$

**4.** Seja  $d$  a dist\~{a}ncia entre os centros da Terra e da Lua. Sendo a massa da Terra cerca de 81 vezes a massa da Lua, e tomando como origem do referencial o centro da Terra, as coordenadas s\~{a}o  $(0, 0)$  para a Terra e  $(0, d)$  para a Lua. Logo,

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_L d}{m_T + m_L} = 0,012d \text{ e } y_{\text{CM}} = 0.$$

A dist\~{a}ncia m\~{e}dia Terra-Lua \r{e} cerca de  $d = 1,28 \times 3,00 \times 10^8 = 3,84 \times 10^8$  m, logo,  $x_{\text{CM}} = 4,6 \times 10^6 \text{ m} < R_T$ , ou seja, o centro de massa est\~{a} no interior da Terra.

**5.** Chapa A: consideremos a por\~{c}oem retangular de base 4 cm e altura 2 cm; a primeira parti\~{c}oem da chapa tem uma massa quatro vezes superior \r{a} segunda; o centro de massa de cada uma das parti\~{c}oes est\~{a} no seu centro geom\~{e}trico:

$$\vec{r}_1 = 2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y \text{ (cm) e } \vec{r}_2 = 6\vec{e}_x + \vec{e}_y \text{ (cm). Portanto,}$$

$$\vec{r}_{\text{CM,A}} = \frac{(4m \times 2 + m \times 6)\vec{e}_x + (4m \times 4 + m \times 1)\vec{e}_y}{5m} =$$

$$= 2,8\vec{e}_x + 3,4\vec{e}_y \text{ (cm).}$$

Chapa B: o orif\~{i}cio corresponde a uma por\~{c}oem de chapa que \r{e} subtra\~{i}da. Como o raio do c\~{i}rculo maior \r{e} quatro vezes maior do que o do menor, a \r{a}rea e, portanto, a massa, \r{e} 16 vezes maior. Ent\~{a}o, segundo a dire\~{c}oem

$$xx, x_{\text{CM}} = \frac{0 \times 16m - 2,0 \times m}{15m} = -0,13 \text{ dm.}$$

Por simetria,  $y_{\text{CM}} = 0$ .

### 1.2.2 (p\~{a}g. 99)

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \left(t + \frac{1}{4}t^2\right)\vec{e}_x + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right)\vec{e}_y.$$

Derivando, obt\~{e}m-se

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \left(1 + \frac{1}{2}t\right)\vec{e}_x + \left(\frac{1}{2} + t\right)\vec{e}_y;$$

$$\text{derivando novamente, } \vec{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{2}\vec{e}_x + \vec{e}_y.$$



A força é  $\vec{F}_{\text{res}} = 2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$  e  $F_{\text{res}} = 4,5 \text{ N}$ .

**7.** Todos os resultados estão no SI:

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{100\vec{v}_A + 300\vec{v}_B}{400} = \left(t - \frac{5}{4} - 3t - \frac{15}{4}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{3}{4}t - \frac{6}{4} - \frac{9}{4}t + \frac{18}{4}\right)\vec{e}_y = (-2t - 5)\vec{e}_x + \left(-\frac{3}{2}t + 3\right)\vec{e}_y;$$

derivando,  $\vec{a}_{\text{CM}} = -2\vec{e}_x - \frac{3}{2}\vec{e}_y$ ;

a força resultante é  $\vec{F}_{\text{res}} = -0,8\vec{e}_x - 0,6\vec{e}_y$ .

**8. a)**  $\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$ . Logo,  $\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{0}$ .

A velocidade do centro de massa é constante e dada por

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B} = -\frac{1}{3}\vec{e}_y = -0,33\vec{e}_y \text{ (m s}^{-1}\text{)}.$$

**b)** Como a velocidade do CM é constante, o movimento é retilíneo uniforme, por isso,  $\vec{r}_{\text{CM}}(t) = \vec{r}_{\text{CM}}(0) + \vec{v}_{\text{CM}}t$ ; sendo

$$\vec{r}_{\text{CM}}(0) = \frac{-4 + 2 \times 6}{3}\vec{e}_x + \frac{-4 + 2 \times 6}{3}\vec{e}_y = \frac{8}{3}(\vec{e}_x + \vec{e}_y) \text{ (m)}, \text{ vem } \vec{r}_{\text{CM}}(2) = \frac{6}{3}\vec{e}_x + \frac{-1}{3}\vec{e}_y = 2,0\vec{e}_x + 2,7\vec{e}_y \text{ (m)}.$$

### 1.2.3 (pág. 99)

**9.** Uma vez que  $\vec{F} = m \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t}$  e não se pode alterar a massa ou a velocidade do corpo que colide, só resta um modo de minimizar as forças de impacto: aumentar o tempo de colisão. Em **(A)**, o tempo de colisão aumenta com a flexão das pernas ou com a utilização de colchões de espuma; em **(B)**, o tempo de colisão é maior quando o chão não é duro, ou seja, com a carpete.

**10.** Quando colidem um com o outro, exercem entre si forças com intensidades iguais mas simétricas (par ação-reação)

e, como  $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$  e o tempo de colisão é o mesmo, as variações de momento linear dos corpos são simétricas e, por isso, iguais em módulo. Mas as acelerações são diferentes pois, como as forças são iguais em módulo, terá maior aceleração o corpo de menor massa (Segunda Lei de Newton), ou seja, o vagão.

**11. a)** (C).  $\Delta p = m|\vec{v}_f - \vec{v}_i| = 1,25 \times 10^3 \times [6 - (-40)]/3,6 = 1,6 \times 10^4 \text{ kg m s}^{-1}$ .

**b)**  $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 2,0 \times 10^5 \text{ N}$ .

**12.** Aplicando a conservação do momento linear, tem-se  $m v_{1x} + m v_{2x} = m v'_{1x} + m v'_{2x}$  ou seja,  $75 \times 10 = (75 + m) \times 5$ ; logo, a massa do outro patinador é também 75 kg.

Aplicando  $\vec{F} = m \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t}$  a cada um deles

obtém-se  $F = 3750 \text{ N}$  e, por isso, não há danos físicos.

**13. (C).** Como  $\Delta p = F\Delta t$  e a força e o intervalo de tempo são os mesmos para A e B,  $\Delta p_A = \Delta p_B$ . Como  $p_{Ai} = p_{Bi} = 0$ , então  $p_{Af} = p_{Bf}$ .

**14. (B).** Como  $\Delta \vec{p} = \vec{F}\Delta t$ , tomando componentes escalares tem-se  $p_i = p_i + F\Delta t$ , que se pode aplicar aos intervalos de tempo sucessivos:

[0, 2] s:  $p_i = -2 \times 10 + 10 \times 2 = 0 \text{ kg m s}^{-1}$ ;

[2, 4] s:  $p_i = 0 + 2,5 \times 2 = 5 \text{ kg m s}^{-1}$ ;

[4, 6] s:  $p_i = 5 + 0 = 5 \text{ kg m s}^{-1}$ ;

[6, 8] s:  $p_i = 5 - 5 \times 2 = -5 \text{ kg m s}^{-1}$ .

**15. (D).** Sendo  $F$  o módulo da força, o tempo de travagem,  $t$ , será tanto maior quanto maior for o módulo da variação do

momento linear:  $\Delta t = \frac{\Delta \vec{p}}{F} = \frac{|\vec{p}|}{F}$ . Como

$|\vec{p}_i| = m|\vec{v}_i|$ , vem  $p_{iA} = 6,0 \text{ kg m s}^{-1}$ ,

$p_{iB} = 7,0 \text{ kg m s}^{-1}$ ,  $p_{iC} = 9,0 \text{ kg m s}^{-1}$  e

$p_{iD} = 5,0 \text{ kg m s}^{-1}$ . Logo,  $t_D < t_A < t_B < t_C$ .

### 1.2.4 (pág. 100)

**16. A.** Falsa.  $p_{\text{bala}} = 0,050 \times 220 = 11,0 \text{ kg m s}^{-1}$ .

**B.** Verdadeira.

$E_{\text{c,bala}} = \frac{1}{2} \times 0,050 \times 220^2 = 1,21 \times 10^3 \text{ J}$ .

**C.** Verdadeira. Como  $\vec{0} = \vec{p}_{\text{esp.}} + \vec{p}_{\text{bala}}$ , então  $|\vec{p}_{\text{esp.}}| = |\vec{p}_{\text{bala}}| = 11,0 \text{ kg m s}^{-1}$ .

**D.** Falsa.  $E_{\text{c,esp.}} = \frac{1}{2} m_{\text{esp.}} v_{\text{esp.}}^2 = \frac{p_{\text{esp.}}^2}{2m_{\text{esp.}}} = 15,12 \text{ J}$  (diferente da energia cinética da bala).

**E.** Falsa.  $\vec{p}_{\text{esp.}} = -\vec{p}_{\text{bala}}$  (só em módulo os dois momentos lineares são iguais).

**17. (A).** Conservação do momento linear:  $(m_1 + m_2)v = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$  ou

$$v'_2 = \frac{(m_1 + m_2)v - m_1 v'_1}{m_2} = 2,52 \times 10^5 \text{ km h}^{-1};$$

o andar 2 move-se no mesmo sentido, pois  $v'_2 > 0$ .

**18. A.**  $p_i = 1200 \times 13,9 = 1,67 \times 10^4 \text{ kg m s}^{-1}$  (afirmação verdadeira).

**B.**  $|\Delta \vec{p}| = m|\vec{v}_f - \vec{v}_i| = 1,80 \times 10^4 \text{ kg m s}^{-1}$  (afirmação falsa).

**C.**  $\Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = 1,15 \times 10^5 \text{ J}$  (afirmação verdadeira).

**D.**  $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 9,0 \times 10^4 \text{ N}$  (afirmação falsa).

**E.**  $E_{\text{ci}} = \frac{1}{2}mv_i^2 = 1,16 \times 10^5 \text{ J}$  (afirmação verdadeira).

**19. (C).** Se a colisão for perfeitamente inelástica, a velocidade final dos objetos que colidem será a mesma. Na situação I,

$$mv = (m + m_{\text{muro}})v'. \text{ Logo, } v' = \frac{m}{m + m_{\text{muro}}}v.$$

Nas situações II e III, o momento linear inicial é nulo, pelo que a velocidade final do conjunto é nula.

**20. (D).** O centro de massa do sistema não muda de posição, pois a resultante das forças exteriores é nula. Quando a bola sai da mão, indo para a esquerda, o resto do sistema (*carro + pessoa*) desloca-se para a direita. Quando a bola bate na parede e passa a ter velocidade com sentido contrário, o resto do sistema desloca-se para a esquerda. Em A, a bola executa movimentos repetidos e o carro tem movimento de vaivém continuado. Em B, a bola cai no chão e o carro para quando a bola parar sobre o carro.

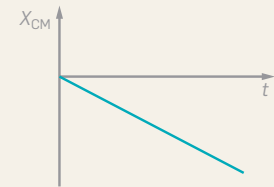
**21.** Não atuam forças exteriores sobre o sistema *astronautas + bola*. Por isso, cada vez que um recebe a bola, move-se no sentido da velocidade desta; e, ao atirá-la, move-se em sentido contrário ao da bola (só assim há conservação do momento linear). Então, os astronautas vão afastando-se um do outro, embora o centro de massa do sistema não mude de posição.

**22. a)** (A). A resultante das forças exteriores é nula, a aceleração do centro de massa é nula e a sua velocidade é constante. **b)** Perfeitamente inelástica (os corpos seguem com a mesma velocidade após a colisão). **c)** Conservação do momento linear:  $m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B)v'$ , ou seja: a velocidade final é dupla da inicial, tendo o mesmo sentido.

**23. a)** A velocidade do centro de massa é  $\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{m\vec{v} + 2m(-\vec{v})}{m + 2m} = -\frac{1}{3}\vec{v}$ . Como a

resultante das forças exteriores é nula, a velocidade do centro de massa é constante, sendo o seu movimento retilíneo uniforme.

**b)** A posição do centro de massa, depois da colisão, é dada por  $x_{\text{CM}} = -\frac{v}{3}t$ , cujo gráfico está representado na figura.



**24. A.** Falsa. A variação do momento linear,  $\Delta p$ , é igual para as duas bolas. Como  $\Delta p = F\Delta t$  e  $F$  é o mesmo, também  $\Delta t$  é o mesmo. **B.** Verdadeira (ver A.). **C.** Falsa.

A distância percorrida é  $\Delta x = v_0 \Delta t - \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$ ; de  $v = v_0 - a\Delta t$  conclui-se que  $\Delta t = \frac{v_0}{a}$  e,

portanto,  $\Delta x = \frac{v_0^2}{2a}$ . Como  $a = \frac{F}{m}$  e  $v_0 = \frac{p}{m}$ ,

vem  $\Delta x = \frac{p^2}{2Fm}$ . Como  $F$  e  $p$  são os

mesmos, a distância de travagem será maior quando for menor a massa  $m$ , ou seja, para a bola de pingue-pongue.

**D.** Falsa (ver C.). **E.** Falsa. A energia despendida é igual ao trabalho realizado pela força, o qual é, em módulo,  $W = F\Delta x$ . Como a distância de travagem é diferente nos dois casos, também a energia o é.

**25.** Aplicando a conservação do momento linear,  $Mv_{1x} + mv_{2x} = Mv'_{1x} + mv'_{2x}$ , tem-se  $mv = Mv'_{1x} + \frac{mv}{2}$  e  $v'_{1x} = \frac{mv}{2M}$ . Ora, para o pêndulo dar uma volta completa deverá ter no topo uma velocidade mínima que satisfaça  $v^2 = gl$  (ver subdomínio 1.1). Para

que tal aconteça,  $v'_{1x}$  tem de ser tal que

$$\frac{1}{2}m_{\text{total}}v'^2_{1x} = m_{\text{total}}g2l + \frac{1}{2}m_{\text{total}}gl$$

(conservação da energia mecânica).

Portanto, só dará a volta completa se

$$v'_{1x} = \sqrt{5gl}. \text{ Substituindo na equação anterior}$$

para esta velocidade, vem  $\sqrt{5gl} = \frac{mv}{2M}$ , ou

$$v = 2M \frac{\sqrt{5gl}}{m}.$$

### Atividade laboratorial (pág. 102)

#### 26. a)

$v_1 / \text{m s}^{-1}$	$v_2 / \text{m s}^{-1}$	$p_i / \text{kg m s}^{-1}$	$p_f / \text{kg m s}^{-1}$	$E_{\text{ci},i} / \text{J}$	$E_{\text{ci},f} / \text{J}$
0,69	0,35	0,35	0,35	0,12	0,06
0,58	0,40	0,57	0,59	0,16	0,12
0,68	0,23	0,34	0,34	0,12	0,04
0,55	0,42	0,83	0,84	0,23	0,18
1,09	0,28	0,55	0,56	0,30	0,08

**i.** A tabela indica as velocidades dos carrinhos nas duas primeiras colunas,

obtidas a partir de  $v = \frac{\ell}{t}$ , onde  $\ell = 2,0 \text{ cm}$

é a largura da tira e  $t$  é o tempo de

passagem. **ii.** Na terceira e quarta colunas

da tabela indicam-se, respetivamente,

os momentos lineares inicial e final do

sistema:  $p_i = m_1v_1$  e  $p_f = (m_1 + m_2)v_2$ .

Verifica-se que os valores são compatíveis,

dentro dos erros experimentais, com  $p_i = p_f$ ,

ou seja, confirma-se a conservação do

momento linear. Na quinta e na sexta

colunas indicam-se as energias cinéticas

antes e depois da colisão. Verifica-se

que há uma grande diminuição da

energia cinética após a colisão, pois esta

é perfeitamente inelástica. **iii.** Sim, pois

há conservação do momento linear. **b)** O

coeficiente de restituição é dado por  $e = \frac{v'_{1x}}{v}$

( $v$  e  $v'$  são, respetivamente, os módulos

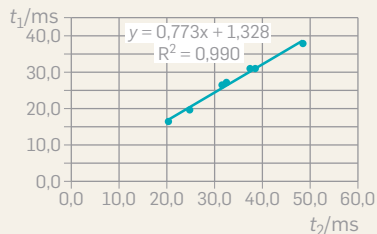
das velocidades do carrinho antes e após a

colisão). Como  $v = \frac{\ell}{t_1}$  e  $v' = \frac{\ell}{t_2}$ , em que  $\ell$  é

a largura da tira, podemos escrever  $e = \frac{t_1}{t_2}$ ,

ou seja,  $t_1 = e t_2$ . O gráfico representa

o tempo de passagem da tira antes da colisão, em função do tempo de passagem depois da colisão. O coeficiente de restituição é o declive da reta,  $e = 0,773$ .



### Questões globais (pág. 103)

**27. a)** (A).

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B + m_C \vec{r}_C}{m_A + m_B + m_C} = -0,4\vec{e}_x + 2,6\vec{e}_y \text{ (m)}.$$

$$\text{b) } \vec{v}_{\text{CM}} = \frac{m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + m_C \vec{v}_C}{m_A + m_B + m_C} =$$

$$= 0,96\vec{e}_x - 0,80\vec{e}_y \text{ (m s}^{-1}\text{)}.$$

$$\text{c) (C). } \vec{p}_{\text{CM}} = (m_A + m_B + m_C)\vec{v}_{\text{CM}} =$$

$$= 0,48\vec{e}_x - 0,40\vec{e}_y \text{ (kg m s}^{-1}\text{)}.$$

**28.** Não. Os centros de massa das partes A e B, respetivamente  $x_A$  e  $x_B$ , são tais que

$$\frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = 0. \text{ Como } |x_A| > |x_B|, \text{ conclui-se}$$

que  $m_A < m_B$ .

**29. a)** O raio da chapa pequena (chapa 1)

é metade do da grande (chapa 2). Como

a massa de cada chapa é proporcional à

área do círculo e esta é proporcional ao

quadrado do raio, conclui-se que  $m_1 = m$

e  $m_2 = 4m$ . O centro de massa está à altura

$$h = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{10,0m + 4,0 \times 4m}{5m} = 5,2 \text{ cm}.$$

**b)** O raio da esfera pequena (esfera 1) é

metade do da grande (esfera 2). Como a

massa de cada esfera é proporcional ao

volume da esfera e esta é proporcional ao cubo

do raio, conclui-se que  $m_1 = m$  e  $m_2 = 8m$ .

O centro de massa está à altura

$$h = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{100m + 40 \times 8m}{9m} = 46,7 \text{ cm}.$$

**30. a)** Como não atuam forças exteriores

ao sistema *homem + rapaz*, há conservação

do momento linear, sendo  $\vec{0} = m\vec{V} + M\vec{v}$ ;

por isso, a velocidade do rapaz é  $2 \text{ km h}^{-1}$ ,

mas em sentido contrário à do homem.

Como se movem com velocidade constante

(o atrito é desprezável), o homem desloca-

se  $0,278 \times 3 \text{ m}$  e o rapaz  $0,556 \times 3 \text{ m}$  para

o outro lado; por isso, ficam à distância de

$2,5 \text{ m}$ . **b)** Aplicando a expressão

$$\vec{F} = m \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} \text{ ao rapaz, obtém-se } F = 194 \text{ N}.$$

**31.** Na primeira situação tem-se

$mv_A + 0 = 0 + mv'_B$ ,  $v'_B = v_A$ , e B fica com

velocidade igual à velocidade inicial de A

(colisão elástica). Na segunda,

$$mv_A + 0 = 2mv', \text{ donde } v' = \frac{v_A}{2} \text{ e tanto A como}$$

B ficam com metade da velocidade inicial

de A (colisão perfeitamente inelástica).

**32.** Como não atuam forças exteriores, o centro de massa do homem não se move. Para haver movimento de uma parte do sistema num sentido é preciso que a parte restante se mova em sentido contrário (de acordo com a conservação do momento linear). O homem pode lançar objetos em sentido contrário àquele em que pretende deslocar-se e será melhor sucedido quanto maior for a velocidade de lançamento dos objetos e/ou a sua massa. Se tiver consigo muitos objetos, conseguirá deslizar e talvez atingir o seu objetivo...

**33.** Em caso de colisão, para minimizar a força de impacto deve aumentar-se o tempo de colisão. Com os pneus velhos (ou outros materiais flexíveis) consegue-se esse objetivo.

**34.** Designando por  $v$  a velocidade da bala antes do choque e por  $v'$  a do conjunto *bala + bloco* logo após o choque, a conservação do momento linear no choque e a conservação da energia mecânica após o choque permitem escrever:  $mv = (m + M)v'$

$$\text{e } \frac{1}{2}(m + M)v'^2 = (m + M)gh. \text{ Desta última}$$

equação resulta  $v' = \sqrt{2gh}$ . Usando este resultado na outra equação, vem

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}. \text{ Têm-se, pois, as}$$

seguintes correspondências: I – B e II – C.

O cálculo da energia cinética da bala antes

do choque, a energia cinética do conjunto

depois do choque e a diferença destas

duas energias cinéticas, que é a energia

dissipada, é imediato. Encontram-se as

seguintes correspondências:

III – A, IV – E e V – D.

**35. (A)** Falsa. O centro de massa

permanece em repouso porque a

resultante das forças exteriores é nula.

**(B).** Verdadeira. **(C)** Verdadeira. A posição

do centro de massa é, na situação inicial,

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_c L}{2(m_p + m_c)}. \text{ Esta é também a posição}$$

na situação final:

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_p(L - d) + m_c\left(\frac{L}{2} - d\right)}{(m_p + m_c)}. \text{ Igualando as}$$

duas expressões e resolvendo em ordem

$$\text{a } d, \text{ obtém-se } d = \frac{m_p L}{(m_p + m_c)}. \text{ A abcissa da}$$

posição final da pessoa é

$$x_p = L - d = \frac{m_c L}{(m_p + m_c)}. \text{ (D) Falsa. Ver}$$

resposta C. **(E)** Falsa. O centro de massa

permanece na mesma posição.

**36. a)**  $\Delta p = m(v_f - v_i) = 2,5 \text{ kg m s}^{-1}$ .

**b)** A força sobre o taco e a força sobre a bola constituem um par ação-reação (são simétricas) e o seu módulo é

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 5,0 \times 10^3 \text{ N} = 5,0 \text{ kN}.$$

**37. a)** Sendo  $l$  o comprimento do fio, a velocidade mínima do conjunto *bala + pêndulo* no ponto mais alto é

$$P = m \frac{v_{\min}^2}{l} \text{ ou } v_{\min} = \sqrt{gl}.$$

Pela conservação da energia mecânica, no ponto mais baixo da trajetória a velocidade do conjunto (após a colisão) é  $v' = \sqrt{5gl} = 7,1 \text{ m s}^{-1}$ .

Pela conservação do momento linear,  $m_b v = (m_b + m_p) v'$ , a velocidade inicial da bala

$$\text{é } v = \frac{m_b + m_p}{m_b} v' = 100 \sqrt{5gl} = 7,1 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}.$$

**b)**  $E_{\text{diss}} = |E_{\text{ct}} - E_{\text{ci}}| = \frac{1}{2} m_b v^2 - \frac{1}{2} (m_b + m_p) v'^2 = 2,52 \times 10^3 - 25,2 = 2,49 \times 10^3 \text{ J}.$

Percentualmente, tem-se  $\frac{E_{\text{diss}}}{E_{\text{ci}}} \times 100 = 99\%$ .

**38. a)** Os módulos das velocidades com que a bola chega ao solo e com que a bola abandona o solo podem ser obtidas por aplicação da conservação da energia mecânica no percurso da bola no ar, na descida e na subida, sendo dadas por

$$v = \sqrt{2gh} \text{ e } v' = \sqrt{2gh'}, \text{ onde } h \text{ é a altura inicial e } h' \text{ a altura que atinge após o}$$

ressalto no solo. Portanto,  $e = \sqrt{\frac{h'}{h}} = 0,894$ .

**b)** Considerando um eixo vertical com sentido positivo para cima, a variação do momento linear da bola é  $\Delta p = m(v_f - v_i)$ . Obtém-se  $\Delta p = 0,2 \times [4,90 - (-5,48)] = 2,08 \text{ kg m s}^{-1}$ .

O módulo da força é  $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 208 \text{ N}.$  **c)**

Como  $v' < v$ , então  $E_c' < E_c$ . A colisão é inelástica.

## 1.3 Fluidos

### 1.3.1 (pág. 129)

**1. a)**  $V = \frac{m}{\rho} = \frac{70}{1,0 \times 10^3} = 70 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 70 \text{ L}.$

**b) (B).**  $V_{\text{sangue}} = 0,07 \frac{m_{\text{sangue}}}{\rho_{\text{sangue}}} = \frac{0,07 \times 70}{1060} \text{ m}^3 = \frac{0,07 \times 70}{1,060} \text{ dm}^3.$

**2. a) (A). b)**  $d_{\text{Fe}} = \frac{\rho_{\text{Fe}}}{\rho_{\text{água}}} = 7,9$ : a densidade do

ferro é 7,9 vezes superior à da água a 4 °C.

**c)** Volume do cubo:

$$V_{\text{total}} = (4,0 \times 10^{-2})^3 = 6,4 \times 10^{-5} \text{ m}^3.$$

Volume do ferro:  $V_{\text{Fe}} = \frac{m}{\rho} = 2,5 \times 10^{-5} \text{ m}^3.$  Volume da

parte oca:  $V = 3,9 \times 10^{-5} \text{ m}^3 = 39 \text{ cm}^3.$

**3. a)**  $m = \rho_{\text{ar}} V = 1,18 \times 4,0 \times 4,5 \times 3,0 = 64 \text{ kg}.$

**b)**  $F_g = mg = \rho A$ , logo,

$$1,01 \times 10^5 A = 5,0 \times 10^3 \times 10 \text{ ou } A = 0,50 \text{ m}^2.$$

**c)**  $F = \rho A = 1,01 \times 10^5 \times 4,0 \times 4,5 = 1,8 \times 10^6 \text{ N}$ ; como  $F/F_g = 36$ , serão 36 elefantes. **d)** Não colapsa, pois a face inferior também está sujeita à pressão atmosférica: as forças de pressão na face superior e na face inferior equilibram-se, sendo a sua resultante nula.

**e)** Como  $P = \frac{F}{A} = \frac{F_g}{A}$ , tem-se

$$\rho = \frac{mg}{A} = \frac{Ahpg}{A} = gph = 3,0 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

### 1.3.2 (pág. 129)

**4. (A).** Num líquido em repouso, as forças de pressão são perpendiculares à superfície onde se exercem.

**5.** A força de pressão é devida à diferença de pressão entre o exterior e o interior do recipiente:

$$F = \Delta p A \Rightarrow \Delta p = \frac{80}{200 \times 10^{-4}} = 4,0 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

Como  $\Delta p = p_{\text{ext.}} - p_{\text{int.}}$ , vem  $p_{\text{int.}} = 0,97 \times 10^5 \text{ Pa}.$

### 1.3.3 (pág. 129)

**6. (A)** Verdadeira, pois, pela Lei de Stevin,  $p_2 = p_1 + \rho gh$ ; numa superfície horizontal  $h = 0$  e  $p_2 = p_1$ . **(B)** Falsa; um líquido em equilíbrio exerce forças de pressão perpendiculares às paredes e, como estas constituem pares ação-reação com as forças exercidas pelas paredes sobre o fluido, então todas estas forças são perpendiculares às paredes. **(C)** Verdadeira pois, pela Lei de Stevin,  $\Delta p = \rho gh$ . **(D)** Falsa, pois depende também da densidade do líquido, uma vez que  $p_2 = p_1 + \rho gh$ .

**7.** As afirmações (A) e (C) deixariam de ser verdadeiras porque  $p_2 = p_1 + \rho gh$  só é válida se a densidade do fluido for constante.

**8. a) (C). b) (C).** A pressão em A e em C é igual à pressão atmosférica:  $p_0 = \rho_{\text{Hg}} gh$ .

**c)**  $p_0 = \rho_{\text{Hg}} gh = 13,6 \times 10^3 \times 9,81 \times 0,76 = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}.$

**9. a)** Como  $\Delta p = \rho gh$ , vem  $2,00 \times 10^3 = 1,06 \times 10^3 \times 9,8 h$  ou  $h = 0,019 \text{ m} = 19 \text{ cm}.$

**b)** Como  $p = \rho_{\text{Hg}} gh$ , vem  $2,00 \times 10^3 = 13,6 \times 10^3 \times 9,8 h$  ou  $h = 0,015 \text{ m} = 15 \text{ mm}.$

A pressão corresponde a 15 mmHg.

**10. a)** Como  $p_2 = p_1 + \rho gh$ , teríamos  $2p_0 = p_0 + \rho gh$  e, sendo  $p_0 = 1 \text{ atm}$ , obtém-se  $h = 10 \text{ m}$ . Ou seja, por cada 10 m que se descem há um aumento de pressão de uma atmosfera. Este valor é realista, mas, com o aumento da profundidade, a densidade da água vai variando e a expressão anterior deixa de ser rigorosamente válida. **b)**

O ar que entra na boca do mergulhador, como vem da superfície, está à pressão atmosférica e, a 6,0 m de profundidade, o seu corpo vai estar sujeito a uma pressão

mais elevada. A diferença entre elas é  $\Delta p = \rho gh = 6,0 \times 10^4 \text{ Pa}.$

**11.** Pressão atmosférica de 75,0 cmHg:  $p_0 = \rho gh = 13,6 \times 10^3 \times 10 \times 0,750 = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$ , ou seja, cerca de 1 atm. Nos canos, a pressão é  $p = p_0 + \rho gh$ . Mas cada 10 m de altura de água faz aumentar a pressão em cerca de 1 atm (ver questão 10), logo  $p = 8 \text{ atm}$  e os canos não suportam esta pressão.

**12. a)** Dois pontos no mesmo líquido e no mesmo plano horizontal estão à mesma pressão. Escolhendo o ponto B e um ponto na mesma horizontal e no mesmo líquido no outro vaso, B', então  $p_B = p_{B'}$ , ou  $p_0 + \rho_2 gh_2 = p_0 + \rho_1 gh_1$ ; por isso,  $\rho_2 h_2 = \rho_1 h_1$ ,

logo,  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,56$ . **b)** Como as

pressões em A e E são iguais a  $p_0$ , os gráficos I e IV estão excluídos; como o líquido 2 é menos denso do que o líquido 1, a inclinação da reta de A para B tem de ter menor declive do que a da reta de B para C. Logo, é o gráfico II.

### 1.3.4 Lei de Pascal (pág. 131)

**13. a)** No mesmo plano horizontal e no mesmo líquido, as pressões são iguais. Se a pressão variar do lado esquerdo, ela variará da mesma forma no lado direito. **b)** Da igualdade de pressões,  $p_A = p_B$ , resulta

$$\frac{F_A}{A_A} = \frac{F_B}{A_B}, \text{ obtendo-se } F_B = 1200 \text{ N}.$$

Portanto,  $m = 120 \text{ kg}.$  **c)** Seria igual. O que é importante é a diferença de pressão que tem origem na aplicação da força de 40 N; o fluido apenas transmite essa variação de pressão de um lado para o outro da prensa.

### 1.3.5 (pág. 131)

**14. a)** (C). A impulsão é igual ao peso do volume de líquido deslocado, líquido X, e, se a gota está imóvel no interior do líquido,  $P = l$ . **b)** Como a gota está completamente imersa e  $P = l$ , vem  $\rho_{\text{gota}} gV = \rho_X gV$ ; X tem densidade igual à do corpo:

$$\rho_X = \rho_{\text{gota}} = \frac{0,365}{0,400} = 0,913 \text{ g cm}^{-3}.$$

**c)** (B). A impulsão sobre a esfera é independente da profundidade, só depende da densidade do líquido e do volume imerso, que é, neste caso, igual ao volume da esfera:  $l = \rho_X g V_{\text{esfera}}$  (admite-se que o líquido é incompressível,  $\rho_X$  constante e também  $V_{\text{esfera}}$  é constante).

**15. a)** O peso é 70 N. A outra força que atua na bola aplicada pela mão que a segura é simétrica do peso. A densidade da bola é

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{7,0}{0,03} = 0,233 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}.$$

Esta densidade é inferior à da água, pelo que a bola flutua. Quando fica totalmente

imersa em água e é largada, atuam o peso, 70 N, e a impulsão:  $l = \rho_{\text{água}} g V = 300 \text{ N}$ . A resultante das forças é 230 N dirigida para cima, o que faz subir a bola. **b)** (C). Como  $l > P$ , a esfera sobe e, enquanto estiver totalmente imersa, a impulsão é constante. Quando chega à superfície, à medida que o volume imerso diminui, a impulsão decresce até que  $l = P$ .

**c)** A resultante das forças de pressão é a impulsão, tendo-se  $l = P = 70 \text{ N}$ .

**d)** Em equilíbrio,  $l = P$ ,  $mg = \rho_{\text{água}} g V_i$ , donde  $V_i = 0,0070 \text{ m}^3 = 7,0 \text{ dm}^3$ .

**16. a)** No equilíbrio,  $P_{\text{gelo}} = l$  ou

$$\rho_{\text{gelo}} g V_{\text{gelo}} = \rho_{\text{gelo}} g V_{\text{imerso}} \text{ ou } \frac{V_{\text{imerso}}}{V_{\text{gelo}}} = \frac{\rho_{\text{gelo}}}{\rho_{\text{água}}} = 0,92.$$

A placa tem 92% do seu volume debaixo de água. **b)** Para haver equilíbrio, tem-se  $P_R + P_{\text{gelo}} = l$ ; tomando para volume máximo imerso o volume total do bloco (a parte superior do bloco fica a rasar a água), vem  $50,0g + \rho_{\text{gelo}} g V = \rho_{\text{água}} g V$  ou  $V = 0,625 \text{ m}^3 = 625 \text{ dm}^3$ .

**17.** A balança pende para o lado da esfera grande. A força exercida por cada braço da balança, de módulo  $F$ , juntamente com a impulsão, equilibra o peso:  $l + F = P$  ou  $F = P - l$ . Como  $F$  é igual para as duas esferas (a balança está equilibrada) e a impulsão é maior na esfera grande (tem maior volume imerso no ar), então esta terá de ser também a mais pesada. Quando se extrai o ar deixa de haver impulsão e a balança desequilibra para o lado do corpo mais pesado, ou seja, da esfera grande.

**18. a)** (B). O peso é igual, pois têm a mesma massa. A resultante das forças é nula pois os corpos estão em equilíbrio. Para o corpo X e para o corpo Y, tem-se, respetivamente,  $F_X + l_X = P_X$  e  $F_Y + l_Y = P_Y$ , sendo  $F$  a força exercida pelo dinamómetro e registada por ele,  $l$  a impulsão e  $P$  o peso. Como o peso é o mesmo, tem-se  $F_X + l_X = F_Y + l_Y$ ; quanto maior for  $F$ , menor será  $l$ . Como  $F_X < F_Y$ , então  $l_X > l_Y$ . Neste caso:  $2,0 + l_X = 2,8 + l_Y$  ou  $l_X = 0,8 + l_Y$  (N). **b)** Como  $l_X - l_Y = 0,8$ , vem  $\rho_{\text{água}} g V_X - \rho_{\text{água}} g V_Y = 0,8$  ( $V$  é o volume do corpo imerso que é igual ao volume do corpo). Portanto,

$$V_X - V_Y = \frac{0,8}{\rho_{\text{água}} g} = 8,0 \times 10^{-5} \text{ m}^3 = 80 \text{ cm}^3.$$

**c)** Corpo X:

$F_X + l_X = P_X$  ou  $2,0 + \rho_{\text{água}} g V_X = \rho_{\text{Al}} g V_X$ , logo,  $V_X = 11,8 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ . Portanto,  $V_Y = 3,8 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ .

Como a massa dos corpos é a mesma,

$$\rho_Y g V_Y = \rho_{\text{Al}} g V_X \text{ ou } \rho_Y = \rho_{\text{Al}} \frac{V_X}{V_Y} = 8,4 \text{ g cm}^{-3}.$$

### 1.3.6 (pág. 132)

**19.** Sobre a gota atuam o peso (que aponta para baixo), a força de resistência do ar

e a impulsão (que apontam para cima); a força de resistência do ar aumenta com a velocidade, sendo uma força variável; também a impulsão é variável, pois a densidade do ar (onde está imersa a gota) vai variando à medida que ela desce. A partir de certo instante o peso é equilibrado pela impulsão e força de resistência: atinge-se, então, a velocidade terminal. Por isso, as gotas de chuva não atingem velocidades elevadas e a sua queda não é perigosa. A aceleração é variável (e cada vez menor) e o movimento é acelerado (mas não uniformemente acelerado).

**20.** A resultante das forças é nula  $\vec{P} + \vec{l} = \vec{F}_{\text{resist}} = \vec{0}$ , ou seja,  $P = l + F_{\text{resist}}$  com

$$P = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{Fe}} g, l = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g \text{ e}$$

$$F_{\text{resist}} = 6 \pi r \eta v_{\text{term}}. \text{ Logo,}$$

$$v_{\text{term}} = \frac{2g}{9\eta} (\rho_{\text{Fe}} - \rho) r^2 = 0,074 \text{ m s}^{-1} = 7,4 \text{ cm s}^{-1}.$$

### Atividade laboratorial (pág. 132)

**21. a)**  $\rho_{\text{glicerina}} = \frac{24,59 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}} = 1,23 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ .

**b)** A média dos três tempos é

$$\frac{\Delta t}{3} = \frac{14,51 + 14,08 + 14,16}{3} = 14,25 \text{ s}.$$

Portanto,  $v_t = \frac{d}{\Delta t} = 0,0246 \text{ m s}^{-1}$ .

**c)** (C). Inicialmente, a resultante das forças e, conseqüentemente, a aceleração, têm valor máximo e apontam para baixo. À medida que a velocidade aumenta, a força de resistência também aumenta até que a resultante das forças se anula (a aceleração é, então, nula). A aceleração decresce até o corpo atingir a velocidade terminal. **d)** Considerando positivo o sentido para baixo, o equilíbrio das três forças que atuam na esfera – peso, impulsão e força de resistência – exprime-se por  $P = F_{\text{resist}} + l$ . Esta equação pode ainda escrever-se na forma

$$\rho_{\text{aço}} g \frac{4}{3} \pi r^3 = 6 \pi \eta r v_t + \rho_{\text{glicerina}} g \frac{4}{3} \pi r^3. \text{ Daqui}$$

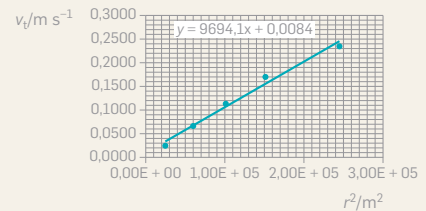
$$\text{resulta } 6 \pi \eta r v_t = (\rho_{\text{aço}} - \rho_{\text{glicerina}}) g \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{e, finalmente, } v_t = \frac{2(\rho_{\text{aço}} - \rho_{\text{glicerina}}) g r^2}{9\eta}.$$

**e)** A tabela seguinte mostra os valores do raio ao quadrado e da velocidade terminal:

$r^2 / \text{mm}^2$	$v_t / \text{m s}^{-1}$
2,56	0,0246
6,00	0,0669
10,24	0,1115
15,21	0,1699
24,50	0,2365

No gráfico representam-se os pontos experimentais e a respetiva reta de regressão:



O declive da reta é  $\frac{2(\rho_{\text{aço}} - \rho_{\text{glicerina}})g}{9\eta} = 9694$ ,

daqui resultando  $\eta = 1,49 \text{ Pa s}$ .

Erro percentual

$$(\%) = \frac{|\eta_{\text{tabelado}} - \eta_{\text{experimental}}|}{\eta_{\text{tabelado}}} \times 100 (\%) = 5,7\%$$

(por excesso).

### Questões globais (pág. 133)

**22. (A)** Ao abocanharem pedras estão a aumentar o peso de modo a que  $P > l$  e possam afundar-se. **(B)** Há um sistema de vasos comunicantes e, como a pressão é a mesma no mesmo líquido e no mesmo plano horizontal, o líquido tem obrigatoriamente de estar à mesma altura nos dois ramos. Se o bico de saída fosse mais baixo do que a boca da chaleira, não a poderíamos encher. **(C)** Ela afunda-se porque se aumentou o peso, a canoa afundou-se mais, mas o aumento de impulsão (devido ao aumento de volume imerso) não foi suficiente para equilibrar o peso total. Mas, se o caixote tiver um grande volume, ao transportarmos o caixote debaixo de água o peso é o mesmo que no caso anterior, mas há um aumento da impulsão (maior volume imerso), o que pode equilibrar o peso total. **(D)** Devido ao grande tamanho desses dirigíveis, o volume deslocado de ar é muito grande e, por isso, também é grande a impulsão exercida pelo ar; por outro lado, utiliza-se o ar quente para encher o balão (o ar quente é menos denso e, portanto, mais leve do que o ar frio).

**23. a)** (A). A pressão do ar aprisionado na campânula é igual em todos os pontos (e igual à pressão do líquido ao nível de C, pois a coluna de ar é muito pequena).

**b)** A pressão em B (superfície exterior da campânula) é devida à pressão atmosférica e à coluna de água com altura de 3 m:

$$p_B = p_0 + 3gp = 1,31 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

A força de pressão é

$$F = p_B A = p_B \pi r^2 = 1,03 \times 10^5 \text{ N. c) } l = \rho g V_i,$$

em que  $V_i$  é o volume do ar encerrado no interior da campânula (desprezando as dimensões das paredes desta). Portanto,  $l = 1,0 \times 10^3 \times 10 \times \pi \times 0,5^2 \times 2,0 = 1,6 \times 10^4 \text{ N}$ .

**d)** O volume diminui. À medida que a campânula desce, a pressão na parte



superior da água que aprisiona o ar (equivalente ao ponto C) aumenta, comprimindo esse mesmo ar.

**24. a)** Há dois líquidos e o cubo flutua com uma parte imersa em água (2,0 cm de altura) e outra parte no óleo (8,0 cm de altura). Supondo que a área da base é  $A$ , a equação  $P = l$  permite escrever:

$$\rho_c g V_c = \rho_{\text{água}} g V_{i\text{água}} + \rho_{\text{óleo}} g V_{i\text{óleo}}$$

$$\rho_c h_c A = \rho_{\text{água}} h_{i\text{água}} A + \rho_{\text{óleo}} h_{i\text{óleo}} A. \text{ Obtém-se}$$

$\rho_c = 0,93 \text{ g cm}^{-3}$ , ou seja, a densidade relativa é 0,93. **b)** A pressão na face inferior devida aos líquidos é

$$p = \rho_{\text{água}} g h_{\text{água}} + \rho_{\text{óleo}} g h_{\text{óleo}} = 928 \text{ Pa.}$$

**25. a)**  $p = p_0 + 5,0 g p = 1,01 \times 10^5 + 5,0 \times 10^4 = 1,51 \times 10^5 \text{ Pa. b) A impulsão equilibra a tensão e o peso:$

$$l = T + P \Rightarrow \rho_{\text{água}} g V = \rho_{\text{cubo}} g V + T, \text{ de onde se obtém: } V = \frac{T}{(\rho_{\text{água}} - \rho_{\text{cubo}})g} = 0,125 \text{ m}^3. \text{ c)}$$

**i)** A impulsão mantém-se constante até o cubo emergir, pois o volume imerso é constante, tendo maior intensidade do que o peso. Nessa altura, e à medida que o volume imerso diminui, a impulsão diminui também até a sua intensidade final ficar igual à do peso. **ii)** A aceleração seria

$$a = \frac{l - P}{m} = \frac{\rho_{\text{água}} - \rho_{\text{cubo}}}{\rho_{\text{cubo}}} g = \frac{g}{4}.$$

O movimento seria uniformemente acelerado e o tempo de subida obtém-se a partir de

$$h = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \times 5,0}{2,5}} = 2,0 \text{ s.}$$

**iii)** A condição de equilíbrio é  $l = P$ , ou seja,  $\rho_{\text{água}} g V_i = \rho_{\text{cubo}} g V$ . A fração de volume imerso é  $V_i = 0,8V$ . O cubo ficaria com 20% do seu volume fora de água.

## 2. Campos de forças

### 2.1 Campo gravítico

#### 2.1.1 (pág. 153)

**1. a)** Os planetas movem-se em órbitas elípticas, ocupando o Sol um dos focos da elipse. **b)** Significa que as órbitas são quase circunferências.

**2. a)** As áreas das regiões sombreadas são iguais, dado que, de acordo com a Segunda Lei de Kepler, o vetor posição do corpo que orbita o Sol, com origem no Sol, varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais. **b)** De acordo com a Segunda Lei de Kepler, as áreas sombreadas de 1 a 7 são iguais, dado serem varridas em intervalos de tempo iguais. Todavia, o deslocamento do cometa associado a cada uma dessas áreas é diferente, logo, o módulo da sua velocidade varia, ou seja, o movimento não

é uniforme. **c)** A velocidade média,  $\vec{v}_m$ , é o deslocamento por unidade de tempo,  $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ .

Assim, considerando iguais intervalos de tempo, a menor velocidade corresponderá à situação em que o deslocamento,  $\Delta \vec{r}$  (vetor que une as posições inicial e final no intervalo considerado), for menor, o que acontece nas regiões 1 e 7.

**3.** A Segunda Lei de Kepler afirma que, num mesmo intervalo de tempo, o vetor posição de um planeta em relação ao Sol varre áreas iguais. Às mesmas áreas correspondem comprimentos dos arcos diferentes: no periélio, o arco é maior do que no afélio, logo, a velocidade é maior no periélio.

**4.** Designando por  $R$  a distância média de um planeta ao Sol e por  $T$  o seu período de translação, vem, de acordo com a Terceira

$$\text{Lei de Kepler, } \frac{R_T^3}{T_T^2} = \frac{R_J^3}{T_J^2}, \text{ em que os}$$

índices T e J se referem à Terra e a Júpiter, respetivamente.

Da relação anterior obtém-se

$$\frac{T_J^2}{T_T^2} = \frac{R_J^3}{R_T^3} \Rightarrow T_J^2 = \frac{(5,22 R_T)^3}{R_T^3} T_T^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_J = \sqrt{5,22^3} T_T \Rightarrow T_J = 11,9 \text{ a, uma vez que } T_T = 1 \text{ a.}$$

$$\text{5. (A). } \frac{r_{\text{Calisto}}^3}{r_{\text{Io}}^3} = \frac{T_{\text{Calisto}}^2}{T_{\text{Io}}^2} \Rightarrow r_{\text{Calisto}}^3 = \frac{16,69^2}{1,77^2} r_{\text{Io}}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{\text{Calisto}} = \sqrt[3]{88,91} r_{\text{Io}} \Rightarrow \frac{r_{\text{Calisto}}}{r_{\text{Io}}} = 4,46.$$

#### 2.1.2 (pág. 153)

**6. a)** A Lei da Gravitação Universal foi a primeira lei obtida para uma das interações fundamentais: a força gravítica. O seu estabelecimento permitiu unificar numa descrição matemática única a força gravítica exercida sobre os corpos à superfície da Terra e a força responsável pelo movimento dos planetas e satélites, mostrando-se, assim, que as Leis da Dinâmica de Newton se aplicam não só aos movimentos na Terra, mas a todo o Universo. **b)** A Lei da Gravitação Universal foi descoberta por Isaac Newton. As Leis de Kepler, nomeadamente a Lei dos Períodos, tiveram uma influência importante nesta descoberta, pois, consideradas conjuntamente com as Leis da Dinâmica de Newton, permitiram concluir que a força gravítica era diretamente proporcional ao produto das massas dos corpos em interação e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

**7. a)** Cavendish utilizou um dispositivo muito preciso, balança de torção, que permitia determinar indiretamente a força gravítica,  $F$ , entre esferas, de massas

conhecidas  $m$  e  $m'$ , a uma determinada distância  $r$  entre si (o que realmente foi medido foi o período de oscilação do pêndulo que depende da força  $F$ ).

Do conhecimento dessa força gravítica,

$$F = G \frac{m m'}{r^2}, \text{ obtém-se a constante de}$$

$$\text{gravitação universal } G = \frac{F r^2}{m m'}.$$

**b)** Um corpo de massa  $m$ , à superfície da Terra, sujeito apenas à força gravítica de intensidade  $F_g$ , cai com a aceleração  $g$ , portanto:

$$F_g = mg \Rightarrow G \frac{m_T m}{r_T^2} = mg \Rightarrow m_T = \frac{g R_T^2}{G}.$$

**c)** O erro percentual, em módulo, é

$$\frac{|6,64 \times 10^{-11} - 6,67 \times 10^{-11}|}{6,67 \times 10^{-11}} \times 100\% = 0,4\%;$$

assim, pode afirmar-se que Cavendish cometeu um erro de 0,4% por defeito em relação ao valor atualmente aceite.

**8. a)** A força gravítica que a Terra exerce sobre um corpo diminui à medida que a distância desse corpo ao centro da Terra aumenta. Em consequência, a aceleração gravítica (aceleração de um corpo sujeito apenas à força gravítica) também diminui quando a distância ao centro da Terra aumenta. Verifica-se que a aceleração gravítica não depende da massa do corpo. Como à superfície da Terra (altitude nula) o módulo da aceleração gravítica é  $10 \text{ m s}^{-2}$ , pode concluir-se que para estes satélites, que estão mais afastados do centro da Terra, a sua aceleração será menor. **b)** A intensidade da força gravítica que a Terra, de massa  $m_T$ , exerce sobre um corpo de massa  $m$  a uma distância  $r$  do

centro da Terra é  $F_g = G \frac{m_T m}{r^2}$ . Da Segunda

Lei de Newton pode obter-se a aceleração de um corpo,  $a$ , sujeito apenas à força gravítica da Terra (aceleração gravítica):

$$F_g = ma \Rightarrow G \frac{m_T m}{r^2} = ma \Rightarrow a = G \frac{m_T}{r^2}.$$

Assim, o quociente do módulo da aceleração de A e do módulo da aceleração de B é:

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{G \frac{m_T}{r_A^2}}{G \frac{m_T}{r_B^2}} = \frac{r_B^2}{r_A^2} = \left( \frac{R_T + 4R_T}{R_T + 2R_T} \right)^2 = \frac{25}{9} \approx 2,78$$

(a aceleração de A é 2,78 vezes maior do que a de B). **c)** (C). Numa órbita circular, a resultante das forças, a força gravítica, é centrípeta e, portanto, também a aceleração (daí o módulo da velocidade,  $v$ , ser constante). A velocidade de um satélite, de massa  $m$ , que orbita a Terra, de massa  $m_T$ , numa trajetória circular de raio  $r$  pode obter-se da aplicação da Segunda Lei de Newton e da Lei da

Gravitação Universal:

$$F_g = ma \Rightarrow G \frac{m_T m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{m_T}{r}}$$

Assim, o quociente do módulo da velocidade de A e do módulo da velocidade de B é:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\sqrt{G \frac{m_T}{r_A}}}{\sqrt{G \frac{m_T}{r_B}}} = \frac{\sqrt{r_B}}{\sqrt{r_A}} = \sqrt{\frac{R_T + 4R_T}{R_T + 4R_T}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1,29 \text{ (a velocidade de A é 1,29}$$

vezes maior do que a de B). **d)** A relação entre o módulo da velocidade angular,  $\omega$ , de um satélite, de massa  $m$ , que orbita a Terra, de massa  $m_T$ , e o raio  $r$  pode obter-se da aplicação da Segunda Lei de Newton:

$$F_g = ma \Rightarrow G \frac{m_T m}{r^2} = m \omega^2 r \Rightarrow \omega^2 r^3 =$$

$= G m_T \Rightarrow \omega^2 r^3 = \text{constante}$  ( $\omega^2$  é inversamente proporcional a  $r^3$ , dado que o seu produto é constante).

### 2.1.3 (pág. 154)

**9. a)** As estrelas exercem uma sobre a outra forças de atração cuja direção é a da reta que une os centros das estrelas e

de intensidade  $F_g = G \frac{m m'}{r^2} = 6,67 \times 10^{-11} \times$

$$\times \frac{3,0 \times 10^{30} \times 3,0 \times 10^{30}}{(1,0 \times 10^{10})^2} = 6,0 \times 10^{30} \text{ N.}$$

**b)** O módulo do campo gravítico à superfície das estrelas de neutrões é:

$$\mathcal{G} = G \frac{M}{R^2} = 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{3,0 \times 10^{30}}{(8,0 \times 10^3)^2} =$$

$$= 3,1 \times 10^{12} \text{ N kg}^{-1}.$$

**10. a)** Para um satélite geoestacionário, o período orbital,  $T$ , é 24 h. Aplicando a Segunda Lei de Newton e a Lei da Gravitação Universal obtém-se o raio,  $r$ ,

$$\text{dessa órbita: } F_g = ma \Rightarrow G \frac{m_T m}{r^2} = m \omega^2 r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{G m_T}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G m_T T^2}{4\pi^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} \times (24 \times 3600)^2}{4\pi^2}} =$$

$$= 4,22 \times 10^7 \text{ m. A altitude é } h = r - R_T =$$

$$= 4,22 \times 10^7 - 6,4 \times 10^6 = 3,6 \times 10^7 \text{ m, ou seja, cerca de seis raios terrestres.}$$

**b)** O módulo do campo gravítico num ponto

$$\text{da órbita deste satélite é: } \mathcal{G} = G \frac{m_T}{r^2} =$$

$$= 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{5,97 \times 10^{24}}{(4,22 \times 10^7)^2} = 0,224 \text{ N kg}^{-1}.$$

**c)** A força gravítica exercida sobre um corpo de 50 kg é  $F_g = m \mathcal{G} = 50 \times 0,224 = 11 \text{ N}$ .

**11.** O módulo do campo gravítico à superfície de um planeta de massa  $m_p$  e

$$\text{raio } R_p \text{ é: } \mathcal{G} = G \frac{m_p}{R_p^2} = G \frac{\rho_p \times \frac{4}{3} \pi R_p^3}{R_p^2} =$$

$$= \frac{4}{3} \pi G \rho_p R_p \text{ em que } \rho_p \text{ é a massa volúmica}$$

média do planeta. Da relação anterior

$$\text{segue-se que } \rho_p = \frac{3 \mathcal{G}}{4 \pi G R_p}, \text{ logo, o}$$

quociente das densidades médias da Terra

$$\text{e da Lua é: } \frac{\rho_T}{\rho_L} = \frac{\frac{3 \mathcal{G}_T}{4 \pi G R_T}}{\frac{3 \mathcal{G}_L}{4 \pi G R_L}} = \frac{\mathcal{G}_T R_L}{\mathcal{G}_L R_T} =$$

$$= \frac{\mathcal{G}_T \times 0,27 R_T}{\frac{1}{6} \mathcal{G}_T R_T} = 6 \times 0,27 = 1,6 \text{ (a Terra é, em}$$

média, 1,6 vezes mais densa do que a Lua).

**12. (B).** O módulo do campo gravítico,  $\mathcal{G}$ , criado por uma massa pontual  $M$  num ponto P, a uma distância  $r$  de P à massa

pontual é  $\mathcal{G} = G \frac{M}{r^2} = GM \left(\frac{1}{r^2}\right)$ : esta última

expressão mostra que  $\mathcal{G}$  é diretamente

proporcional a  $\frac{1}{r^2}$ , ou seja, o gráfico  $\mathcal{G} \left(\frac{1}{r^2}\right)$

é uma reta de declive  $GM$  que passa na origem ( $y = GMx$ ).

**13. a) i)** O módulo do campo gravítico à «superfície» de Júpiter,  $\mathcal{G}_J$ , de massa

$$m_J \text{ e raio } R_J \text{ é: } \mathcal{G}_J = G \frac{m_J}{R_J^2} = 6,67 \times 10^{-11} \times$$

$$\times \frac{1,90 \times 10^{27}}{(7,15 \times 10^7)^2} = 24,8 \text{ N kg}^{-1}. \text{ ii) O módulo do}$$

campo gravítico do Sol num ponto da órbita

de Júpiter, de massa  $m_J$ , é  $\mathcal{G}_S = \frac{F_{S/J}}{m_J}$  em

que  $F_{S/J}$  é a intensidade da força gravítica

que o Sol exerce sobre Júpiter. Como  $\vec{F}_{S/J}$

é a força resultante que atua sobre Júpiter, segue-se que este campo gravítico é igual

à aceleração de Júpiter no seu movimento

$$\text{de translação: } \mathcal{G}_S = \frac{F_{S/J}}{m_J} = \frac{m_J a}{m_J} = a = \omega^2 r =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{11,86 \times 365,25 \times 24 \times 3600}\right)^2 \times 7,78 \times$$

$$\times 10^{11} = 2,2 \times 10^{-4} \text{ N kg}^{-1}. \text{ b) (C). Tendo}$$

Júpiter a mesma massa e maior densidade, segue-se que tem menor

volume, logo, menor raio e, em consequência, maior campo gravítico.

A velocidade orbital e a aceleração centrípeta apenas dependem do raio da órbita e da massa do Sol, que são constantes. A força gravítica exercida sobre Júpiter pelo Sol apenas depende do raio da órbita e das massas de Júpiter e do Sol, que se mantêm constantes.

**14.** (Análise e interpretação da informação obtida com base na exploração de simulação adequada.)

### 2.1.4 (pág. 155)

**15. (D).** A energia potencial gravítica,

$$E_{pg} = -G \frac{m m'}{r}, \text{ é sempre negativa.}$$

Considerando que  $E_{pg} = -y_1$  para um certo valor  $r_1$  da distância, então para uma distância  $n$  vezes maior,  $n r_1$ ,  $E_{pg} = -\frac{y_1}{n}$ .

**16. (A).** A velocidade de escape é a menor velocidade com que se deve lançar um corpo, desprezando-se a resistência do ar, para que ele atinja um ponto no infinito com energia cinética nula. Aplicando-se a conservação da energia mecânica, determina-se a velocidade de escape:

$$E_{m,r} = E_{m,\infty} \Rightarrow -G \frac{Mm}{R} + \frac{1}{2} m v_e^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_e = \sqrt{G \frac{2M}{R}} \text{ (a velocidade de escape}$$

depende da massa do planeta e da distância ao centro do planeta, mas não depende da massa do corpo lançado).

Reescrevendo em função do campo

$$\text{gravítico: } v_e = \sqrt{G \frac{M}{r^2} 2r} = \sqrt{2 \mathcal{G} r}$$

(a velocidade de escape depende do campo gravítico do planeta).

**17.** Aplicando a conservação da energia mecânica, determina-se a velocidade de escape na Lua:

$$E_{m,r} = E_{m,\infty} \Rightarrow -G \frac{Mm}{R} + \frac{1}{2} m v_e^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_e = \sqrt{G \frac{2M}{R}} =$$

$$= \sqrt{6,67 \times 10^{-11} \times \frac{2 \times 7,35 \times 10^{22}}{1,74 \times 10^6}} =$$

$$= 2,37 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

A velocidade «média» de um átomo de árgon,  $v_{\text{árgon}}$ , pode ser determinada a partir

da energia cinética:  $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v_{\text{árgon}} =$

$$= \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 2,07 \times 10^{-23} \times 400}{6,02 \times 10^{-23}}} =$$

$$= 5,0 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}.$$

Comparando as velocidades, verifica-se

$$\text{que } \frac{v_{\text{árgon}}}{v_e} = \frac{5,0 \times 10^2}{2,37 \times 10^3} = 0,21 > 0,15, \text{ ou}$$

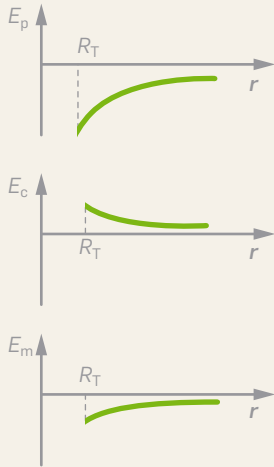
seja, a velocidade «média» é maior do que 15% da velocidade de escape.

**18.**  $E_{pg} = -G \frac{m_T m}{r}$ ; a velocidade orbital pode calcular-se a partir de

$$G \frac{m_T m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G \frac{m_T}{r}, \text{ portanto,}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mG\frac{m_T}{r} = G\frac{m_T m}{2r} = -\frac{1}{2}E_{pg};$$

$$E_m = E_{pg} + E_c = E_{pg} - \frac{1}{2}E_{pg} = \frac{1}{2}E_{pg} = -G\frac{m_T m}{2r}.$$



**19.** Desprezando a resistência do ar, a única força que atua sobre os aventureiros, de massa  $m$ , é a força gravítica, portanto, há conservação da energia mecânica. **a)** Na altura máxima,  $h = R_T$ , a velocidade é nula.

$$E_{m,\text{superfície}} = E_{m,h=R_T} \Rightarrow -G\frac{m_T m}{R_T} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -G\frac{m_T m}{R_T + R_T} \Rightarrow v_0 = \sqrt{G\frac{m_T}{R_T}}.$$

**b)** Na altura máxima, a velocidade, de módulo  $v$ , é a orbital calculada a partir de  $G\frac{m_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G\frac{m_T}{r}$ .

$$E_{m,\text{superfície}} = E_{m,h=R_T} \Rightarrow -G\frac{m_T m}{R_T} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -G\frac{m_T m}{R_T + R_T} + \frac{1}{2}mG\frac{m_T}{R_T + R_T} \Rightarrow v_0 = \sqrt{G\frac{3m_T}{2R_T}}.$$

**c)**  $E_{m,\text{superfície}} = E_{m,h=\infty} \Rightarrow -G\frac{m_T m}{R_T} + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{G\frac{2m_T}{R_T}}$

### Questões globais (pág. 156)

**20.** (D). A energia potencial do sistema *Lua-Terra* depende das massas destes planetas e da distância entre eles, que se mantém constante (trajetória circular). O momento linear e a aceleração não são constantes, pois variam em direção.

**21.** A conservação da energia mecânica permite escrever  $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{r}$ , sendo  $m$  a massa do projétil e  $r$  a distância ao centro do planeta do ponto de altura máxima. Como  $v^2 = G\frac{M}{R}$ , a expressão da conservação da energia mecânica fica  $\frac{GM}{2R} - \frac{GM}{R} = -\frac{GM}{r}$ , de onde se obtém  $r = 2R$ .

**22. a)** Trabalho nulo, pois a força gravítica é conservativa. O trabalho nulo também pode ser visto como resultado de a força gravítica ser sempre perpendicular à velocidade. **b) i)** Como  $F = G\frac{m_{Terra}m}{r^2}$ , se

$$r = 2R \text{ e } r' = 4R, \text{ então } \frac{F'}{F} = \frac{2^2}{4^2} = \frac{1}{4}.$$

**ii)** Como  $v = \sqrt{G\frac{m_{Terra}}{r}}$ , se  $r = 2R$  e

$$r' = 4R, \text{ então } \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**iii)** Como  $T^2 = \frac{2\pi r^3}{m_{Terra}}$ , se  $r = 2R$  e  $r' = 4R$ ,

$$\text{então } \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{4^3}{2^3}} = \sqrt{8}.$$

**iv)** Como  $E_p = -G\frac{m_{Terra}m}{r}$ , se

$$r = 2R \text{ e } r' = 4R, \text{ então } \frac{E_p'}{E_p} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

**23. a)** Conservação da energia mecânica:  $E_c + E_p = E_c' + E_p'$ , onde o membro esquerdo se refere à superfície da Terra e o direito à órbita a uma distância ao centro da Terra de  $r' = 3R_T$ , tendo então o corpo velocidade orbital  $v' = \sqrt{G\frac{m_T}{3R_T}}$ . Então

$$E_c = E_c' + E_p' - E_p = \frac{1}{2}m\frac{Gm_T}{3R_T} - \frac{Gm_T m}{3R_T} + \frac{Gm_T m}{R_T} = \frac{5}{6}G\frac{m_T m}{R_T}.$$

**b)** O trabalho realizado pela força gravítica é o simétrico da variação da energia potencial:  $W = -(E_{p,\text{final}} - E_{p,\text{inicial}}) = -\left(-G\frac{m_T m}{2R_T} + G\frac{m_T m}{3R_T}\right) = G\frac{m_T m}{6R_T}$ .

**24.** Aplicando diretamente a Terceira Lei de Kepler,  $\frac{T_D^2}{T_F^2} = \frac{r_D^3}{r_F^3}$ , vem

$$T_D = T_F \sqrt{\frac{r_D^3}{r_F^3}} = 7,66 \times \sqrt{\left(\frac{23\,460}{9377}\right)^3} = 30,3 \text{ h}.$$

**25. a)** A massa e o raio do CoRoT-7b são  $m_c = 5m_T$  e  $R_c = 1,6R_T$ . Os módulos do campo gravítico na Terra e em CoRoT-7b são, respetivamente,  $\mathcal{G}_T = G\frac{m_T}{R_T^2}$  e

$$\mathcal{G}_c = G\frac{5m_T}{1,6^2 R_T^2}, \text{ pelo que } \frac{\mathcal{G}_T}{\mathcal{G}_c} = \frac{1,6^2}{5} = 0,51.$$

**b)** Tem-se  $E_p = -G\frac{m_T m}{R_T}$  e  $E_p' = -G\frac{5m_T m}{1,6R_T}$

pelo que  $\frac{E_p'}{E_p} = \frac{1,6}{5} = 0,32$ . **c)** O módulo da

velocidade de escape é dado por  $v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2Gm_T}{R_T}}$  na Terra e por

$$v'_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2G \times 5 m_T}{1,6R_T}} \text{ no CoRoT-7b.}$$

$$\text{Portanto, } \frac{v'_{\text{escape}}}{v_{\text{escape}}} = \sqrt{\frac{1,6}{5}} = 0,57.$$

**26. a)** Como, inicialmente, o satélite se move em redor da Terra numa órbita circular, a sua velocidade é menor do que a velocidade de escape nessa posição, pois caso contrário o satélite afastar-se-ia sempre da Terra. Portanto, a sua energia cinética e, em consequência, a energia mecânica do sistema *satélite-Terra* é também menor do que correspondente à de uma sonda, da mesma massa, que conseguisse escapar à gravidade terrestre. Para a velocidade de escape, a energia mecânica é nula (no infinito a energia potencial é nula e, para a velocidade de escape, o corpo atinge um ponto no infinito com energia cinética nula), logo, a do satélite, sendo menor, é negativa.

**b)** Inicialmente, o satélite orbita a Terra numa trajetória circular de raio  $r_i = (6,37 \times 10^6 + 400 \times 10^3) \text{ m}$ . A velocidade orbital pode calcular-se a partir de

$$G\frac{m_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G\frac{m_T}{r}. \text{ A energia mecânica do sistema } \textit{satélite-Terra} \text{ é:}$$

$$E_{m,i} = E_{p,i} + E_{c,i} = -G\frac{m_T m}{r_i} + \frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{m_T m}{r_i} + \frac{1}{2}mG\frac{m_T}{r_i} = -G\frac{m_T m}{2r_i} = -6,67 \times 10^{-11} \times \frac{5,97 \times 10^{24} \times 750}{2 \times (6,37 \times 10^6 + 400 \times 10^3)},$$

obtendo-se  $E_{m,i} = -2,206 \times 10^{10} \text{ J}$ . Ao cair na Terra, a distância ao centro da Terra é  $r_f = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ , e a energia mecânica é:

$$E_{m,f} = E_{p,f} + E_{c,f} = -G\frac{m_T m}{r_f} + \frac{1}{2}mv^2 = -6,67 \times 10^{-11} \times \frac{5,97 \times 10^{24} \times 750}{6,37 \times 10^6} + \frac{1}{2} \times 750 \times$$

$\times (3,0 \times 10^3)^2$ , obtendo-se  $E_{m,f} = -4,351 \times 10^{10} \text{ J}$ . A energia dissipada é

$$E_{\text{dissipada}} = E_{m,i} - E_{m,f} = -2,206 \times 10^{10} - (-4,351 \times 10^{10}) = 2,15 \times 10^{10} \text{ J}.$$

**27.** (Aplicação das aprendizagens a novas situações e comunicação de descobertas e soluções de problemas utilizando a linguagem científica, com auxílio de tecnologias digitais.)

## 2.2 Campo elétrico

### 2.2.1 (pág. 189)

**1.** Os eletrões são partículas elementares, mas os prótons e os neutrões não são partículas elementares. Os prótons e neutrões são constituídos por *quarks*, que são partículas elementares cuja carga

elétrica é  $\frac{2e}{3}$  ou  $-\frac{e}{3}$  ( $e$  é a carga elétrica do próton).

**2.** Todas as partículas surgem na Natureza com carga elétrica que é um múltiplo inteiro de  $e = 1,602 \times 10^{-19}$  C; ora,  $\frac{9,00 \times 10^{-19}}{1,602 \times 10^{-19}} = 5,62$  não é um número inteiro. Apesar de os *quarks* terem carga elétrica fracionária, nunca se observou um *quark* livre (a carga dos *quarks* é múltipla de  $\frac{e}{3}$  e a carga apresentada não é múltipla de  $\frac{e}{3}$ ).

**3. a)** Como o sistema das duas esferas é isolado, a carga elétrica total permanece constante:  $Q_A + Q_B = 3,0 + 1,0 = 4,0 \mu\text{C}$ . Como as esferas são idênticas, e a carga elétrica pode circular entre elas por serem condutoras, no final devem apresentar a mesma carga, portanto,

$$Q_A = Q_B = \frac{4,0}{2} = 2,0 \mu\text{C. b)}$$

A esfera que ganha elétrons é a que fica menos positiva, a esfera A:  $\Delta Q_A = 2,0 - 3,0 = -1,0 \mu\text{C}$ .

**c)** Houve transferência de  $-1,0 \mu\text{C}$  da esfera B para a esfera A, ou seja,

$$\frac{-1,0 \times 10^{-6} \text{ C}}{-1,602 \times 10^{-19} \text{ C}} = 6,2 \times 10^{12} \text{ elétrons.}$$

**4. a)** Duas grandezas são diretamente proporcionais se o seu quociente for constante. Assim:

$$F = k \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \Rightarrow \frac{F}{|Q_1||Q_2|} = \frac{k}{r^2} \text{ é uma}$$

constante se as cargas estiverem sempre à mesma distância  $r$  uma da outra.

**b)** (D). Como a distância aumenta 200% ( $r' = r + 2r = 3r$ ), segue-se que

$$F' = k \frac{|Q_1||Q_2|}{(3r)^2} = \frac{1}{9}k = \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} = \frac{1}{9}F.$$

**c)** (A). As forças têm a mesma intensidade:

$$F = F' \Rightarrow k \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} = k \frac{2|Q_1| \times 3|Q_2|}{r'^2} \Rightarrow r'^2 =$$

$$= 6r^2 \Rightarrow r' = \sqrt{6}r.$$

**5.** A intensidade da força entre duas cargas elétricas,  $Q$  e  $q$ , à distância  $r$  uma da outra,

$$\text{é } F = k \frac{|Q||q|}{r^2} \text{ em que } k \text{ é a constante}$$

elétrica do meio em que as cargas se encontram. **a)** (A). Na função  $F = F(r)$  a intensidade da força,  $F$ , diminui com o quadrado da distância, tendendo para zero quando a distância tende para infinito (no gráfico B,  $F$  também diminui mas a variação é linear, o que não é compatível com a dependência com o inverso do quadrado).

**b)** (C). Se fizermos  $x = \frac{1}{r^2}$ , a expressão

$$\text{da intensidade da força, } F = k|Q||q|\frac{1}{r^2},$$

escreve-se  $F = k|Q||q|x$ . Portanto, o gráfico de  $F = F(x)$  é uma linha reta, de declive  $k|Q||q|$ , que passa na origem.

**6. a)** Inicialmente, a intensidade da força exercida em cada uma das esferas é

$$F = k_0 \frac{3q \times q}{r^2} \Rightarrow 4,00 \times 10^{-5} = 3k_0 \frac{q^2}{r^2}.$$

Após o contacto e separação, cada uma das esferas fica com a mesma carga,

$$\frac{3q + q}{2} = 2q, \text{ sendo a intensidade da força}$$

exercida em cada uma das esferas

$$F' = k_0 \frac{2q \times 2q}{r^2} = 4k_0 \frac{q^2}{r^2}. \text{ A partir das equações}$$

anteriores, a relação entre as duas forças é

$$\frac{F'}{F} = \frac{4k_0 \frac{q^2}{r^2}}{3k_0 \frac{q^2}{r^2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow F' = 5,33 \times 10^{-5} \text{ N.}$$

**b)** A força seria oito vezes menor (a constante da Lei de Coulomb é inversamente proporcional à permitividade elétrica).

$$\text{Nesse meio teríamos } F_{\text{meio}} = k_{\text{meio}} \frac{2q \times 2q}{r^2} =$$

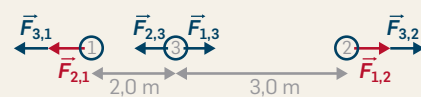
$$= \frac{1}{4\pi \times 8\epsilon_0} \times \frac{4q^2}{r^2} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{4q^2}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{8} \times k_0 \frac{4q^2}{r^2} = \frac{F_{\text{ar}}}{8}.$$

**7.** (C). Como  $F = E|q|$ , sendo  $E$  o módulo do campo elétrico, a função  $F = F(|q|)$  é uma reta, de declive  $E$ , que passa pela origem.

**8.** A quebra das ligações quando se dissolve sal em água leva a um afastamento médio muito maior entre os iões  $\text{Cl}^-$  e  $\text{Na}^+$ , com consequente acentuada diminuição da força de atração média entre iões, o que justifica o aumento da sua mobilidade.

**9. a)** (C). As forças exercidas entre 1 e 2 não têm uma relação bem definida com as forças exercidas sobre 3, pois as primeiras não dependem de  $q_3$  e as segundas dependem de  $q_3$ . De acordo com a Lei da Ação-reação, a força que 3 exerce sobre 1 é simétrica da força que 1 exerce sobre 3. Como 3 está em equilíbrio, a força que 2 exerce sobre 3 é simétrica da força que 1 exerce sobre 3. Pode, portanto, concluir-se que a força que 3 exerce sobre 1 é idêntica à força que 2 exerce sobre 3. Na figura exemplifica-se, considerando  $q_3 > 0$  (se o sinal de  $q_3$  mudar, as forças exercidas por 1 e 2 sobre 3 mudam ambas de sentido, mantendo-se o equilíbrio), as forças de interação entre as cargas (os vetores a azul têm todos o mesmo módulo).



**b)** Como 3 está em equilíbrio, as forças exercidas por 1 e 2, sendo simétricas, têm o mesmo módulo:

$$F_{1,3} = F_{2,3} \Rightarrow k \frac{q_1|q_3|}{2,00^2} = k \frac{q_2|q_3|}{3,00^2} \Rightarrow q_2 = \frac{9}{4}q_1,$$

$$\text{assim } q_2 = \frac{9}{4} \times 5,00 = 11,3 \mu\text{C.}$$

## 2.2.2 (pág. 190)

**10.** (D). A intensidade de um campo elétrico,  $E$ , criado por uma carga num ponto é inversamente proporcional ao quadrado da distância,  $r$ , à carga criadora: quando a distância duplica, o campo elétrico diminui quatro vezes.

**11.** O módulo do campo elétrico criado por uma carga pontual  $Q$  num ponto, à distância  $r$  da carga, é  $E = k \frac{|Q|}{r^2}$  em que  $k$  é

uma constante. **a)** (C). Como  $E = \frac{k}{r^2}|Q|$ , a

função  $E = E(|Q|)$  para  $r$  constante, é uma reta, de declive  $\frac{k}{r^2}$ , que passa na origem.

**b)** (A). Como  $E = \frac{k|Q|}{r^2}$ , o módulo do campo

elétrico,  $E = E(r)$ , para  $Q$  constante, diminui com o quadrado da distância  $r$  à carga, tendendo para zero quando a distância tende para infinito (no gráfico B,  $E$  também diminui, mas a variação é linear, o que não é compatível com uma variação com o inverso do quadrado). **c)** (C). Se  $Q$  for constante e como  $k$  é uma constante, então o produto  $k|Q|$  é uma constante, por isso

$E$  e  $\frac{1}{r^2}$  são diretamente proporcionais

( $E = k|Q|\frac{1}{r^2}$ ): o gráfico é uma reta cujo

declive é  $k|Q|$ .

**12. a)** O campo elétrico é nulo no ponto em que os campos elétricos criados por cada uma das duas cargas forem simétricos: mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos. Como as cargas são idênticas, tal verifica-se no ponto médio do segmento de reta que une os vértices onde se encontram as cargas.

**b)** O campo criado no vértice por cada uma

$$\text{das cargas é, em módulo, } E_1 = E_2 = k \frac{Q}{r^2} =$$

$$= 9,0 \times 10^9 \times \frac{5,00 \times 10^{-6}}{0,40^2} = 2,81 \times 10^5 \text{ N C}^{-1}.$$

O campo resultante,  $\vec{E}_1 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , tem

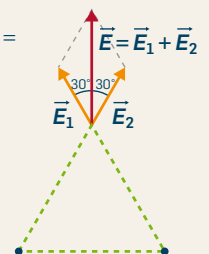
componentes segundo  $x$  que se anulam e componentes segundo  $y$  que se somam, logo,

$$E = E_{1y} + E_{2y} =$$

$$= 2 \times 2,81 \times 10^5 \times \cos 30^\circ =$$

$$= 4,86 \times 10^5 \text{ N C}^{-1}.$$

O campo tem módulo  $4,9 \times 10^5 \text{ N C}^{-1}$ , direção do eixo  $y$  e sentido positivo deste eixo.



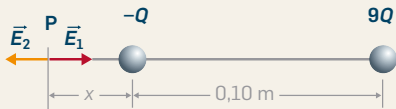


**c)** O módulo da força é  $F = |q|E = 3,00 \times 10^{-6} \text{ C} \times 4,86 \times 10^5 \text{ N C}^{-1} = 1,5 \text{ N}$ .

**13. a)** Os campos em A, produzidos por cada carga, têm a mesma direção e sentidos opostos, pois a soma é nula; por isso, as cargas têm de ter o mesmo sinal (ambas positivas ou ambas negativas). Então, as intensidades dos campos produzidos por cada carga têm de ser iguais:

$$k \frac{9Q}{d_1^2} = k \frac{Q}{d_2^2} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = 3.$$

**b)** Neste caso, o campo anula-se num ponto que não pode situar-se entre as cargas. Como uma carga tem menor módulo do que a outra, o ponto terá de situar-se mais próximo da carga de menor módulo, como mostra a figura:



As intensidades dos campos têm de ser iguais,

$$E_1 = E_2 \Rightarrow k \frac{Q}{x^2} = k \frac{9Q}{(x + 0,10)^2} \Rightarrow (x + 0,10)^2 = 9x^2 \Rightarrow x = 0,050 \text{ m}.$$

O campo anula-se num ponto situado a 5,0 cm da carga de menor módulo.

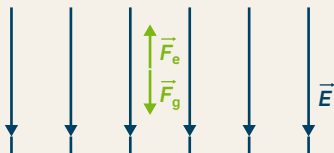
**14. a)** Como há equilíbrio, a força elétrica e a força gravítica são simétricas, portanto, têm a mesma intensidade:  $F_g = F_e \Rightarrow mg = |q|E$ , obtendo-se

$$|q| = \frac{mg}{E} = \frac{3,00 \times 10^{-3} \times 10}{150} = 2,0 \times 10^{-4} \text{ C}.$$

Como a carga é negativa, conclui-se que  $q = -2,0 \times 10^{-4} \text{ C}$ . **b)** O campo elétrico é

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q},$$

tendo a mesma direção de  $\vec{F}_e$ , vertical; como  $q < 0$ ,  $\vec{E}$  tem sentido oposto ao de  $\vec{F}_e$ , apontando para baixo. **c)** As linhas de campo são as indicadas na figura: têm a direção e sentido do campo e são equidistantes dado o campo ser uniforme.

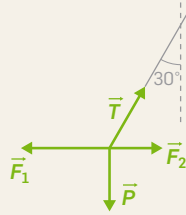


**d)** (A). Sobre a partícula atuam duas forças, a elétrica, que é a mesma pois a carga e o campo elétrico não se alteram, e a gravítica, que é menor dado a partícula ter menor massa. Assim, a resultante das forças terá a direção e o sentido da força elétrica, vertical para cima, e, portanto, a aceleração terá também essa direção e esse sentido:

$$F_R = F_e - F_g = ma \Rightarrow a = \frac{F_e - F_g}{m}.$$

**15.** Cada partícula fica sujeita a quatro forças: o peso,  $\vec{P}$ , a tensão exercida pela corda,  $\vec{T}$ , a força elétrica devida ao campo elétrico uniforme,  $\vec{E}_1$ , e a força elétrica

de atração exercida pela outra partícula carregada,  $\vec{F}_2$ . A figura representa o diagrama de forças para a partícula da esquerda (semelhante ao da direita).



A resultante das forças é nula, logo,  $T \cos 30^\circ = mg$  e  $T \sin 30^\circ + F_2 = F_1$ ; por isso,

$$F_1 - F_2 = mg \tan 30^\circ, \text{ logo, } F_1 = k \frac{q^2}{l^2} +$$

$+ mg \tan 30^\circ = 3,18 \times 10^{-2} \text{ N}$  (a distância entre as partículas é igual ao comprimento,  $l$ , de cada fio, dado que a linha que une as cargas e os fios formam um triângulo equilátero). A intensidade do campo elétrico é

$$E = \frac{F_1}{|q|} = \frac{3,18 \times 10^{-2} \text{ N}}{0,30 \times 10^{-6} \text{ C}} = 1,1 \times 10^5 \text{ N C}^{-1}.$$

### 2.2.3 (pág. 191)

**16. (A)** Verdadeira. Os eletrões têm mobilidade no metal, deslocando-se até atingirem estabilidade máxima, a que corresponde a configuração de energia mínima. **(B)** Falsa. A carga distribui-se à superfície, pois essa distribuição minimiza a repulsão elétrica e, por isso, minimiza a energia do sistema. **(C)** Falsa. O campo elétrico é nulo no interior do condutor em equilíbrio eletrostático, pois se assim não fosse haveria força sobre eletrões e estes deslocar-se-iam (contrariando a hipótese de o condutor estar em equilíbrio).

**(D)** Verdadeira. Se houvesse componente tangencial do campo haveria força tangencial sobre as cargas e movimento destas (contrariando a hipótese de o condutor estar em equilíbrio). **(E)** Falsa. A acumulação de cargas ocorre nas regiões mais pontiagudas.

**17. a)** (A). Todos os pontos do condutor (interior e superfície) estão ao mesmo potencial quando este se encontra em equilíbrio eletrostático. O facto de as linhas de campo elétrico serem, em cada ponto, perpendiculares à superfície, indica que esta é uma superfície equipotencial.

**b)** Campo elétrico máximo: ponto A (o mais pontiagudo); campo elétrico nulo: ponto D (ponto no interior do condutor).

**c)**



**18.** Se a forma não fosse arredondada, mas tivesse zonas pontiagudas, acumular-se-iam mais cargas nessas pontas e o campo seria aí muito intenso (poder das pontas). Haveria constantemente descargas para o solo a partir dessas zonas, sendo mais difícil armazenar carga na cúpula do gerador.

**19. a)** Quando um corpo descarrega rapidamente, pode produzir uma faísca. Tal acontece quando o campo produzido é de tal modo intenso que um material isolador pode tornar-se condutor, como é o caso do ar (o que depende da humidade). O campo elétrico origina ionizações, excitações atômicas e moleculares. Os átomos e as moléculas ao desexcitarem-se produzem a faísca. **b)** Uma nuvem carregada induz carga elétrica no solo. Esta acumula-se essencialmente nas regiões mais altas e pontiagudas, criando-se aí campos mais intensos (poder das pontas). Por isso é provável que a nuvem descarregue sobre as árvores (origina-se uma corrente elétrica entre a nuvem e a árvore), o que as torna perigosas. **c)** O automóvel tem uma caixa metálica que atua como uma gaiola de Faraday: o campo no seu interior é nulo, havendo uma blindagem das ações elétricas exteriores. Logo, é mais seguro ficar dentro do automóvel.

**20.** Não resolveu o problema porque uma rede metálica (gaiola de Faraday) tem um efeito de blindagem relativamente a efeitos elétricos exteriores e não o contrário. Por isso, deveria ter envolvido os outros aparelhos para os proteger de efeitos elétricos exteriores.

### 2.2.4 (pág. 192)

**21. (A)** Verdadeira. O trabalho da força elétrica ou gravítica é o mesmo entre dois pontos, qualquer que seja a trajetória. **(B)** Falsa. Depende do produto das duas cargas (para a mesma soma existe uma infinidade de produtos diferentes). **(C)** Verdadeira.

Como  $E_p = kQq \frac{1}{r}$ , a função  $E_p = E_p \left( \frac{1}{r} \right)$  para

determinadas cargas,  $Q$  e  $q$ , é uma reta, de declive  $hQq$ , que passa na origem. Pode, pois, concluir-se que a energia potencial elétrica,  $E_p$ , é diretamente proporcional ao inverso da distância entre duas cargas,  $\frac{1}{r}$ . **(D)** Verdadeira. Em geral, a energia

potencial varia de ponto para ponto (tal como no campo gravítico, a conservação da energia mecânica impõe que também a energia cinética possa variar). **(E)** Falsa.

Como  $E_p = k \frac{Qq}{r}$ , se as cargas,  $Q$  e  $q$ , tiverem o mesmo sinal ( $Qq > 0$ ), a energia potencial será positiva e tanto maior quanto menor for a distância,  $r$ , entre as cargas.

**22. a)**  $E_p = qV$ .

**i)**  $E_p = 1,0 \times 10^{-6} \times 1,0 \times 10^5 = 0,10 \text{ J}$ .

**ii)**  $E_p = 2,0 \times 100 \times 10^6 = 2,0 \times 10^8 \text{ J}$ .

**b)** Sim, porque a energia na descarga de uma nuvem é muitíssimo maior: nove ordens de grandeza superior à descarga de um Van de Graaff

$$\left( \frac{2,0 \times 10^8}{0,10} = 2,0 \times 10^9 \sim 10^9 \right).$$

**23. a)** Como  $E_p(P) - E_p(\infty) = W^{P \rightarrow \infty} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_p(P) - 0 = 20 \text{ J} \Rightarrow E_p(P) = 20 \text{ J. O}$$

potencial em P é

$$V(P) = \frac{E_p(P)}{q} = \frac{20}{8,0 \times 10^{-6}} = 2,5 \times 10^6 \text{ V.}$$

**b)** O trabalho da resultante das forças é nulo pois não há variação da energia cinética. Por isso, o trabalho da força exterior é simétrico do trabalho da força elétrica:  $-20 \text{ J}$ . **c)** As linhas apontam de P para o ponto distante pois o trabalho da força elétrica sobre uma carga positiva é positivo.

**24.** O potencial em C é a soma dos potenciais criados por cada carga:

$$V_c = k \frac{q}{l} + k \frac{q}{l} + k \frac{(-q)}{\sqrt{2}l} = 9,0 \times 10^9 \times$$

$$\times \frac{3,0 \times 10^{-6}}{0,10} \times \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 3,49 \times 10^5 \text{ V.}$$

No centro do quadrado, o potencial é

$$V_0 = k \frac{q}{\frac{\sqrt{2}}{2}l} + k \frac{q}{\frac{\sqrt{2}}{2}l} + k \frac{(-q)}{\frac{\sqrt{2}}{2}l} = 9,0 \times 10^9 \times$$

$$\times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{3,0 \times 10^{-6}}{0,10} = 3,82 \times 10^5 \text{ V. O}$$

trabalho é  $W^{C \rightarrow 0} = q(V_c - V_0) = -90 \times 10^{-9} \times$   
 $\times (3,49 \times 10^5 - 3,82 \times 10^5) = 3,0 \times 10^{-3} \text{ J}$ .

**25. a)** Em A, os campos elétricos criados por  $Q_1$  e por  $Q_2$  têm a direção do eixo dos  $xx$  e o sentido positivo desse eixo:

$$\vec{E}(A) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left( k \frac{|Q_1|}{r_1^2} + \frac{|Q_2|}{r_2^2} \right) \vec{e}_x = 9,0 \times 10^9 \times$$

$$\times \left( \frac{5,00 \times 10^{-6}}{0,04^2} + \frac{5,00 \times 10^{-6}}{0,08^2} \right) \vec{e}_x =$$

$$= 3,5 \times 10^7 \vec{e}_x \text{ (N C}^{-1}\text{)}.$$

A força elétrica exercida sobre uma carga  $q$  colocada em A é:

$$\vec{F} = q\vec{E}(A) = -2,0 \times 10^{-6} \times 3,5 \times 10^7 \vec{e}_x = -70 \vec{e}_x \text{ (N)}$$

(a força tem sentido oposto ao campo porque a carga de prova é negativa).

**b)** Potencial em A:

$$V(A) = V_1 + V_2 = k \frac{Q_1}{r_{1A}} + k \frac{Q_2}{r_{2A}} = 9,0 \times 10^9 \times$$

$$\times \left( \frac{5,00 \times 10^{-6}}{0,04} + \frac{-5,00 \times 10^{-6}}{0,08} \right) = 5,6 \times 10^5 \text{ V,}$$

em que  $r_{1A} = 0,04 \text{ m}$  e  $r_{2A} = 0,08 \text{ m}$  são, respectivamente, as distâncias das cargas  $Q_1$  e  $Q_2$  ao ponto A. Potencial em C:

$$V(C) = V_1 + V_2 = k \frac{Q_1}{r_{1C}} + k \frac{Q_2}{r_{2C}} = 9,0 \times 10^9 \times$$

$$\times \left( \frac{5,00 \times 10^{-6}}{\sqrt{0,08^2 + 0,05^2}} + \frac{-5,00 \times 10^{-6}}{\sqrt{0,04^2 + 0,05^2}} \right) =$$

$$= -2,3 \times 10^5 \text{ V, em que}$$

$$r_{1C} = \sqrt{0,08^2 + 0,05^2} \text{ m e}$$

$$r_{2C} = \sqrt{0,04^2 + 0,05^2} \text{ m são, respectivamente,}$$

as distâncias das cargas  $Q_1$  e  $Q_2$  ao ponto C.

**c)** (A). O trabalho da força elétrica que atua

numa carga  $q$  não depende da trajetória,

mas depende da carga, dado que esta

influencia a força elétrica. **d)** O trabalho

da força elétrica que atua na carga  $q$  não

depende da trajetória seguida entre A e C,

sendo função dos potenciais desses pontos

e da carga elétrica  $q$  transportada entre

esses pontos:  $W^{A \rightarrow C} = q(V_A - V_C) = -2,00 \times$

$\times 10^{-6} \times [5,63 \times 10^5 - (-2,26 \times 10^5)] = -1,6 \text{ J}$ .

**26.** (C). Se  $W^{A \rightarrow C} = q(V_A - V_C) > 0$ , como

$q < 0$ , então  $(V_A - V_C) < 0$ , ou seja,  $V_A < V_C$ ;

então, como o potencial elétrico diminui

com a distância à carga  $Q$ , esta terá

de ser positiva. O trabalho entre linhas

equipotenciais ( $S_1$  e  $S_2$ ) não depende da

trajetória entre elas, pois a força elétrica é

conservativa. Se o trabalho for positivo de

A para C, terá de ser negativo de C para A

(ou de B para A), logo, a variação da energia

potencial elétrica é positiva. Por isso, a

energia potencial elétrica aumenta de B

para A:  $E_{p,A} - E_{p,B} = -W^{B \rightarrow A} > 0$ .

**27. a)** O campo elétrico tem módulo

$$E = \frac{U}{d} = \frac{2,00 \times 10^3}{5,00 \times 10^{-2}} = 4,00 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}.$$

**i)** Ao longo de uma linha de campo vem

$$U = Ed = 4,00 \times 10^4 \times 2,00 \times 10^{-2} = 800 \text{ V.}$$

**ii)** O V, porque estão ao mesmo potencial.

**b)** A resultante das forças que atuam

sobre a partícula é nula, dado que a sua

velocidade é constante. Assim, as forças

elétrica e gravítica são simétricas, portanto,

têm a mesma intensidade:  $mg = |q|E \Rightarrow$

$$\Rightarrow |q| = \frac{mg}{E} = \frac{2,00 \times 10^{-3} \times 10}{4,00 \times 10^4} = 5,0 \times 10^{-7} \text{ C.}$$

A força elétrica tem sentido oposto à gravítica, sendo, por isso, dirigida para cima. Como a placa superior é negativa, a carga da partícula tem de ser positiva:

$$q = 5,0 \times 10^{-7} \text{ C.}$$

**28. a)** O eletrão desloca-se para a placa positiva e o protão para a negativa, ambos com movimento retilíneo uniformemente

acelerado (partem do repouso e estão sujeitos a uma força constante).

**b)** Os módulos das cargas do eletrão e do protão são iguais; assim, os módulos das forças elétricas que neles atuam é também o mesmo:  $F = |q|E = eE$ . Como

são colocados a meia distância entre as placas vão sofrer o mesmo deslocamento

até atingirem a respetiva placa (o eletrão

desloca-se no sentido da placa positiva e o protão no sentido da placa negativa), em módulo  $\frac{d}{2}$ . Segue-se que os trabalhos da

resultante das forças que neles atuam são também iguais, logo, também a energia

cinética adquirida:  $\Delta E_c = W_F = F \frac{d}{2} \cos 0^\circ$ .

**c)** O eletrão é atraído para a placa positiva. A diferença de potencial entre a placa positiva e o ponto médio entre as placas é

$$U' = \frac{U}{2}, \text{ então } \Delta E_p = -eU' = -\frac{eU}{2}. \text{ A variação}$$

de energia mecânica é nula (a força elétrica é conservativa), pelo que  $\Delta E_c = -\Delta E_p = \frac{eU}{2}$ .

Como o eletrão parte do repouso, esta é a energia cinética com que atinge a placa positiva.

**d)** O módulo da aceleração de cada partícula

$$\text{é } a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}, \text{ mas, como } E = \frac{U}{d}, \text{ então}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eU}{md}.$$

Esta expressão mostra que a partícula de menor massa tem maior aceleração, irá

percorrer a mesma distância em menos tempo. Como a massa do eletrão é menor

do que a do protão, o tempo de voo do eletrão é menor do que o do protão.

**e)** Como o movimento é uniformemente acelerado e cada partícula percorre a

distância  $\frac{d}{2}$ , vem  $\frac{d}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{eU}{md} \right) t^2$  obtendo-se

$$t = d \sqrt{\frac{m}{eU}} \text{ (o tempo de voo é diretamente}$$

proporcional à raiz quadrada da massa da partícula).

O quociente entre os tempos do protão e do eletrão para atingir a respetiva placa é:

$$\frac{t_{\text{protão}}}{t_{\text{eletrão}}} = \frac{d \sqrt{\frac{m_{\text{protão}}}{eU}}}{d \sqrt{\frac{m_{\text{eletrão}}}{eU}}} = \sqrt{\frac{m_{\text{protão}}}{m_{\text{eletrão}}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1,67 \times 10^{-27}}{9,11 \times 10^{-31}}} = 42,8 \text{ (o protão demora}$$

cerca de 43 vezes mais do que o eletrão a atingir a respetiva placa).

**29. a)** A variação de energia cinética é:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} \times 9,11 \times 10^{-31} \times$$

$$\times [(3,0 \times 10^6)^2 - (8,0 \times 10^6)^2] = -2,5 \times 10^{-17} \text{ J.}$$

Como a variação da energia mecânica é nula (o campo elétrico é conservativo), vem:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p, \text{ ou seja, } \Delta E_p = 2,5 \times 10^{-17} \text{ J.}$$

**b)** A diferença de potencial é

$$V_B - V_A = \frac{\Delta E_p}{-e} = \frac{2,51 \times 10^{-17}}{-1,602 \times 10^{-19}} = -1,6 \times 10^2 \text{ V}$$

(uma vez que a energia cinética do eletrão diminui, tal significa que se está a aproximar

da placa negativa, movendo-se, portanto, no sentido dos potenciais decrescentes).

**c)** O campo elétrico tem módulo

$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{1,56 \times 10^2}{3,0 \times 10^{-3}} = 5,2 \times 10^4 \text{ V m}^{-1},$$

direção horizontal e sentido dos potenciais decrescentes, ou seja, de A para B. As linhas equipotenciais são perpendiculares ao campo. **d)** O elétron inverte o sentido quando a sua velocidade se anula, a que corresponde uma variação de energia cinética

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2} \times 9,11 \times 10^{-31} \times$$

$\times (8,0 \times 10^6)^2 = -2,92 \times 10^{-17} \text{ J}$ . Assim, a inversão ocorre num ponto C, cujo potencial em relação a A é

$$V_C - V_A = \frac{\Delta E_p}{-e} = \frac{2,92 \times 10^{-17}}{-1,602 \times 10^{-19}} = -182 \text{ V}.$$

Como o campo é uniforme, segue-se que

$$d = \frac{|V_C - V_A|}{E} = \frac{182}{5,2 \times 10^4} = 3,5 \times 10^{-3} \text{ m} =$$

$3,5 \text{ mm}$ . **e)** (A). Como a energia mecânica é constante, o elétron numa determinada posição tem a mesma energia potencial e, em consequência, a mesma energia cinética. Passa em A após inverter o sentido do seu movimento, por isso, com uma velocidade simétrica da inicial. A resultante das forças, a força elétrica, é constante, logo, a aceleração é também constante.

**30. a)** A variação de energia mecânica é nula (a força elétrica é conservativa), pelo que  $\Delta E_c = -\Delta E_p = -(e)(V_f - V_i)$ .

No limite, o elétron atinge a placa negativa com velocidade paralela a essa placa, portanto, a componente do seu deslocamento na direção perpendicular às placas é igual à separação  $d = 2,00 \text{ cm}$  das placas:  $\Delta E_c = e(-Ed) = -eEd = -1,60 \times 10^{-19} \times 1,00 \times 10^3 \times 2,00 \times 10^{-2} = -3,20 \times 10^{-18} \text{ J}$ .

**b)** (B). A aceleração tem a direção e o sentido da resultante das forças, a força elétrica: perpendicular às placas (a direção do campo elétrico) e, dado o elétron ter carga negativa, o sentido da placa negativa para a positiva. **c)** No limite, o elétron atinge a placa negativa com velocidade paralela a essa placa,  $v = v_x$ , tomando o referencial habitual, nesse ponto, a componente da velocidade na direção perpendicular às placas, a do eixo dos  $yy$ , é nula. Assim, a variação de energia cinética é:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m[v_x^2 - (v_{ox}^2 + v_{oy}^2)] =$$

$$= \frac{1}{2}mv_{oy}^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2 30^\circ, \text{ uma vez que}$$

na direção do eixo dos  $xx$  o movimento é uniforme (a resultante das forças, a força elétrica, é perpendicular às placas). Da equação anterior obtém-se o módulo da velocidade máxima de lançamento,

$v_0 = \frac{1}{\sin 30^\circ} \sqrt{\frac{2(-\Delta E_c)}{m}}$ . Substituindo os valores nesta expressão determina-se

$$v_0 = \frac{1}{\sin 30^\circ} \sqrt{\frac{2 \times 3,20 \times 10^{-18}}{9,11 \times 10^{-31}}} =$$

$$= 5,3 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

Ou:

O elétron fica sujeito à força elétrica constante, dirigida para baixo, cujo módulo é:  $F = eE = 1,60 \times 10^{-19} \times 1,00 \times 10^3 = 1,60 \times 10^{-16} \text{ N}$  (esta força é  $10^{13}$  maior do que a força gravítica, que se pode, portanto, desprezar). Logo,  $a_x = 0$  e

$$a_y = \frac{-F}{m} = \frac{-1,60 \times 10^{-16}}{9,11 \times 10^{-31}} = -1,76 \times 10^{14} \text{ m s}^{-2}.$$

Tomando o referencial habitual, no ponto mais alto verifica-se  $v_y = 0$ , donde

$$\begin{cases} \Delta y = v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ 0 = v_{oy} + a_y t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta y = -v_{oy} \frac{v_{oy}}{a_y} + \frac{1}{2}a_y \frac{v_{oy}^2}{a_y^2} \\ t = -\frac{v_{oy}}{a_y} \end{cases}$$

Da primeira equação obtém-se  $v_{oy} = \sqrt{-2a_y \Delta y}$ .

Ao atingir a outra placa,  $\Delta y = 2,00 \text{ cm}$ , o que permite determinar o módulo da velocidade inicial:

$$v_0 = \frac{\sqrt{-2 \times (-1,76 \times 10^{14}) \times 2,00 \times 10^{-2}}}{\sin 30^\circ} =$$

$5,3 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ . **d) i)** Ao voltar à placa positiva,  $\Delta y = 0$ , donde  $v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0$ ,

equação que admite duas soluções: o

instante inicial  $t = 0$  e  $t = \frac{-2v_{oy}}{a_y}$ .

Obtém-se

$$t = \frac{-2 \times 2,0 \times 10^6 \times \sin 30^\circ}{-1,76 \times 10^{14}} = 1,1 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

**ii)** O deslocamento tem apenas componente paralela às placas, uma vez que  $\Delta y = 0$ :  $\Delta x = v_{ox}t = 2,0 \times 10^6 \times \cos 30^\circ \times 1,1 \times 10^{-8} = 0,020 \text{ m} = 20 \text{ mm}$ .

## 2.2.5 (pág. 194)

**31. a)** Ligam-se as armaduras do condensador a uma bateria ou outra fonte de tensão.

**b)** A diferença de potencial elétrico,  $U$ , entre as armaduras no condensador carregado é igual à da fonte de tensão:  $100 \text{ V}$ . Então, o módulo da carga das armaduras é  $Q = UC = 100 \times 5,0 \times 10^{-6} = 5,0 \times 10^{-4} \text{ C}$ . As cargas das armaduras são simétricas:  $5,0 \times 10^{-4} \text{ C}$  e  $-5,0 \times 10^{-4} \text{ C}$ .

**c)** (D). A capacidade de um condensador é uma propriedade do condensador que depende das características geométricas do condensador e do material isolador entre as armaduras (dielétrico). Um

determinado condensador tem uma capacidade,  $C = \frac{Q}{U}$ , constante: o módulo

da carga em cada uma das armaduras,  $Q$ , é diretamente proporcional à diferença de potencial,  $U$ , entre elas.

**32. a)** A diferença de potencial elétrico entre as placas é

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{3,0 \times 10^{-4}}{2,0 \times 10^{-6}} = 1,5 \times 10^2 \text{ V}.$$

O módulo do campo elétrico na região entre as placas é

$$E = \frac{U}{d} = \frac{150}{4,00 \times 10^{-3}} = 3,8 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}.$$

**b) i)** A diferença de potencial entre as placas é igual à da fonte da tensão, mantendo-se constante desde que o condensador esteja ligado à fonte.

**ii)** O módulo do campo elétrico é  $E = \frac{U}{d}$ ,

sendo  $U$  a diferença de potencial entre as placas e  $d$  a distância entre elas. Como  $U$  permanece constante e  $d$  duplica, conclui-se que  $E$  diminui para metade (o campo elétrico é, para uma determinada diferença de potencial, inversamente proporcional à distância  $d$  entre as placas).

**33.** Trabalho de pesquisa.

## Atividades Laboratoriais (pág. 195)

**34. a)** O campo elétrico criado entre as placas é um campo uniforme de direção perpendicular às placas.

**b)** A equação da reta de ajuste aos dados, expressos no SI, é  $V = -32,3d + 5,857$ .

**c)** O declive da reta de ajuste corresponde, em módulo, à diferença de potencial por unidade de distância medida perpendicularmente às placas,  $\frac{U}{|\Delta d|}$ ,

portanto, ao módulo do campo elétrico entre as placas:  $E = 32 \text{ V m}^{-1}$ . **d)** Como se mede o potencial em relação à placa negativa, tomando como referência a distância à placa positiva,  $V = 0$  corresponde a um ponto da placa negativa:  $0 = -32,2d + 5,857 \Rightarrow d = 0,181 \text{ m} = 18,1 \text{ cm}$ .

**e)** A leitura do voltímetro praticamente não se altera, pois as linhas de potencial constante (equipotenciais) são perpendiculares às linhas de campo e, por isso, paralelas às placas.

**f)** Os potenciais seriam simétricos aos apresentados na tabela. A equação da reta de ajuste teria declive e ordenada na origem simétricos à apresentada na alínea b):  $V = 32,3d - 5,857$  (o módulo do declive, igual ao módulo do campo elétrico, não se altera dado depender apenas da fonte de tensão e da distância entre as placas, parâmetros que não foram alterados).

**35. a)** Como o condensador descarrega sobre a resistência do voltímetro,

calculando o produto  $RC$ , que é a constante de tempo  $\tau$ , obtém-se  $\tau = RC = 10,0 \times 10^6 \times 10 \times 10^{-6} = 100$  s, o que significa que, ao fim deste tempo, a carga do condensador já só é 37% do valor inicial:  $e^{-\frac{t}{RC}} = e^{-1} = 0,37$ .

**b)** A descarga de um condensador é descrita pela expressão  $U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$  que é equivalente a:  $\ln U = -\frac{1}{RC} t + \ln U_0$ . Por isso, se representarmos graficamente  $\ln U$  em função do tempo  $t$ , obteremos um gráfico a que se ajusta uma reta, sendo o inverso do produto  $RC$  igual ao módulo do declive da reta, o que permite calcular a capacidade.

**c)** A reta de ajuste à função  $\ln U(t)$  é  $\ln U = -1,035 \times 10^{-2} t + 2,198$ . Com base no declive determina-se a capacidade do

condensador  $\frac{-1}{RC} = -1,035 \times 10^{-2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{10,0 \times 10^6 \times 1,035 \times 10^{-2}} =$$

$$= 9,66 \times 10^{-6} \text{ F} = 96,6 \text{ } \mu\text{F}.$$

$$\text{d)} \frac{U}{U_0} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \ln \left( \frac{U}{U_0} \right) = -\frac{1}{RC} t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ln 2 = -1,035 \times 10^{-2} t \Rightarrow t = 67 \text{ s}.$$

**e)** (C). O valor mais provável da diferença de potencial aos terminais do condensador no instante  $t = 20$  s determina-se com base na equação da reta de ajuste:

$$\ln U = -1,035 \times 10^{-2} \times 20 + 2,198 = 1,991, \text{ logo, } U = e^{1,991} V = 7,32 \text{ V}.$$

### Questões globais (pág. 195)

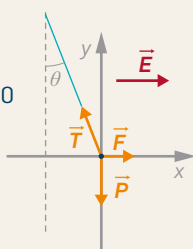
**36. (B).** Se  $d$  for a distância entre pontos sucessivos, virá  $V_Q = V_S = k \frac{q}{d} + k \frac{q}{3d} = \frac{4}{3} k \frac{q}{d}$  e  $V_R = k \frac{q}{2d} + k \frac{q}{2d} = k \frac{q}{d}$ , portanto,  $V_R < V_S = V_Q$ .

**37. a)** Sobre o corpo atuam três forças – o peso,  $\vec{P}$ , a tensão,  $\vec{T}$ , e a força elétrica,  $\vec{F} = q\vec{E}$ , representadas na figura – que se anulam (o pêndulo está em equilíbrio):  $\vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ .

Projetando as forças no sistema de eixos indicado obtém-se (a 1.ª equação é a do eixo dos  $xx$  e a 2.ª a do eixo dos  $yy$ ):

$$\begin{cases} F - T_x = 0 \\ T_y - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |q|E - T \sin \theta = 0 \\ T \cos \theta - mg = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = \frac{|q|E}{\sin \theta} \\ \frac{|q|E}{\sin \theta} \cos \theta - mg = 0 \end{cases}$$



Da segunda equação conclui-se que

$$E = \frac{mg \tan \theta}{|q|}.$$

$$\text{b)} \tan \theta = \frac{T_x}{T_y} = \frac{F}{P} = \frac{P}{P} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 26,6^\circ.$$

$$\text{c) (B). Como } \tan \theta = \frac{F}{P} = \frac{|q|E}{mg}, \text{ logo, o}$$

ângulo  $\theta$  aumenta com o quociente entre a força elétrica e o peso, ou seja, aumenta com o aumento da carga  $q$  e do campo elétrico  $\vec{E}$  e com a diminuição da massa  $m$  e da aceleração da gravidade  $\vec{g}$ .

**d) i)** Ao cortar-se o fio apenas atuam duas forças sobre o corpo: a força elétrica  $\vec{F}$  e o peso  $\vec{P}$ , cuja resultante é constante e tem a direção que o fio tinha antes de ser cortado (ou seja, a direção de  $\vec{T}$ ). Como estas forças são constantes e o corpo se encontra inicialmente em repouso, desce com movimento retilíneo uniformemente acelerado (aceleração constante) numa direção que faz um ângulo  $\theta$  com a vertical.

$$\text{ii) } a = \frac{F_R}{m} = \frac{\sqrt{F^2 + P^2}}{m} = \frac{\sqrt{(P \tan \theta)^2 + P^2}}{m} = \frac{mg \sqrt{\tan^2 \theta + 1}}{m} = g \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \frac{g}{\cos \theta}$$

**38. (B).** Todos os pontos sobre a linha AB estão a potenciais elétricos zero. Como a energia potencial elétrica do sistema de cargas é negativa, quando a distância entre elas diminui a energia potencial também diminui.

**39. a)** Como o potencial elétrico é negativo, a carga é negativa; as linhas são equipotenciais; o campo aponta para a carga (vetor 1) por esta ser negativa.

**b)** (D).  $W^{B \rightarrow A} = -(E_{pA} - E_{pB}) = q(V_B - V_A)$ . Como o vetor campo (vetor 1) aponta no sentido dos potenciais decrescentes, então  $V_A < V_B \Rightarrow V_B - V_A > 0$  e, como  $q < 0$ , então  $W^{B \rightarrow A} < 0$ . A intensidade do campo elétrico diminui com a distância à carga. Ao longo da linha equipotencial que passa em B e em C, a direção da força elétrica varia.

**40. a)** De  $U = Ed$  obtém-se o módulo do campo elétrico:  $E = \frac{U}{d} = \frac{90}{0,050} = 1,8 \times 10^3 \text{ V m}^{-1}$ .

Portanto,  $|V_Q - V_R| = 1800 \times 0,010 = 18 \text{ V}$ . Como as linhas de campo apontam no sentido dos potenciais decrescentes, então  $V_Q < V_R$ , logo,  $V_Q - V_R = -18 \text{ V}$ .

**b)** A força elétrica tem de ser igual e oposta ao peso da gota, ou seja, dirigida para cima. Como o campo aponta para cima, a carga da gota,  $q$ , tem de ser positiva. Como a resultante das forças é nula, tem-se:

$$qE = mg \Leftrightarrow q = \frac{mg}{E} = \frac{3,6 \times 10^{-8} \times 10}{1800} = 2,0 \times 10^{-10} \text{ C} = 20 \text{ nC}.$$

## 2.3 Ação de campos magnéticos sobre cargas e correntes elétricas

### 2.3.1 (pág. 216)

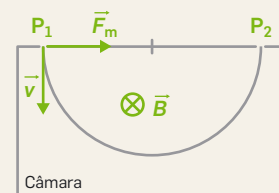
**1.** A primeira evidência de uma relação entre eletricidade e magnetismo foi observada por Oersted: uma corrente elétrica perturbava uma bússola. Esta relação foi confirmada por Ampère e por Faraday, que descobriu o fenómeno da indução eletromagnética. Maxwell sintetizou os resultados das experiências anteriores, formulando a teoria do campo eletromagnético que conduziu à descoberta de que este campo se propagava sob a forma de ondas à velocidade da luz, sugerindo que a luz era essa onda. Hertz viria a comprovar essa ideia produzindo experimentalmente ondas de rádio.

**2.** As linhas de campo magnético são sempre fechadas. As linhas de campo elétrico têm origem nas cargas positivas e terminam nas negativas.

**3.** Intensidade:  $F_m = evB \sin 90^\circ = evB$ , direção do eixo  $z$  e sentido negativo:

$$\vec{F}_m = -evB\vec{e}_z.$$

**4.** Como o movimento é circular uniforme, a força resultante, que é igual à força magnética (a força gravítica é desprezável), aponta para o centro da trajetória. No ponto  $P_1$  representam-se a força resultante e a velocidade: o vetor campo tem de ser perpendicular ao plano que contém a força e a velocidade, ou seja, perpendicular ao plano do papel; como a carga é positiva, aponta para o lado de lá do papel.



**5. (A)** Falsa. Só existe força magnética se a partícula estiver em movimento e se a direção da sua velocidade não coincidir com a do campo magnético.

**(B)** Verdadeira. A força magnética é sempre perpendicular à velocidade e ao campo magnético. **(C)** Verdadeira. A força gravítica é desprezável (massa desprezável), assim, a resultante das forças é a força magnética que é perpendicular à velocidade, daí o movimento ser uniforme. Como a velocidade,  $\vec{v}$ , é perpendicular ao campo,  $\vec{B}$ , e, por sua vez, a força magnética,  $\vec{F}_m$ , também é perpendicular a  $\vec{B}$ , segue-se que o plano definido por  $\vec{F}_m$  e  $\vec{v}$  é perpendicular



a  $\vec{B}$ . A partícula move-se nesse plano numa trajetória de raio constante,  $r = \frac{mv}{|q|B}$ ,

dado que o módulo da velocidade,  $v$ , é constante. **(D)** Falsa. A velocidade das partículas,  $\vec{v}$ , é perpendicular ao campo, assim como a força magnética,  $\vec{F}_m$ , logo, o plano do movimento das partículas (plano definido por  $\vec{F}_m$  e  $\vec{v}$ ) é perpendicular ao campo magnético.

**6. a) (A)** Falsa. Como  $\alpha$  não é desviada, é eletricamente neutra (a força magnética sobre  $\alpha$  é nula),  $\beta$  é positiva dado que ao entrar na região onde existe o campo magnético é desviada para a esquerda na direção e sentido do produto vetorial de  $\vec{v}$  e de  $\vec{B}$  (curvando os dedos da mão direita no sentido de  $\vec{v}$  para  $\vec{B}$ , o polegar aponta para a esquerda). **(B)** Verdadeira. O campo magnético é perpendicular à velocidade, assim  $F_m = |q|vB \sin 90^\circ = |q|vB$ , logo,  $|q|vB = m \frac{v^2}{r}$ , obtendo-se para o módulo

da velocidade  $v = \frac{|q|Br}{m}$  (a partícula que descreve a circunferência de maior raio  $r$ , a partícula  $d$ , tem maior velocidade).

**(C)** Verdadeira. Como  $c$  e  $d$  se desviam no mesmo sentido, a força magnética que nelas atua ao entrar na região considerada tem o mesmo sentido e, portanto, as cargas têm o mesmo sinal. **(D)** Falsa. A carga de  $a$  é nula ( $a$  é neutra), portanto, menor do que o módulo da carga de  $b$ .

**b)** Para que as partículas não fossem desviadas a força magnética deveria ser nula, o que aconteceria se o campo magnético,  $\vec{B}$ , fosse paralelo à sua velocidade:  $F_m = |q|vB \sin 0^\circ = 0$ . Assim, a direção de  $\vec{B}$  deveria ser a do movimento inicial das partículas na região considerada, ou seja, coincidente com a direção do movimento de  $a$ .

**7. a) i)** Sendo o movimento circular, segue-se que o campo magnético é perpendicular à velocidade da partícula. A força magnética é sempre perpendicular à velocidade, assim,  $F_m = ma_n \Rightarrow |q|vB \sin 90^\circ = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{|q|B}$ .

**ii)** O tempo de duas voltas completas é  $\Delta t = 2T$  em que  $T$  é o período (tempo de uma volta completa):

$$r = \frac{mv}{|q|B} \Rightarrow v = \frac{|q|Br}{m} \Rightarrow \frac{2\pi r}{T} = \frac{|q|Br}{m} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{|q|B} \Rightarrow \Delta t = \frac{4\pi m}{|q|B}$$

**iii)** A frequência é o inverso do período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m}$$

**iv)** A força magnética é sempre perpendicular à velocidade, portanto o trabalho realizado por essa força é sempre nulo, independentemente

do intervalo de tempo considerado. **v)** O movimento sob a ação da força magnética é sempre uniforme, o que significa que a energia cinética é constante:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left( \frac{|q|Br}{m} \right)^2 = \frac{q^2 B^2 r^2}{2m}$$

**b) (A)**. Como  $r = \frac{mv}{|q|B}$ , duplicando os

módulos da velocidade e do campo magnético o raio mantém-se o mesmo.

**8. a)** I- $\beta$ . II- $\gamma$ . III- $\alpha$ . A radiação  $\gamma$  é eletromagnética, constituída por fótons que não possuem carga elétrica. Assim, não é desviada (II). As partículas  $\alpha$  e  $\beta$  têm cargas de sinais opostos, daí serem desviadas em sentidos opostos. As partículas  $\alpha$  são as que descrevem uma circunferência de maior raio (III), uma vez que o raio aumenta com a massa,  $r = \frac{mv}{|q|B}$ ;

a partícula  $\alpha$ , constituída por dois prótons e dois nêutrons, é cerca de  $4 \times 1,8 \times 10^3$  vezes (quatro ordens de grandeza) mais pesada do que a partícula  $\beta$  (I), que é um elétron; a carga de  $\alpha$  é dupla da de  $\beta$ .

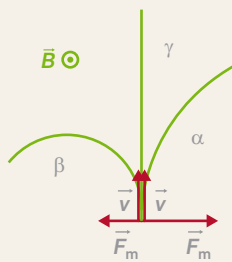
**b)** A força magnética é sempre perpendicular à velocidade, sendo, por isso, centrípeta. A expressão do raio obtém-se da Lei Fundamental da Dinâmica:

$$F_m = ma_n \Rightarrow |q|vB \sin 90^\circ = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{|q|B}$$

A razão entre os raios de  $\alpha$  e  $\beta$  é

$$\frac{r_\alpha}{r_\beta} = \frac{\frac{m_\alpha v_\alpha}{|q_\alpha|B}}{\frac{m_\beta v_\beta}{|q_\beta|B}} = \frac{m_\alpha v_\alpha |q_\beta|}{m_\beta v_\beta |q_\alpha|} = \frac{4 \times 1,8 \times 10^3 m_\beta v_\alpha |q_\beta|}{m_\beta 10 v_\alpha 2 |q_\beta|} = 3,6 \times 10^2$$

A ordem de grandeza do raio da trajetória III ( $\alpha$ ) é duas ordens de grandeza maior do que a do raio da trajetória I ( $\beta$ ). **c)** As partículas de carga positiva, trajetória III, são desviadas para a direita, portanto, este é o sentido em que aponta o polegar da mão direita curvando os restantes dedos no sentido de  $\vec{v}$  para  $\vec{B}$ , o que, neste caso, implica que  $\vec{B}$  aponte para fora da figura.



**9.** Sendo o movimento retilíneo e uniforme, a resultante das forças que atuam sobre a partícula é nula. Assim, a força magnética,

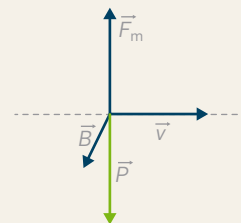
$\vec{F}_m$ , tem de ser oposta e de módulo igual ao peso da partícula,  $\vec{P}$ , para que a resultante das forças que atuam sobre ela seja nula:  $\vec{F}_m + \vec{P} = \vec{0}$ . Como  $\vec{F}_m$  é vertical, e tem de ser perpendicular à velocidade, conclui-se que a velocidade da partícula terá de ser num plano horizontal, tal como mostra a figura.

O campo magnético,  $\vec{B}$ , para ser perpendicular ao campo gravítico, tem de estar nesse mesmo plano horizontal. Se escolhermos o campo com a direção e sentido indicados na figura, e a fazer  $90^\circ$  com a velocidade, a força magnética de módulo dado por  $F_m = |q|vB$  aponta para cima (notar que a carga é negativa!). Igualando os módulos do peso e da força magnética, conclui-se que  $v = \frac{mg}{|q|B}$ . De notar

que há outras orientações possíveis para o campo  $\vec{B}$ . Se designarmos por  $\theta$  o ângulo entre a velocidade e o campo, a velocidade da partícula teria de ser  $v = \frac{mg}{|q|B \sin \theta}$ .

No caso representado na figura

$$(\theta = 90^\circ), v = \frac{0,040 \times 10^{-3} \times 10}{2,0 \times 10^{-6} \times 0,80} = 2,5 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}$$



**10. a) (D)**. Sendo o movimento circular, segue-se que o campo magnético é perpendicular à velocidade da partícula.

**b)** A força magnética que atua sobre a partícula é perpendicular à sua velocidade.

**c)** Da Lei Fundamental da Dinâmica:

$$F_m = ma_n \Rightarrow |q|vB \sin 90^\circ = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow |q|Br = mv \Rightarrow p = |q|Br \text{ (o raio e o momento linear de partículas da mesma carga, } q_1 = q_2,$$

são diretamente proporcionais):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{|q_1|Br_1}{|q_2|Br_2} = \frac{2,00}{0,40} = 5,0, \text{ logo,}$$

$$p_1 = 5,0 \times 6,68 \times 10^{-22} = 3,3 \times 10^{-21} \text{ kg m s}^{-2}$$

**d) i.** A aceleração do próton é perpendicular à velocidade (radial), centrípeta e de módulo:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\left( \frac{p}{m} \right)^2}{r} = \frac{p^2}{m^2 r} = \frac{(6,68 \times 10^{-22})^2}{(1,67 \times 10^{-27})^2 \times 0,40} = 4,0 \times 10^{11} \text{ kg m s}^{-2}$$

$$\text{ii. } p = |q|Br \Rightarrow B = \frac{p}{|q|r}$$

$$= \frac{6,68 \times 10^{-22}}{1,60 \times 10^{-19} \times 0,40} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ T}$$

### 2.3.2 (pág. 218)

**11. a)** (B). O peso de um elétron é desprezável dada a ordem de grandeza da sua massa. Num seletor de velocidades, a resultante das forças é nula, por isso,

a força magnética,  $\vec{F}_m$ , e a força elétrica,  $\vec{F}_e$ , são simétricas:  $\vec{F}_m + \vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_m = -\vec{F}_e$ .

**b)** Para as partículas selecionadas, as que têm movimento retilíneo e uniforme, a força resultante é nula. Assim, a força magnética,  $\vec{F}_m$ , tem de ser oposta e de módulo igual ao da força elétrica,  $\vec{F}_e$ , para que a resultante das forças que atuam sobre ela seja nula:  $\vec{F}_m + \vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_m = -\vec{F}_e$ . Uma vez que, em módulo, a força elétrica é igual à magnética:  $F_m + F_e \Rightarrow |q|vB = |q|E$ ,

peço que  $v = \frac{E}{B}$ , pelo que a energia cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mE^2}{2B^2} = \frac{9,11 \times 10^{-31} \times (50 \times 10^3)^2}{2 \times 0,020^2} =$$

$$= 2,85 \times 10^{-18} \text{ J} = 2,85 \times 10^{-18} \times \frac{1}{1,60 \times 10^{-19}} =$$

= 18 eV. **c)** (C). A velocidade não depende da massa e também não depende da carga elétrica, uma vez que quer as forças magnética e elétrica variam do mesmo modo com a carga:

$$\vec{F}_m = -\vec{F}_e \Rightarrow q\vec{v} \times \vec{B} = -q\vec{E} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{B} = -\vec{E}.$$

Da relação anterior, obtém-se  $v = \frac{E}{B}$ ,

relação que mostra que o módulo da velocidade,  $v$ , aumenta com o aumento do campo elétrico,  $\vec{E}$ , e diminui com o aumento do campo magnético,  $\vec{B}$ .

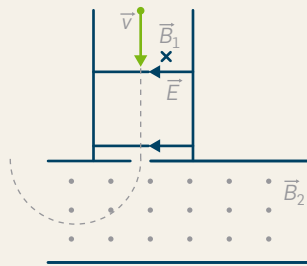
**12.** (C). Dado que o elétron acelera, a força elétrica nele exercida tem o sentido positivo do eixo  $y$ , sendo a sua carga negativa; segue-se que a placa R é positiva, estando a um potencial superior. Como a força magnética é sempre perpendicular à velocidade e a trajetória é retilínea, então não existe força magnética, concluindo-se que a velocidade e o campo magnético têm a mesma direção.

**13. a)** Na região 1, a resultante das forças que atuam sobre a partícula é nula. Para que se anulem, as forças magnética e elétrica têm a mesma direção, sentidos opostos e o mesmo módulo:  $qvB_1 = qE$ , donde o módulo do campo magnético é

$$B_1 = \frac{E}{v}.$$

Sendo a carga positiva, a força elétrica,  $\vec{F}_e$ , tem o sentido do campo elétrico,  $\vec{E}$ , para a esquerda, logo, a magnética,  $\vec{F}_m$ , é para a direita. Em consequência, o campo magnético,  $\vec{B}_1$ , é «para lá» do plano do papel: curvando os

dedos da mão direita no sentido de  $\vec{v}$  para  $\vec{B}_1$ , o polegar aponta para a direita (sentido de  $\vec{F}_m$ ).



**b)** A partícula ao entrar na região 2 é desviada para a esquerda: o campo magnético,  $\vec{B}_2$ , é «para cá» do plano do papel: curvando os dedos da mão direita no sentido de  $\vec{v}$  para  $\vec{B}_2$ , o polegar aponta para a esquerda (sentido de  $\vec{F}_m$ ). O movimento é circular (a velocidade da partícula é perpendicular a  $\vec{B}_2$ ) e uniforme (a força magnética é sempre perpendicular à

velocidade). Como  $m\frac{v^2}{r} = qvB_2$ , então o raio da trajetória descrita é  $r = \frac{mv}{qB_2}$ .

**c)** (D). Como  $r = \frac{mv}{qB_2}$ , para uma

determinada velocidade, o raio,  $r$ , é inversamente proporcional ao módulo do campo magnético,  $B_2$ .

### 2.3.3 (pág. 219)

**14.** A intensidade da força magnética é  $ILB$ , sendo  $L$  o comprimento do fio; logo, a intensidade da força por unidade de comprimento será  $IB$ . Tem direção perpendicular ao plano definido pelo campo e pelo fio, ou seja, perpendicular ao plano do papel e aponta para lá deste, ou seja, no referencial representado será  $\vec{F}_m/L = -IB\vec{e}_z$ .

**15. a)** A força magnética é  $\vec{F}_m = I\vec{l} \times \vec{B}$  ( $\vec{l}$  com a direção do fio, o sentido da corrente e comprimento igual ao do fio). Escolhendo um sistema tal que  $\vec{e}_x$  aponta para a direita,  $\vec{e}_y$  para cima e  $\vec{e}_z$  para «cá», tem-se:

**(A)**  $\vec{F}_m = 5,0 \times 0,40\vec{e}_x \times (-8,0 \times 10^{-3}\vec{e}_z) = -1,6 \times 10^{-2}\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -1,6 \times 10^{-2}(-\vec{e}_y) = 1,6 \times 10^{-2}\vec{e}_y$  (N), a força magnética aponta para cima;

**(B)**  $\vec{F}_m = -1,6 \times 10^{-2}\vec{e}_z \times \vec{e}_x = 1,6 \times 10^{-2}\vec{e}_y$  (N), a força magnética aponta para cima;

**(C)**  $\vec{F}_m = -1,6 \times 10^{-2}\vec{e}_y \times \vec{e}_z = -1,6 \times 10^{-2}\vec{e}_x$  (N), a força magnética aponta para a esquerda;

**(D)** O módulo da força magnética é  $F_m = IB \sin \theta = 5,0 \times 0,40 \times 8,0 \times 10^{-3} \times \sin 30^\circ = 8,0 \times 10^{-3}$  N, a direção é

perpendicular ao plano do papel e aponta para «cá». **b)** A força magnética,  $\vec{F}_m$ , tem de ser oposta e de módulo igual ao peso do fio,  $\vec{P}$ , para que a resultante das forças seja nula:  $\vec{F}_m + \vec{P} = \vec{0}$ . Tendo o mesmo módulo,  $lB = mg$ , então  $B = \frac{mg}{l}$ .

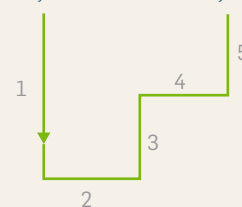
A massa do fio determina-se a partir da sua densidade:  $m = \rho V = \rho lA$  em que  $A$  é a área de secção reta do fio. Obtém-se:

$$B = \frac{\rho lAg}{l} = \frac{\rho Ag}{l} = 0,19 \text{ T}.$$

**16. a)** Sofre um desvio, deslocando-se numa direção perpendicular ao plano do papel e para «cá», consequência da força nela exercida,  $\vec{F}_m = I\vec{l} \times \vec{B}$ . O sentido da corrente é do polo positivo para o negativo, na barra é para a esquerda, este é o sentido de  $\vec{l}$ , e  $\vec{B}$  aponta do polo norte para o sul, para baixo: curvando os dedos da mão direita no sentido de  $\vec{l}$  para  $\vec{B}$ , o polegar aponta para «cá» do plano do papel. **b)** Deverá também inverter-se o íman, trocando as posições dos polos norte e sul. Se os sentidos da corrente, logo de  $\vec{l}$ , e do campo,  $\vec{B}$ , se invertermem, o sentido da força magnética não se altera:

$$\vec{F}_m = I\vec{l} \times \vec{B} = I(-\vec{l}) \times (-\vec{B}).$$

**17. a)** No troço 1 a força vale  $2ILB$  e é para a esquerda. Nos troços 3 e 5 a força vale  $ILB$ , em cada um deles, e é para a direita. A soma das forças nos troços 1, 3 e 5 é nula. Nos troços 2 e 4 a força é para baixo e vale, em cada um,  $ILB$ . Conclui-se que a força resultante aponta para baixo:  $\vec{F}_m = -2ILB\vec{e}_y$  (considerou-se  $\vec{e}_y$  para cima).



**b)** A resultante das forças é nula se a direção do campo magnético,  $\vec{B}$ , coincidir com as dos troços 2 e 4. Nesse caso, a força nos troços 2 e 4 será nula, por ficarem paralelos a  $\vec{B}$ . Considerando, por exemplo que  $\vec{B}$  apontava para a direita, a força no troço 1 aponta para «fora da folha» e vale  $2ILB$  e as forças nos troços 3 e 5 valem, cada uma,  $ILB$ , apontando para «dentro da folha». Assim, estas forças anulam-se. Conclui-se que  $\vec{B}$  deve ser paralelo aos troços 2 e 4.

**c)** (C). Em (C) o módulo da força magnética exercida sobre o fio é  $6ILB$ , pois como o fio é retilíneo as forças exercidas sobre todas as porções de fio têm a mesma direção. Nas restantes

opções existem forças exercidas em diversas porções que se cancelam: em (A) e em (B) a força magnética resultante é nula, em (D) o módulo da força magnética resultante é  $2ILB$ .

### Questões globais (pág. 220)

**18.** (B). Como a força magnética é sempre perpendicular à velocidade, pois  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ , o trabalho da força magnética é sempre nulo e a partícula sujeita à ação dessa força nunca varia a sua energia cinética – o módulo da sua velocidade mantém-se.

**19.** (C). A velocidade tem componente na direção perpendicular ao campo, o que origina uma força magnética perpendicular simultaneamente à velocidade e ao campo magnético, o que origina um movimento circular uniforme. Mas a velocidade tem também uma componente na direção do campo que se mantém ao longo do movimento, pois não há força nessa direção. A combinação do movimento circular uniforme com o movimento retilíneo uniforme na direção do campo magnético dá origem a um movimento helicoidal com velocidade de módulo constante.

**20. a) i)** Aponta para o lado de «lá» (notar que o eletrão tem carga negativa).

**ii)**  $F_m = |q|vB = 1,6 \times 10^{-19} \times 4,0 \times 10^4 \times 2,4 \times 10^{-5} = 1,5 \times 10^{-19}$  N. **iii)** A força magnética é a força centrípeta, pelo que

$$F_m = m \frac{v^2}{d/2}, \text{ ou seja: } d = \frac{2mv^2}{F_m} = 1,9 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

**iv)** O eletrão percorre a distância  $\frac{\pi d}{2}$  com velocidade de módulo  $v$ , pelo que o tempo de permanência na câmara é

$t = \frac{\pi d}{2v} = 7,5 \times 10^{-7}$  s. **v)** O trabalho da força magnética é nulo, pois é igual à variação de energia cinética, que é nula.

**b)** A força resultante seria nula, tendo-se  $F_m = F_e \Rightarrow |q|vB = |q|E$ , ou seja,  $v = \frac{E}{B}$ . Para o eletrão manter a sua velocidade, o campo elétrico deverá ter intensidade

$$E = vB = 0,96 \text{ V m}^{-1}$$

**c)** De  $qvB = m \frac{v^2}{r}$

conclui-se que  $B = \frac{mv}{qr}$ . Para se ter o mesmo raio, a mesma velocidade, e sendo igual o módulo da carga do eletrão e do prótão, o novo campo magnético será

$$B' = \frac{m_p}{m_e} B = 4,3 \times 10^{-2} \text{ T. O novo campo}$$

deverá ter a mesma direção do anterior mas sentido oposto (perpendicular ao papel mas apontando para «lá»).

**21. a)** O módulo da velocidade é

$$v = \frac{10 \times 2\pi r}{1,0 \times 10^{-3}} = 2,5 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}. \text{ A massa do}$$

ião (dois prótões e dois neutrões) é  $m = 6,68 \times 10^{-27}$  kg. A força magnética é a

$$\text{força centrípeta: } F = m \frac{v^2}{r} = 1,0 \times 10^{-18} \text{ N;}$$

no ponto S, a força magnética, sendo centrípeta, tem a direção e o sentido positivo do eixo dos xx. **b)** A carga é a soma das cargas dos dois prótões e, como

$$F_m = qvB = m \frac{v^2}{r} \text{ tem-se que}$$

$$B = \frac{mv}{qr} = 1,3 \times 10^{-3} \text{ T; } \vec{B} \text{ tem a direção e o}$$

sentido negativo do eixo dos zz. **c)** Como

$$r = \frac{mv}{qB}, \text{ tem-se, para o prótão, } r_p = \frac{m_p v}{q_p B} \text{ e}$$

$$\text{para o ião } r_{\text{ião}} = \frac{4m_p v}{2q_p B} \Rightarrow \frac{r_{\text{ião}}}{r_p} = 2.$$

**22. a)** O ião, de massa  $m$  e carga  $q$ , com velocidade,  $\vec{v}$ , perpendicular ao campo magnético,  $\vec{B}$ , descreve um movimento

circular uniforme de raio  $r = \frac{mv}{qB}$ . Sempre

que passa entre os dois «D», o ião é acelerado pelo campo elétrico; assim, o raio da semicircunferência descrita aumenta como consequência do aumento de velocidade. **b)** (A). A energia cinética aumenta sempre que o ião passa entre os dois «D», mas é constante em cada uma das semicircunferências. **c)** Aplicando a Lei Fundamental da Dinâmica, determina-se o período,  $T$ , do movimento:

$$F_m = ma_n \Rightarrow qvB \sin 90^\circ = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow qBr = mv \Rightarrow qBr = m \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

A expressão anterior permite concluir que o período não depende nem da velocidade nem do raio do movimento, logo, a frequência também não depende dessas grandezas. **d)** Como  $v = \frac{qBr}{m}$ , segue-se que

a energia cinética máxima é

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left( \frac{qBR}{m} \right)^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}.$$

**23.** Como  $F = I \vec{\ell} \times \vec{B}$ , a força no troço 1, por unidade de comprimento, tem módulo

$$\frac{F}{\ell} = IB, \text{ é perpendicular ao papel e aponta}$$

para «lá». No troço 2 a força é nula, pois o campo tem a direção da corrente. No troço 3 a força por unidade de comprimento é

$$\frac{F_3}{\ell} = IB \cos \alpha, \text{ é perpendicular ao papel e}$$

aponta para «lá».

## 3. Física moderna

### 3.1 Introdução à física quântica

#### 3.1.1 (pág. 240)

**1.** (C). A radiação emitida por um corpo apresenta espectro contínuo, depende da temperatura do corpo e tem origem nas oscilações das cargas elétricas presentes no corpo.

**2.** (D). O corpo negro é o melhor dos emissores e dos absorvedores (absorve toda a radiação que nele incide).

**3.** (C). Lei de Stefan-Boltzmann,  $I = \sigma T^4$ ; Lei de Wien:  $\lambda T = B$ .

**4.** (A). [Ver justificação da questão 3.]

**5. a)** A: 6000 K, B: 5000 K, C: 4000 K, D: 3000 K. **b)** Para o corpo A: a área por baixo da curva é maior para este caso.

**c)** Pela Lei de Stefan-Boltzmann,  $I = \sigma T^4$ . Como a temperatura de 6000 K é dupla de 3000 K, a intensidade total da estrela a 6000 K é  $2^4$  vezes maior, ou seja, 16 vezes maior. **d)** A cor não é a da radiação emitida com maior intensidade mas, sim, a que resulta da mistura das várias cores na região visível das radiações emitidas pelos corpos. O máximo da curva para o corpo A situa-se no verde-azulado; mas como há bastante emissão no vermelho, a cor resultante vai ser amarela (um pouco mais esbranquiçado do que o Sol); o corpo B tem uma tonalidade mais alaranjada; o corpo C tem uma cor mais próxima do vermelho e o corpo D será levemente avermelhado (o máximo de emissão deste corpo situa-se no infravermelho). **e)** Pela Lei de Wien, a temperatura absoluta é inversamente proporcional ao comprimento de onda da máxima emissão. Se E tem uma temperatura dupla, o seu comprimento de onda é metade do de A, ou seja, cerca de 300 nm.

**6. a)** A intensidade total da radiação emitida é:

$$I = \sigma T^4 = 5,67 \times 10^{-8} \times 300^4 = 459 \text{ W m}^{-2}.$$

A potência é

$$P = \frac{P}{\Delta t} = \frac{1,00 \times 10^5}{100} = 1,00 \times 10^3 \text{ W. Como}$$

$$I = \frac{P}{A}, A = 2,18 \text{ m}^2. \text{ b) Pela Lei de Wien,}$$

$$\lambda T = B, \text{ logo, } \lambda = 9,66 \times 10^{-6} \text{ m.}$$

**7.** Afirmação falsa. De acordo com a Lei de Stefan-Boltzmann,  $I = \sigma T^4$  e  $0^\circ \text{C}$  correspondem à temperatura absoluta de 273,15 K.

**8. a)** Como  $\lambda = \frac{B}{T} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{5778}$ , obtém-se

$$\lambda = 5,016 \times 10^{-7} \text{ m e } f = \frac{c}{\lambda} = 5,98 \times 10^{14} \text{ Hz.}$$

**b)** A cor de um corpo devida à emissão térmica resulta da sobreposição das radiações emitidas na região do visível. No caso do Sol, o máximo de emissão ocorre para a cor verde que, combinada com o vermelho e o alaranjado que também aparecem com grande intensidade, resulta na cor amarela. **c)** Seria vermelha. No seu período de evolução, o Sol será uma estrela mais fria e de maior dimensão, passando então a ter a cor vermelha. Se o Sol fosse mais quente, seria uma estrela esbranquiçada porque haveria menos radiação na região do vermelho e mais na região azul. Se a temperatura aumentasse mais ainda, o vermelho deixaria de aparecer, o que conferiria à estrela uma cor azulada.

**9.** A intensidade é  $I = 3,0 \times 10^5 \text{ W m}^{-2}$ . Usando a Lei de Stefan-Boltzmann,  $I = \sigma T^4$ , encontra-se para a temperatura  $T = 1,5 \times 10^3 \text{ K} = 1,2 \times 10^3 \text{ }^\circ\text{C}$ . Os microprocessadores têm de ser arrefecidos para funcionarem.

**10. a)** Pela lei de Wien.

$$\lambda_A T_A = \lambda_B T_B \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{700}{400} = 1,75. \text{ b) Pela}$$

Lei de Stefan-Boltzmann, admitindo que as duas estrelas são corpos negros (ou, pelo menos, que têm a mesma emissividade),

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{\sigma T_A^4}{\sigma T_B^4} = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 9,38.$$

**11.** A intensidade da radiação emitida é  $I = e\sigma T^4$ . Temperatura do objeto:  $T = 273 + 30 = 303,15 \text{ K}$ ; temperatura do asfalto:  $T' = 323 \text{ K}$ ; a razão entre as intensidades emitidas é

$$\frac{I}{I'} = \frac{e\sigma T^4}{e'\sigma T'^4} = \frac{2 \times 323^4}{303^4} = 2,6.$$

**12. a)** Como a temperatura do espaço intergaláctico é muito baixa, a transferência de energia por radiação do espaço para o astronauta é praticamente desprezável. Mas o mesmo já não acontece com a transferência de energia do astronauta para o espaço (a temperatura dele é 307 K).

**b)** A intensidade da radiação é  $252 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2}$ . A energia perdida por segundo é 504 J.

**c)** Vai diminuindo porque ele transfere energia para a vizinhança. **d)** Não, cada vez se faz mais lentamente porque, se ele transfere energia, a sua temperatura diminui, mas, pela Lei de Stefan-Boltzmann, como a temperatura é menor, a intensidade da radiação emitida é também menor. Logo, a temperatura diminui cada vez mais lentamente.

**13.** A energia (por unidade de massa) perdida pelos animais de pequeno porte é maior do que a energia perdida pelos animais de maior porte, devido à sua maior área superficial (em proporção). Note-se

que nos referimos à energia por unidade de massa e não à energia total; esta é obviamente maior para os animais maiores!

**14.** São iguais. Se uma fosse maior do que a outra (em média), a temperatura do planeta não se manteria aproximadamente constante.

### 3.1.2 (pág. 241)

**15.** (D). A emissão e absorção faz-se por *quanta* de energia, ou seja, de forma descontínua, sendo a energia de cada *quantum*  $hf$ .

**16.** (B). Um oscilador eletromagnético tem energia  $nhf$ , em que  $n$  é um número inteiro.

### 3.1.3 (pág. 242)

**17.** O efeito fotoelétrico consiste na emissão de eletrões de um metal por incidência de luz. Einstein explicou essa emissão admitindo que a luz é constituída por fotões, os quais, quando incidem num metal, colidem com os seus eletrões, transferindo-lhes energia. Esta energia tem de ser suficiente para arrancar o eletrão ao metal e a restante aparece como energia cinética do eletrão.

**18.** (A), (D), (E) e (F). A afirmação (B) é falsa porque a energia cinética máxima dos eletrões ejetados apenas depende da frequência dos fotões e da função trabalho do metal. A segunda parte da afirmação (C) é falsa, pois o processo de emissão é instantâneo; o tempo de exposição apenas determina o número de eletrões ejetados, não a sua energia cinética.

**19.** (D). A grandeza física determinante para a ocorrência do efeito fotoelétrico é a frequência da luz e não a sua intensidade (que apenas determina se há mais ou menos fotões).

**20.**  $f = \frac{E}{h} = 2,66 \times 10^{15} \text{ Hz}$ ; como  $f = \frac{c}{\lambda}$ ,

tem-se  $\lambda = 113 \text{ nm} < 400 \text{ nm}$ , portanto UV.

**21. a)**  $W = hf_{\text{mín}}$ , donde

$$f_{\text{mín}} = \frac{W}{h} \Leftrightarrow \lambda_{\text{máx}} = \frac{hc}{W} = 5,83 \times 10^{-7} \text{ m} =$$

$$= 538 \text{ nm. Visível. b) } E_c^{\text{máx}} = hf - W =$$

$$= h \frac{c}{\lambda} - W = 5,66 \times 10^{-20} \text{ J} = 0,35 \text{ eV.}$$

**22. a)**  $W = hf_{\text{mín}} = 3,18 \times 10^{-19} \text{ J} = 1,99 \text{ eV}$  e

$$E_c^{\text{máx}} = hf - W, \text{ donde}$$

$$E_c^{\text{máx}} = 1,13 \times 10^{-19} \text{ J} = 0,71 \text{ eV. b) (A). A}$$

intensidade da luz era maior e, portanto, eram arrancados mais eletrões ao metal, produzindo uma corrente de maior intensidade, mas ficando os eletrões com a mesma energia cinética máxima. **c)** (D). A luz incidente com maior frequência faria com que os eletrões arrancados

tivessem maior energia cinética máxima, mas, como a fonte de luz incidente estava mais afastada, era menos intensa, ou seja, arrancava menos eletrões ao metal e a intensidade de corrente produzida era menor.

**23.** A – b, pois o potencial de paragem é o maior em módulo; B – c; C – a, pois o potencial de paragem tem o mesmo valor mas a corrente máxima é maior para a radiação mais intensa.

**24.** (B). Sabe-se que  $E = nhf = n \frac{hc}{\lambda}$  e  $P = \frac{E}{\Delta t}$ .

Para a *laser*, a energia emitida por segundo é 0,50 mJ, logo,  $n = \frac{E\lambda}{hc} = 1,6 \times 10^{15}$  fotões/s.

Para a lâmpada, a energia por segundo é 100 J, mas, como a eficiência é apenas 10%, a energia é 10 J, obtendo-se  $n = 2,5 \times 10^{19}$  fotões/s.

**25.** Como a luz ultravioleta tem frequência maior do que a luz visível, os fotões de luz ultravioleta são mais energéticos, podendo arrancar eletrões às moléculas dos constituintes da pele (ionização). Uma fonte de luz ultravioleta, mesmo pouco intensa, pode ser perigosa; enquanto a radiação visível, ainda que mais intensa, não tem energia suficiente para ionizar as moléculas.

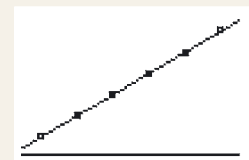
**26.** Nas figuras representam-se o gráfico de dispersão e a reta de ajuste, assim como a equação respetiva:

$$y = 6,65 \times 10^{-34} x - 3,59 \times 10^{-19}.$$

Comparando com  $E_c^{\text{máx}} = hf - W$ , conclui-se que a constante de Planck é o declive da reta ( $h_{\text{exp}} = 6,65 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ) e a função

trabalho é o módulo da ordenada na origem ( $W = 35,9 \times 10^{-20} \text{ J} = 2,24 \text{ eV}$ ). A frequência mínima para haver efeito fotoelétrico neste

metal é  $f_0 = \frac{W}{h} = 5,4 \times 10^{14} \text{ Hz}$ . O metal é o potássio.



```
LinReg
y=ax+b
a=6.6457E-34
b=-3.5896E-19
r²=9.9949E-1
r=9.9974E-1
```

**27.** Para cada caso tem-se, respetivamente,  $hf_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + W$  e

$$hf_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + W. \text{ Subtraindo as duas}$$

equações membro a membro,



$hf_1 - hf_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$ , pois a função trabalho é igual nos dois casos.

Como  $v_1 = 2v_2$ ,  $f_1 - f_2 = \frac{3mv_2^2}{2h}$ .

### 3.1.4 (pág. 243)

28. (C).

### Questões globais (pág. 243)

29. (B). O comprimento de onda de máxima emissão é menor para uma estrela azul do que para o Sol; logo, a temperatura da estrela azul é maior.

30. Diminui:  $I = e\sigma(T^4 - T_{amb}^4)$ , sendo  $T$  a temperatura da água e  $T_{amb}$  a temperatura exterior. Como  $T$  diminui,  $I$  também diminui (até se anular quando  $T = T_{amb}$ ). Portanto, a potência transferida por unidade de área diminui.

31. Tem-se  $I = e\sigma(T^4 - T_{amb}^4) = 0,90 \times 5,97 \times 10^{-8} (308^4 - 298^4) = 59,9 \text{ W m}^{-2}$ . Em 60 segundos, a energia transferida por unidade de área é  $3,6 \times 10^4 \text{ J m}^{-2}$ .

32. Catástrofe do ultravioleta foi a designação por que ficou conhecida a discrepância entre a curva para a radiação do corpo negro prevista pela teoria eletromagnética e a curva experimental. Essa discrepância ocorria na zona dos pequenos comprimentos de ondas (ou, equivalentemente, do ultravioleta). Esta «catástrofe» levou Planck a admitir a quantização da energia, o que permitiu não só explicar essa discrepância como viria a dar origem a uma nova teoria – a teoria quântica – que revolucionou a física.

33. Para que haja efeito fotoelétrico,  $\frac{1}{2}m_e v_{máx.}^2 = hf - W > 0$ , ou seja, a energia do fóton tem de ser superior à função

trabalho. Como, para a luz visível  $4,0 \times 10^{14} < f < 7,5 \times 10^{14}$  (Hz), a energia do quantum de luz visível em eletrões-volt é  $1,66 < hf < 3,11$ (eV). Podem ser escolhidos o bário e o lítio.

34. **a) i)** Da sua frequência. **ii)** Do número de fótons com energia superior à função trabalho do metal em que incidem. **b)** Na ideia da quantização da energia de Planck: a radiação existe em quantidades discretas, os fótons, e a energia de um fóton é dada pela relação de Planck,  $E = hf$ . **c)** Porque a luz pode apresentar comportamento de partícula ou de onda, ou seja, tem uma natureza dual.

35. **a)** Como  $E_{c,máx} = hf - W$ , **i)** o módulo da ordenada da origem é a função trabalho;

**ii)** e  $h$  é o declive da reta. **b)** Potássio, a que corresponde a menor ordenada na origem em módulo (ou a que corresponde a menor frequência para a emissão de um eletrão).

**c)** Não há efeito fotoelétrico, pois  $f = \frac{3,00 \times 10^8}{500 \times 10^{-9}} = 6,00 \times 10^{14}$  Hz, que é

inferior à frequência mínima para haver emissão. **d) i)** Do gráfico pode ler-se  $f_{mín.} = 1,75 \times 10^{15}$  Hz. Logo,

$$\lambda_{máx.} = \frac{c}{f_{mín.}} = 1,71 \times 10^{-7} \text{ m.}$$

**ii)**  $W = hf_{mín.} = 1,16 \times 10^{-18}$  J, equivalente a

7,25 eV. **iii)** Como  $\frac{1}{2}m_e v^2 = hf - W$ , vem

$$v = \sqrt{\frac{2(hf - W)}{m_e}} = 6,0 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}.$$

**iv)** Para se formar uma mole de eletrões teve de haver colisão de uma mole de fótons, ou seja  $6,022 \times 10^{23}$  fótons. A energia cinética de um mole de eletrões é

$$\frac{1}{2}m_e v^2 N_A = (hf - W) N_A = 6,022 \times 10^{23} \times 6,626 \times 10^{-34} \times (2,0 - 1,75) \times 10^{15} = 9,98 \times 10^4 \text{ J.}$$

## 3.2 Núcleos atômicos e radioatividade

### 3.2.1 (pág. 264)

1. A experiência de Rutherford permitiu concluir que existia um núcleo atômico de carga positiva, com dimensão muito menor do que o átomo, e onde estava concentrada praticamente toda a massa deste.

2. Verdadeiras: A, C, D. Falsas: B; a estabilidade nuclear deve-se à força forte.

3. (C). A massa do conjunto dos nucleões agregados num núcleo é menor do que a soma das massas desses nucleões separados, razão pela qual o núcleo é estável.

4. A energia de ligação por nucleão é 8,04 MeV. Como o número de massa é 20, a energia de ligação é  $B = 8,04 \times 20 = 160,8$  MeV ou  $B = 160,8 \times 10^6 \times 1,60 \times 10^{-19} = 2,573 \times 10^{-11}$  J. Como

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}, \text{ obtém-se } \Delta m = 2,859 \times 10^{-28} \text{ kg}$$

ou  $\Delta m = 0,172$  u.

5. **a)** (C). Para desagregar o núcleo é necessário fornecer a energia  $\Delta m c^2$ , que é maior para o nitrogénio do que para o hélio.

**b)** Hélio:  $\Delta m = 0,030377 \text{ u} = 5,04422 \times 10^{-29} \text{ kg}$ ;  $\Delta E = \Delta m c^2 = 4,54 \times 10^{-12} \text{ J} = 28,4 \text{ MeV}$ .

Nitrogénio:  $\Delta m = 0,11235 \text{ u} = 1,8656 \times 10^{-28} \text{ kg}$ ;  $\Delta E = \Delta m c^2 = 1,68 \times 10^{-11} \text{ J} = 105 \text{ MeV}$ .

**c)** Hélio:  $\frac{B}{A} = \frac{28,4}{4} = 7,10 \text{ MeV}$ ; Nitrogénio:

$$\frac{B}{A} = \frac{105}{14} = 7,50 \text{ MeV} \approx 7,10 \text{ MeV.}$$

6. (D).

7. As reações químicas envolvem eletrões de valência, havendo transformação de substâncias mas mantendo-se os elementos químicos. As reações nucleares envolvem transformações de núcleos, podendo ou não haver formação de novos elementos químicos, e a energia envolvida é cerca de um milhão de vezes maior do que nas reações químicas.

### 3.2.2 (pág. 264)

8. À medida que aumenta o número de prótons nos núcleos, as forças elétricas de repulsão aumentam mais do que as forças nucleares fortes, que são atrativas mas têm menor alcance do que as forças elétricas. A instabilidade manifesta-se na emissão de partículas ou radiação, designada por decaimento radioativo.

9. **(A)** Falsa; o núcleo formado pode ser também radioativo. **(B)** Verdadeira; a radiação gama pode ser vista como a emissão de um fóton, que é uma partícula de luz. **(C)** Verdadeira; há sempre emissão de partículas (logo diminuição de energia) que têm energia cinética. O núcleo após a emissão tem menor energia do que o núcleo inicial. **(D)** Falsa; na emissão gama não há alteração de elemento químico, apenas um núcleo num estado excitado passa para um estado de energia mais baixa. **(E)** Verdadeira; o número de prótons e neutrões pode mudar mas não o número total. **(F)** Falsa; podem obter-se núcleos radioativos artificiais em laboratório através de reações nucleares.

10. **a)** Gama, beta, alfa. **b)** Gama, beta, alfa. **c)** (D). Apesar de terem pequeno poder de penetração, as partículas alfa são muito energéticas, tendo um grande poder destrutivo das células nos seres vivos.

11. O desvio é determinado pela razão carga/massa, pela velocidade e pela intensidade do campo magnético, pois o raio da trajetória circular descrita é dado

$$\text{por } R = \frac{mv}{qB}.$$

Para partículas com a mesma velocidade sujeitas ao mesmo campo magnético, sofre maior desvio (ou seja, tem menor raio a trajetória circular) a partícula de menor relação massa/carga, que, neste caso, é a emissão beta (menor carga mas muito menor massa do que as alfa).

12. **(A)**. Na emissão alfa, o novo núcleo tem menos quatro nucleões do que o original (na emissão beta, o número de nucleões no núcleo original e no final é o mesmo).

**13. a)**  ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + \alpha$  (partícula alfa);  
 ${}^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} + \beta^- + \bar{\nu}$  partícula beta menos e antineutrino). **b)** É o núcleo  ${}^{234}_{91}\text{Pa}$ , porque após o decaimento radioativo formam-se núcleos mais ligados, ou seja, com maior energia de ligação por nucleão, mais estáveis.

**14. a)**  ${}^3_1\text{H} \rightarrow \beta^- + {}^3_2\text{He} + \bar{\nu}$ .

**b)**  ${}^{39}_{20}\text{Ca} \rightarrow \beta^+ + {}^{39}_{19}\text{K} + \nu$ . **c)**  ${}^{60}_{27}\text{Co}^* \rightarrow {}^{60}_{27}\text{Co} + \gamma$ . (o asterisco indica um núcleo num estado excitado). **d)**  ${}^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\text{Pb} + {}^4_2\text{He}$ .

**15. (B).** A reação nuclear para este decaimento é  ${}^{61}_{26}\text{Fe} \rightarrow {}^{61}_{27}\text{Co} + \beta^+ + \nu$  (o cobalto-61 tem mais um próton e menos um neutrão do que o ferro-61).

### 3.2.3 (pág. 265)

**16. a)** Sendo  ${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{144}_{56}\text{Ba} + {}^n_m\text{X} + 3 {}^1_0\text{n}$ , tem-se  $235 + 1 = 144 + n + 3$  e  $92 = 56 + m$ , logo,  $n = 89$  e  $m = 36$ . **b)** Reação de cisão nuclear; ocorre nos reatores das centrais nucleares que geram eletricidade.

**17.**  ${}^2_1\text{H} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^3_2\text{He} + \gamma$

**18. (D).** As chamadas bombas atômicas usam reações de fissão nuclear, ou seja, reações em que núcleos pesados são cindidos.

### 3.2.4 (pág. 266)

**19. (C).** Como a meia-vida é o tempo ao fim do qual a atividade se reduz a metade, ao fim de 3 dias reduziu-se  $2^3 = 8$  vezes.

**20. a)**  ${}^{198}_{79}\text{Au} \rightarrow \beta^- + {}^{198}_{80}\text{Hg} + \bar{\nu}$ .

**b)** Como  $\lambda = \frac{\ln 2}{2,7} = 0,26 \text{ d}^{-1}$ , logo,

$A(7) = 7,0 e^{-0,26 \times 7} = 1,1 \text{ MBq}$ .

**21. a)** Como  $A(t) = A_0 e^{-\lambda t} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 0,0485 \text{ d}^{-1}$ ,

então  $\frac{A}{A_0} = e^{-0,0485t}$ ; se decresce 5%, ainda

fica 95%, logo,  $0,95 = e^{-0,0485t}$ ; vem, então,

$\ln 0,95 = -0,0485 t$  e, portanto,

$t = 1,06 \text{ d} = 25,4 \text{ h}$ . **b)**  ${}^{32}_{15}\text{P} \rightarrow \beta^- + {}^{32}_{16}\text{S} + \bar{\nu}$ .

**22.** Sabe-se que  $m = nM = \frac{N}{N_A} M$  ( $n$  é a

quantidade de matéria,  $M$  a massa molar e  $N_A$  a constante de Avogadro). Então,

$m = \frac{M}{N_A} N$ , ou seja, a massa é diretamente

proporcional ao número de átomos. Logo, também se pode escrever  $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$ .

Como  $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 0,231 \text{ d}^{-1}$  e  $48 \text{ h} = 4 \text{ d}$ , vem

$m(2) = 18,0 e^{-0,231 \times 2} = 11,3 \text{ g}$ .

**23.** O tempo de meia-vida é 10 h, por isso,

ao fim de 10 h há metade dos núcleos, ao fim de 20 h há um quarto e ao fim de 30 h há um oitavo. Como 1/8 equivale a 12,5%, então decaíram 87,5% dos núcleos iniciais.

**24.** Como  $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$  ou  $\frac{A}{A_0} = e^{-\lambda t}$ , então

$$\frac{124}{1300} = e^{-\lambda \times 60} \text{ ou } \ln \frac{124}{1300} = -240 \lambda,$$

donde  $\lambda = 0,00979 \text{ min}^{-1}$ . Como

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 70,8 \text{ min} = 1,2 \text{ h}.$$

**25. a)** Da expressão  $A = A_0 e^{-\lambda t}$  resulta

$$\frac{A}{A_0} = e^{-\lambda t} \text{ ou } \ln \left( \frac{A_0}{A} \right) = \lambda t. \text{ b) Se fizermos}$$

$y = \ln \left( \frac{A_0}{A} \right)$ , a expressão toma a forma

$y = \lambda t$ , ou seja, graficamente a representação de  $y$  em função de  $t$  é uma reta. A partir dos dados fornecidos, constrói-se a tabela.

t/dias	0	1	2	3	4
$y = \ln \left( \frac{A_0}{A} \right)$	0,000	0,166	0,333	0,498	0,665

O gráfico da função  $y = \lambda t$  é uma reta de declive  $\lambda = 0,166 \text{ d}^{-1}$ . O tempo de meia-vida

$$\text{é } T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 4,18 \text{ dias}.$$

### 3.2.5 (pág. 266)

**26.** Deve ter um poder ionizante baixo, para não danificar as células, e poder penetrante elevado; por isso, a radiação gama é a mais conveniente. Além disso, o seu tempo de meia-vida deve ser curto para não permanecer no doente. Mas nem todo o decaimento se faz dentro do corpo do doente, pois ele vai eliminando os núcleos radioativos através do seu metabolismo (respiração, urina, fezes); este fator, eliminação mais rápida do organismo, é também importante na escolha desses núcleos. O tempo de meia-vida pode até nem ser muito pequeno, mas, se houver uma eliminação rápida do organismo, o núcleo é apropriado para diagnóstico. Algumas fontes radioativas mais usadas são o iodo-131 (tempo de meia-vida de 8 dias) e o tecnécio-99 (tempo de meia-vida de 6 h). Este último usa-se no diagnóstico de doenças em várias partes do corpo humano.

**27.** Não é perigoso transportar a amostra na mala por o poder penetrante ser fraco, mas é muito perigoso ingerir a amostra. As amostras radioativas devem ser consideradas perigosas e a sua manipulação requer alguns cuidados. Apesar de a radiação alfa ser a menos penetrante, as fontes alfa são, em geral, as de maiores tempos médios de vida e, uma vez ingeridas, podem alojarse numa parte

do corpo e aí permanecer muito tempo, destruindo os tecidos nessa região.

**28.** Resposta aberta (o «lixo atômico» é material radioativo produzido nas centrais nucleares, laboratórios e hospitais, e que deixa de ter utilidade, mas é necessário que seja devidamente guardado por constituir um risco para as os seres vivos).

**29.** Como  $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$  ou  $\frac{A}{A_0} = e^{-\lambda t}$  e

$$\lambda = \frac{\ln 2}{110} = 0,00630 \text{ min}^{-1} \text{ então}$$

$$\frac{A}{A_0} = e^{-0,00630 \times 6,0 \times 60} \text{ ou } \frac{A}{A_0} = 0,10 = 10\%.$$

### Questões globais (pág. 267)

**30. a)**  ${}^{239}_{94}\text{Pu} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{97}_{39}\text{Y} + {}^A_Z\text{X} + 5 {}^1_0\text{n}$ ; por isso,  $239 + 1 = 97 + A + 5$  e  $94 = 39 + Z$ , logo,

$A = 138$  e  $Z = 55$ . O elemento X é o cério. **b)** Fissão nuclear. **c)** A soma das massas dos núcleos que se formam depois de processos de fissão (ou de fusão) nuclear é menor do que a massa total dos núcleos iniciais. Esta diferença de massa

é equivalente à energia que se liberta na reação, de acordo com  $\Delta E = \Delta mc^2$ , e que aparece como energia cinética dos produtos finais e como radiação. Nas reações nucleares conserva-se a energia:

a energia inicial (que inclui a massa dos reagentes) é igual à energia final (que inclui a massa dos produtos). **d)** Ao fim de um tempo médio de vida, resta metade dos núcleos iniciais; ao fim de dois tempos médios de vida, resta 1/4; ao fim de três tempos médios de vida, resta 1/8; ao fim de quatro tempos médios de vida, resta 1/16; por isso, é ao fim de  $4 \times 2,4 \times 10^4 \text{ anos} = 9,6 \times 10^4 \text{ anos}$ .

**31. (D).** A massa total dos núcleos resultante tem de ser menor do que a massa total inicial quando se liberta energia, pois à energia libertada corresponde uma massa equivalente e a massa-energia conserva-se.

**32. a)** Partículas alfa,  ${}^4_2\text{He}$  (o número atômico diminui duas unidades e o de massa quatro unidades). **b)** São defletidas pelo campo magnético, descrevendo uma trajetória circular de raio  $R = \frac{mv}{qB}$ .

**c)** O casal Frédéric Joliot e Irène Joliot-Curie.

**33. a)** Como tem um tempo de meia-vida mais elevado, protege durante mais tempo a integridade dos alimentos. **b)** Não, porque têm um poder ionizante maior e causariam transformações nos alimentos. **c)** Como

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \text{ e } \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \text{ então } \frac{A}{A_0} = e^{-0,13t},$$

como resta 20%, tem-se  $0,20 = e^{-0,13t}$ , vem  $\ln(0,20) = -0,13t$  e  $t = 12,4 \text{ anos}$ .

**d)** Resposta aberta.

# ÍNDICE REMISSIVO

- Aceleração, 15, 20  
Atividade de uma amostra radioativa, 259  
Aurora polar, 205
- Blindagem eletrostática, 169
- Campo elétrico, 162-164, 167, 168  
Campo gravítico, 145-147, 149  
Campo magnético, 199, 206, 212  
Capacidade elétrica, 179-181  
Carga elementar, 158  
Catástrofe do ultravioleta, 231  
Cavendish, 143  
Centro de massa, 8, 51, 79-81  
Ciclotrão, 211  
Cisão nuclear, 250, 257  
Coeficiente de atrito cinético, 47, 49  
Coeficiente de atrito estático, 47, 49  
Coeficiente de restituição, 96, 97  
Colisões elásticas, 92  
Colisões inelásticas, 93  
Componente tangencial da aceleração, 19, 21  
Componente normal da aceleração, 19, 22  
Condensador, 166, 179  
Condensador plano, 180  
Constante de gravitação universal, 142, 143  
Constante de tempo de um condensador, 182  
Corpo negro, 227, 228
- Decaimento radioativo, 251, 253  
Densidade relativa, 107  
Deslocamento, 13  
Diferença de potencial, 176, 180  
Distância percorrida, 13  
Dualidade onda-corpúsculo, 238
- Efeito das pontas, 170  
Efeito fotoelétrico, 317-322  
Einstein, 136, 292, 301, 307, 310, 320  
Eletroscópio, 178  
Emissividade, 229  
Energia de ligação nuclear, 247-249  
Energia potencial elétrica, 171-173  
Energia potencial gravítica, 148, 149, 151  
Equilíbrio eletrostático, 167-170, 179  
Equivalência energia-massa, 247
- Espectrómetro de massa, 207  
Experiência de Millikan, 158, 166, 234  
Experiência de Rutherford, 246, 256  
Experiência de Thomson, 158, 210
- Fluido, 106  
Força centrípeta, 19, 22  
Força de atrito, 46-51  
Força de Laplace, 213  
Força de Lorentz, 206  
Força de pressão, 112, 116, 121  
Força elétrica, 159, 161-163, 166, 171, 175, 201, 206  
Força gravítica, 83, 136, 142-145  
Força magnética, 206, 212, 213  
Força nuclear forte, 246  
Força nuclear fraca, 255  
Fusão nuclear, 256, 257
- Gaiola de Faraday, 169  
Geiger, 262  
Gerador de Van de Graaff, 168, 169
- Impulsão, 121-125  
Isótopos, 209, 247, 251, 258
- Lei da Conservação do Momento Linear, 88  
Lei da Gravitação Universal, 138-143, 159  
Lei de Arquimedes, 106, 121  
Lei de Coulomb, 159-162  
Lei de Decaimento Radioativo, 259  
Lei de Deslocamento de Wien, 230  
Lei de Pascal, 118, 119  
Lei de Stefan-Boltzmann, 227-229  
Leis de Kepler, 139, 140  
Lei do Movimento, 10  
Lei Fundamental da Hidrostática, 113-116, 118  
Linhas de campo, 145, 147, 149, 163, 168, 174-176, 185, 204
- Magnetismo, 198,  
Massa volúmica, 107-109  
Maxwell, 198, 231, 232  
Momento linear, 85- 89, 93, 96, 253  
Movimento retilíneo e uniforme, 28, 203  
Movimento uniforme, 11, 23, 30, 141  
Movimento uniformemente variado, 11, 23, 30
- Neutrão, 89, 108, , 158, 246, 253, 254, 256  
Núcleo, 160, 211, 226, 246-252, 254, 257
- Para-raios, 170  
Partícula, 8-10, 13  
Partículas alfa, 254  
Partículas beta, 254  
Pêndulo gravítico, 54  
Período de semidesintegração, 259  
Permitividade elétrica, 160, 180  
Peso, 27, 30, 36, 46  
PET, 262  
Posição, 8-13, 27  
Positrão, 158, 253, 254  
Potencial elétrico, 171-175, 179  
Pressão, 106-110, 113, 116, 117  
Princípio da Conservação da Carga, 158  
Projéteis, 30-33  
Protão, 89, 108, 158, 161, 246, 247, 253, 257
- Radiação, 227-231, 235, 238, 251  
Radiação alfa, 252-254  
Radiação beta, 89, 252-254  
Radiação gama, 252-254  
Radiação ionizante, 262  
Radioatividade, 246, 251-254  
Radioisótopos, 251, 260, 262  
Raio de curvatura, 22, 41-43  
Raios X, 166, 251
- Seletor de velocidades, 206-208  
Superfícies equipotenciais, 171, 174-176, 185
- Tempo de meia-vida, 259-262  
Tensão, 36, 39, 53 54, 181, 186, 212  
Trajetória, 8, 11-13, 17, 21, 23, 27, 30, 37, 84, 148, 171, 201  
Tubo de raios catódicos, 177
- Unidade de massa atômica unificada, 248
- Velocidade, 13, 14, 17, 23, 199  
Velocidade de escape, 150  
Velocidade de um satélite em órbita, 150  
Velocidade média, 13, 14, 23  
Velocidade terminal, 125, 127, 128





## **PARA O ALUNO**

- **Manual do Aluno**
- **Caderno de Exercícios e Problemas**
- **Apoio Internet** [www.novo12f.te.pt](http://www.novo12f.te.pt)



Recomenda-se a utilização conjunta do Manual e do Caderno de Exercícios e Problemas para facilitar a aprendizagem e contribuir para o sucesso escolar. Estes materiais podem, no entanto, ser vendidos separadamente.

 www.leya.com	 www.texto.pt	ISBN 978-972-47-5488-8  9 789724 754888 IVA INCLuíDO 6% <b>€40,38</b>
--	---	--

